Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VIII (1974), págs. 233 - 246

SUR L'AXIOMATIQUE DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

par

V. CRAIU et V. Gh. VODĂ

SOMMAIRE

Prenant comme point de depart un ouvrage de L. J. Savage, nous faisons une presentation de l'axiomatique de ce qu'on appelle "les probabilités qualitatives" tout en y ajoutant quelques commentaires.

1. *Introduction.* **Un groupe de mathématiciens s'est reuni a Londre en été 1959 sous la presidence du reputé mathématicien américain L. J. Savage, se proposant de discuter certaines aspects de l'application de ce qu'on appelle les probabilités subjectives dans la statistique.**

Le résultat de cette rencontre fut la publication- trois ans aprẽs - d'un livre intitulé "The Foundations of Statistical Inference - A discussion", reunissant l'ouvrage du Prof. Savage (Subjective probability and statistical inference) les commentaires portant sur cet ouvrage (appartenant ã M.M. G. A. Barnard, M.S. Bartlett, D. R. Cox, E. S. Pearson et C. A. B. Smith des mathématiciens renommés) aussi que les discussions qui ont en lieu(J.G. Good, D. V. Lindley G. M. Jenkins et autres) .

En dépit du caractere héterogẽne du livre publié qui résulte normale, si l'on tient compte du nombre assez grand de ceux qui ont pris part ã son elaboration - il existe un invariable qu'on retrouve sans cesse dans ses pages et c'est la notion de

probabilité subjective.

Au fait, L. J. Savage est un des partisans passionnés de la théorie de la probabilité subjective; selon son opinion, cette notion pouvant apporter des éclairsissements substantiels sur les problẽmes que la théorie classique avait laissés dans l'ombre.

"The Foundation of Statistical Inference" est marqué par un prononcé esprit socratique. Dans le début, L. J. Savage nous avertit que le but de la réunion ayant en lieu à Londre, était celui de poser des problẽmes, d'envisager les aspects impliqués par l'acceptation de la théorie, telle qu'elle se presente à l'état actuel -en un mot, de voir si on peut lui accorder un certificat de libre circulation sur les territoires contrôlés par la théorie des probabilités et par la statistique mathématique .

Le livre de Savage nous a suggéré l'idée de passer en revue l'axiomatique de la théorie des probabilités.

2. *Conceptions sur la probabilité.* Il est evident que le développement de la théorie mathématique de la probabilité s'est appuyé pendant les dernières decennies sur l'axiomatique élaborée par Kolmogorov dans son "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (1933).

Suivant la voie de Kolmogorov, la plupart des ouvrages appartenant au domaine de la théorie des probabilités publiés aprẽs 1933, considẽre la probabilité comme une mesure P, définie sur une σ-algẽbre d'ensembles appartenant à l'espace Ω qui satisfait ã la condition $P(\Omega) = 1$.

Bien que cette formule soit pleinement satisfaisante au point de vue mathématique, il reste néaumoins bon nombre de problẽmes applicatifs appartenant à des domaines differents qui ne peuvent être résolus qu'ã l'aide de la théorie échafau-

drée sur cette axiomatique et qui exigent certaines modifications dans l'axiomatique générale.

Le principal inconvéniant consiste, selon O. Onicescu [10], dans la représentation du champ des événements, en tant que champ borélien (parties d'un ensemble dont les éléments ne possèdent pas, en général, une signification phénoménologique).

Si on envisage au point de vue historique l'évolution de la théorie des probabilités en tant que science, on saisit que sa position longtemps subordonnée est due à la doctrine deterministe de Laplace selon laquelle l'état présent de l'Univers doit être considéré comme un effet de l'état antérieur et comme une cause de l'état futur.

Etant donné que l'état antérieur et l'état futur nous-montre Laplace -ne peuvent être connus avec precision, il résulte que ce que nous connaissons n'est que "probable".

La théorie classique s'est developpée à l'aide des modèles de Bernoulli (celui des extractions répetées), de Gauss, de Gibbs et de Poisson (celui des événements rares).

Tout modèle d'une théorie classique s'est basé au fond sur une construction simple ; on a consideré un système d'événements $\{A\}$ et un système de nombres associés à ces événements : $p(A)$.

Les axiomes du système des événements correspondaient aux relations logiques d'alternance $(\cup)$ et de concordance $(\cap)$ avec les propriétés d'être symmétriques, associatives, distributives et idempotentes.

Le systeme $\{A\}$ affirme l'événement impossible noté par ϕ. L'incompatibilité de deux événements $A_1, A_2 \in \{A\}$ est définie ainsi :

$$A_1 \cap A_2 = \phi$$

Il faut remarquer -le fait est autrement important- que pour la théorie classique il n'est pas absolument necessaire d'avoir la situation :

$$\text{si } A \in \{A\} \quad \text{alors} \quad \text{non } A \in \{A\},$$

c'est-à-dire, le systeme d'événements $\{A\}$ ne comprend pas "un événement global" (noté par Ω) de sorte que nous ayons $A \cap \Omega = A$, quel que soit $A \in \{A\}$.

Les axiomes du système des nombres associés aux événements sont $0 \leq p(A) \leq 1$ quel que soit A, et l'aditivité.

En introduisant aussi la définition de la probabilité conditionnée, ainsi que la définition de l'independance de deux événements, on caractérise par ce système d'axiomes et de définitions, tout modèle d'une théorie classique.

Considérons aussi les inconvenients de l'axiomatique de Kolmogorov et mentionnons que Koopman et Halmos envisageant les événements comme étant des termes quelconques en relations avec les operations usuelles de réunion, d'intersection et complaimentaire et qui satisfont aux axiomes d'une algèbre booléene .

Aussi on a remarqué le fait qu'une mesure probabilistique qui satisfait à l'axiome $P(\Omega) = 1$ ne peut être appliquée naturellement aux problèmes comprenant des mesures nonbornées.

Il ne peut être question, par exemple, d'une mesure probabilistique qui soit uniforme tout le long de l'axe réelle.

L'une des objections faites couramment lors de l'implication des mesures nonbornées soutient que la probabilité est utilisée pour construir des modèles où elle detient le rôle de frequence idealisée -donc sa valeur *(1)* ne peut être depassée.

Essayant de résoudre oette difficulté, Bruno de Finetti (1949) propose de définir pour le debut, les probabilités conditionnée $P(A/B)$ par les propriétés :

1) $P(A/B) \geq 0$, $P(B/B) = 1$

2) $P(A_1 \cup A_2/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B)$ si

$$(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = A_1 \cap A_2 \cap B = \phi$$

3) $P(A \cap B) / C) = P(A/BC) \cdot P(B/C)$

Evidemment, si on introduit dans le systême de Bruno de Finetti l'événement total, alors choisissant $B = \Omega$ on obtiendra l'axiomatique connue.

Rényi généralise les résultats de Bruno de Finetti et en 1955 présente une théorie axiomatique modifiée, oũ le concept fondamental est celui de la probabilité conditionée.

Il démontre qu'on peut definir une mesure (pas nécessairement finie) sous certaines conditions générales, oũ la probabilité conditionée est donnée par :

$$P(A/B) = \frac{\mu\,(A \cap B)}{\mu\,(B)} \quad , \quad \text{oũ} \quad \mu\,(B) \neq 0 .$$

Plus tard, O. Onicescu [10] généralise le schéma de Bruno de Finetti-Rényi de la façon suivante : il considère une lattice K, et une souslattice K_1 ayant le même élément minimal ϕ et définie une fonction positive $P(A/B)$, $A \in K$, $B \in K_1$, additive par rapport ã A et avec les propriétés :

1) Si $A_1 \cap A_2$ $B = \phi$, alors $P(A_1 \cup A_2/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B)$;

2) Pour tout B pour lequel nous avons $A \cap B \in K$, alors :

$$P(A \cap B/C) = P(A/B \cap C) \cdot P(B/C)$$

Considérons $B = C = A$; on obtient $P(A/A) = P^2\ (A/A)$ équation dont nous retenons seulement $P(A/A) = 1$, qui correspond aux conditions classi-

ques.

Il faut remarquer que si la construction d'Onecescu suppose l'existence de l'événement total alors prenant $B = \Omega$ nous obtiendrons la formule de la probabilité conditionée, ce qui démontre qu'il n'est pas nécessaire d'avancer les probabilités conditionnés.

3. *Les idées subjectivistes et les probabilités qualitatives.* Reprenant les idées, on peut dire que le modèle dominant dans la théorie actuelle (objective) envisage "les éléments atomiques" en tout qu'événements élémentaires.

Notons par Ω l'espace de ces événements, soit K le champ des événements proprement dits.

K comprend Ω par definition, celui-ci étant l'événement total. En même temps, K affirme aussi l'événement impossible ϕ.

Le champ des événements a été organisée en concordance avec certaines critères et il est une σ-algèbre de Boole.

La base somatique du modèle est donc une base qui correspond à un système logique et les relations entre les événements sont au fond des relations logiques fondamentales : alternance et concordance.

Le calcul au moyen des éléments atomiques de la théorie est au fait un calcul logique d'algèbre propositionnelle.

Enfin, la quantification du modèle se fait à l'aide des fonction $P(A)$, $A \epsilon K$, ayant le propriétés bien connues : $0 \leq P(A) \leq 1$, quel que soit $A \epsilon K$, $P(\Omega) = 1$ et σ-additivité.

L'opinion recente d'un grand nombre des mathématiciens porte sur le fait que par l'adhésion exclusive à l'interpretation objective de la probabilité, le domaine d'application de la théorie des probabilités été restreint de façon évidente.

Leurs arguments portent sur la nécessité d'utiliser en même temps que la probabilité objective, la probabilité "personnelle" (terme que Savage utilise plus souvent que probabilité subjective) et que cette probabilité est destiné de jouer un rôle principale dans plusieurs domaines d'applications parmi lesquels le plus important semble celui de la théorie de la décision.

Les idées subjectives dans la théorie des probabilités prennent leur origine dans un ouvrage de Venn "The Logic of Chance" parut en 1888.

Pour la plupart des subjectivistes, le concept de probabilité est le fondement de toute théorie statistique et ils atribuent à ce concept une valeur en soi et imprévisible au sens déterministe.

Pour de Finetti, le subjectivisme se fonde sur les propriété intrinsèques, objectives, des donnéex experimentales (statistiques) qui influent sur la prise de certaine décisions.

Prenant comme point de depart l'interpretation subjective de la probabilité, on a essayé de construire une axiomatique ayant pour concept fondamental "la probabilité qualitative".

En 1917 S. N. Bernstein [*1*] fait un premier essai de construire une pareille axiomatique.

Quelque temps après, en 1931 Bruno de Finetti [*2*] propose un système d'axiomes, légérement amélioré.

Koopman [*4*] extrait une mesure probabilistique d'une probabilité qualitative dans une hypothèse simplificatrice, voir que pour tout nombre naturel n il existent n événements également probables et disjoints deux par deux.

Savage démontre dans son ouvrage classique "The Foundations of Statistics" (1954) que cette hypothèse restrictive peut être abandonnée gagnant en généralité au dépendense de la simplicité.

Kraft, Pratt et Seidenberg [5] ont considéré le cas de certaines algēbres booléennes finies sans une mesure compatible. Villegas [11] a démontré que si on définе sur une σ-algēbre booléenne d'ensembles, une probabilité qualitative, dans certaines conditions il existe une -et seulement une- mesure probabilistique compatible et cette mesure est denombrablement additive.

Nous essayons de clarifier les choses. A cet effet on va tenter de faire une brēve presentation de l'axiomatique de la probabilité qualitative et de quelques résultats obtenus.

4. L'axiomatique de la probabilité qualitative. Les événements sont considéres en tant qu'éléments quelconques d'un anneau booléen $\mathfrak{R}$.

Les deux opérations de l'anneau -l'addition et la multiplication sont denommées respectivement - *difference symmétrique* (+) et *intersection* ($\cap$). La réunion ($\cup$) et l'inclusion ($\subset$) peuvent être définies ā l'aide des operations de l'anneau.

L'inclusion est un ordre partiel ayant un premier élément 0 qui est l'élément zéro de l'anneau et qui est denommé l'événement impossible.

Deux événements A et B sont considerés incompatibles si $A \cap B = 0$.

Une algēbre $\mathfrak{A}$ d'événements est un anneau booléen avec un élément unité, *l'événement sûr* noté couramment par Ω.

On sait que tout anneau booléen est isomorphe avec un anneau d'ensemble de l'espace.

Ce résultat a été pasé en evidence par Stone en 1936, sa construction recevant dans la théorie de la probabilité qualitative, l'interpretation suivante :

Une réalisation possible de l'anneau d'événements $\mathfrak{R}$ est une repartition des éléments de $\mathfrak{R}$ en deux classes d'événements : ceux qui se réalisent et ceux qui ne se réalisent pas.

Cette classification est telle que :

- la classe des événements qui se réalisent n'est pas vide.

- $A + B$ se réalise à la seule condition qu'au moins un des événements A et B se réalise.

- $A \cap B$ se réalise seulement si les deux événements se réalisent.

Les conséquences de cette interpretation sont imédiates :

- l'événement 0 ne se réalise jamais.

- Si A est un événement différent de 0 alors il existe une réalisation de A.

L'ensemble Ω de toutes les réalisations possibles est l'espace des possibilités de l'anneau $\mathfrak{R}$.

Un événement A étant donnée, on noté par $\tilde{A}$ l'ensemble de toutes les réalisations de A où l'événement A se réalise.

On a démontre que l'application $A \mapsto \tilde{A}$ est un isomorphisme booléen entre $\mathfrak{R}$ et l'anneau booléen d'ensembles

$$\tilde{\mathfrak{R}} = \{ \tilde{A} \mid A \in \mathfrak{R} \}$$

Par conséquent, on a pu identifier les événements avec les ensembles de $\tilde{\mathfrak{R}}$, c'est-à-dire que les événements peuvent être considérés comme étant des ensembles d'événements.

Et maintenant, quelques definitions :

Définition 1. Un pré-ordre total dans un anneau booléen d'événement $\mathfrak{R}$, est une relation $\leq$ de sorte que :

I_1 - si A et B sont des événements, alors ou bien $A \leq B$ ou $B \leq A$

(comparabilité) .

II_1 - si $A \leq B$ et $B \leq C$, alors $A \leq C$ (transitivité).

Définition 2. Une *probabilité qualitative* dans un anneau booléen d'événements $\mathcal{R}$ est un pré-ordre total qui satisfait aux conditions suivantes :

I_2 - si $B_1 \cap B_2 = 0$, alors de $A_1 \leq B_1$ et $A_2 \leq B_2$ il résulte $A_1 \cup A_2 \leq B_1 \cup B_2$.

II_2 - Pour tout événement A, $0 \leq A$.

Définition 3. La paire $(\mathcal{R} \leq)$ où $\mathcal{R}$ et l'anneau booléen et $\leq$ une probabilité qualitative definie dans $\mathcal{R}$, se dit *anneau probabilistique qualitatif.*

Définition 4. Une *algèbre probabilistique qualitative* est une paire $(\mathcal{A} \leq)$ où $\mathcal{A}$ est une algēbre booléenne et $\leq$ est une probabilité qualitative définie sur $\mathcal{A}$ et satisfaisant ā la condition $0 < \Omega$.

Soient $\mathcal{R}$ un anneau booléen et $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{R}$ qui contient l'événement impossible. Une *fonctionnelle additive* sur $\mathcal{F}$ est une fonction φ, ayant de valeurs réelles, définie sur $\mathcal{F}$ de sorte que :

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

ou, A, B, $A \cup B \in \mathcal{F}$ et $A \cap B = 0$.

Définition 5. Une fonctionnelle additive sur $\mathcal{F}$ est *compatible avec une probabilité qualitative* $\leq$, définie sur $\mathcal{R}$, si $A \leq B$ implique $\varphi(A) \leq \varphi(B)$, $(\forall)$ $A, B \in \mathcal{F}$.

Une *mesure additive sur* $\mathcal{F}$ est une fonctionnelle aditive non négative, c'est-ā-dire, une fonctionnelle additive définie sur $\mathcal{F}$ de sorte que

$$\mu(A) \geq 0 \qquad (\forall)\ A \in \mathcal{F}$$

Il résulte encore que si une fonctionnelle additive est compatible avec une probabilité qualitative, elle devient une mesure additive.

Une mesure probabilistique additive P, est une mesure additive définie dans une algèbre boolléene, de sorte que :

$$P(\Omega) = 1$$

Revenons aux événements : si $A = 0$ (A est probablement égal à 0) nous dirons que A est un événement à peu près impossible.

De façon analogue, si $A = \Omega$ nous dirons que A est un événement à peu près sûr.

Deux événements A, B seront considerés à peu près incompatibles si $A \cap B = 0$.

Une partition uniforme de l'ordre n d'un événement $A > 0$ est un collection de n événements non-nuls probablement egaux et à peu près incompatible dont le réunion est A.

Tenant compte de cela, nous dirons que :

- Un anneau probabilistique qualitatif est *reductible* s'il est fissionable et si pour toute paire d'événements A, B, $0 < A < B$, il existe pour B une partition uniforme $\mathfrak{S}$ de telle manière que $E < A \leq B - E$ pour chaque $E \in \mathfrak{S}$.

- Donnée un événement $E \in \mathfrak{R}$ d'un anneau probabilistique qualitatif, la *section de $\mathfrak{R}$ determinée par E* est la collection de tout événement $A \in \mathfrak{R}$ de telle maniere que $A \leq E$.

Un anneau probabilistique qualitatif $(\mathfrak{R}, \leq)$ est *σ-borné* s'il existe une suite d'événements $E_1 \leq E_2 \leq \cdots$, de sorte que si $A \in \mathfrak{R}$, alors il existe un nombre naturel $n \in N$ pour qui $A \leq E_n$.

A l'aide de cette construction axiomatique on a pu démontrer que :

THÉORÈME 1. Si $(\mathcal{R}, \leq)$ *est un anneau probabilistique qualitatif réductible, alors il existe une mesure additive compatible pour chaque section de* $\mathcal{R}$ *et cette mesure est unique.*

THÉORÈME 2. Si $(\mathcal{A}, \leq)$ *est une algèbre probabilistique qualitative réductible, alors il existe une mesure probabilistique additive unique qui est compatible avec la probabilité qualitative* $\leq$.

THÉORÈME 3. Si $(\mathcal{R}, \leq)$ *est un anneau probabilistique qualitatif réductible et* σ*-borné, alors il existe une mesure additive compatible unique.* (Voir [*11*], [*12*]).

5. *Conclusions.* Bon nombre de mathématiciens pense-et nous ne citerons que Villegas [*12*] qui a obtenu des résultats importants dans le domaine de la probabilité qualitative- que cette construction axiomatique est compatible dans le même temps avec l'interpretation objective et cela subjective.

On considere que l'interpretation de la probabilité peut être differente dans des contextes differents et même dans les parties differentes d'un même probleme. Cette idée prends déjà racine.

Savage est toute fois d'avis que seulement la façon subjective d'aborder les questions peut donner réponse à tous les problêmes par les domaines applicatifs.

Nous considérons que cette conception quelque peu exclusiviste, est motivée en partie chez Savage par le fait que longtemps la notion de probabilité subjective -dont il a été le promoteur enthousiaste -n'a pas remporté l'adhésion de la majorité des mathématiciens. Encore, aujourd'hui les controverses sont vivantes.

"Pour moi -dit Savage- la probabilité personnelle ou subjective est la modali-

té unique qui correspond ã toutes mes exigences et donne un sens rigoureux et raisonnable au concept de probabilité " ([9] pp. 102-103).

BIBLIOGRAPHIE

1. *S. N. Bernstein : 0 aksiomatičeskoi osnove teorii veroiatnosteĭ* , Soobščenia Harskogo Obscestva, 15(1917) pp. 209-274.

2. *Bruno de Finetti : La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives.* Ann. Inst. H. Poincaré, 7(1937) pp. 1-68.

3. *Bruno de Finetti : Sull' impostazione assiomatica del calcole delle probabilitá* Annali Triestini Serie 2(1949) 19, pp. 29-81.

4. *B. O. Koopman : The axioms and algebra of intuitive probability :* Annals of Mathematics , 41(1940) pp. 269 - 292.

5. *C. H. Kraft, J. W. Pratt and A. Seidenberg : Intuitive probability on finite sets :* Annals of Math. Statistics 30(1953) pp. 408-419.

6. *Gh. Mihoc, G. Ciucu, V. Craiu, Teoria probabilităţilor şi statistica matematică.* Ed. Didactică şi Pedagogică 1970, Bucareşti.

7. *A. Rényi : On a new axiomatic theory of probability.* Acta Math. Sci. Hung . 6(1955) pp. 285-335.

8. *L. J. Savage : The Foundations of statistics,* Wiley, N. Y. 1954.

9. *L. J. Savage : The Foundations of statistical Inference.* Methuen Co. London 1964.

10. *Octav Onicescu : Principiile Teoriei Probabilităţilor.* Editura Academiei, Bucareşti, 1969.

11. *C. Villegas : On qualitative probability σ -algebras.* Annals of Math. Statistics 35(1964) pp. 1787-1796.

12. *C. Villegas : On qualitative probability*. The American Math. Monthly, vol.74, 6.(1967) pp. 661-669.

Université de Bucarest
Chaire de Probabilité et Statistique
et
Centre de Statistique Mathématique
de l'Academie
Grivitei 21 Bucarest - 12
Roumanie

(Recibido en abril de 1974)