Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VIII (1974), págs. 253-265

SOBRE EL K-COMPLETADO DE UN MÓDULO DE HILBERT

por

Rolando SÁENZ

Este artículo corresponde a las últimas secciones del trabajo "El *K*-Completado de un Módulo de Hilbert" que el autor presentó para obtener el título de Magister Scientiae en matemáticas, en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia. Se hace entonces necesario, para la mejor comprensión del artículo, hacer algunos comentarios sobre las primeras secciones.

Un álgebra de Stone $C(S)$ es el álgebra de Banach de las funciones a valor complejo definidas y continuas en S, donde S es un espacio de Stone (es decir un espacio topológico compacto, de Hausdorff y extremadamente disconexo). En un espacio de Stone S se puede demostrar el siguiente teorema que es de vital importancia en el desarrollo de este trabajo: *Si X es un subconjunto abierto de S, denso en S y f es una función continua y acotada de X en S, entonces f se puede extender (de manera única) a una función en $C(S)$.*

Un $C(S)$-módulo de Hilbert H en el cual se ha definido un producto interno con valores en $C(S)$ se llama un módulo pre-Hilbert (sobre $C(S)$). Si además H es completo para la norma inducida por el producto interno ($\|\sigma\| = \|<\sigma,\sigma>\|$) se dice que H es un módulo de Hilbert.

En este artículo identificaremos un módulo de Hilbert H (sobre $C(S)$) con

un cierto espacio de funciones $\Gamma(\pi)$, definidas y continuas en S. En efecto, se puede demostrar que existe un isomorfismo de módulos, que conserva el producto interno, de H sobre $\Gamma(\pi)$. Describiremos brevemente el espacio $\Gamma(\pi)$.

Sea $Kx = \{ n \in H : < h, h > (x) = 0 \}$. Kx es un submódulo cerrado de H y $H_x = H/K_x$ es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ con las operaciones naturales y con el producto interno definido por $< h, g > = <h, g> (x)$. H_x se denomina la fibra sobre x.

Sean $E = \bigcup_{x \in S} H_x$ y π la proyección de E sobre $S (\pi (h + K_x) = x)$. Entonces para $h \in H$ se define la sección $\hat{h}$ de E sobre S por $\hat{h}(x) = h + K_x$ y se dota a E de una topología tal que las únicas secciones continuas de E (sobre S) sean las funciones $\hat{h}$. $\Gamma(\pi)$ es precisamente el conjunto de las secciones continuas de E (sobre S). $\Gamma(\pi)$ con las operaciones naturales y con el producto interno $< \sigma, \tau > (x) = <\sigma (x), \tau (x)>$ es un $C(S)$-módulo de Hilbert isomorfo a H. En $\Gamma(\pi)$ se tiene

$$||\sigma|| = || < \sigma, \sigma > ||^{\frac{1}{2}} = \sup_{x \in S} ||\sigma (x)|| \quad \text{y} \quad |\sigma | (x) = <\sigma,\sigma>^{\frac{1}{2}}(x) = ||\sigma (x) ||,$$

donde la norma de la derecha en las igualdades anteriores es la norma inducida por el producto interno en la fibra correspondiente.

1. K - MÓDULOS DE HILBERT

DEFINICIÓN 1. Un módulo de Hilbert sobre $C(S)$ se denomina un *K-módulo de Hilbert* (sobre $C(S)$) si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

(K_0) Sea $\{e_i\}$ una familia de proyecciones ortogonales en $C(S)$ con m.c.s.[1] e y sea ρ un elemento de H tal que $e_i \rho = 0$ para todo i, entonces $e\rho = 0$.

---

1) Una función $f \in C(S)$ se dice una proyección si $f(x) = 0$ o $f(x) = 1$ para todo $x \in S$. Dos proyecciones $f, g \in C(S)$ se dicen ortogonales si $\cdot fg = 0$. Se puede demostrar fácilmente que toda familia de proyecciones en $C(S)$ tiene una mínima cota superior (m.c.s.).

(K_1) Sea $\{e_i\}$ una familia de proyecciones ortogonales en $C(S)$ son m.c.s. 1, y sea $\{\rho_i\}$ un subconjunto acotado de H, entonces existe un elemento $\rho \in H$ tal que $e_i \rho_i = e_i \rho$ para todo i.

De (K_o) se sigue inmediatamente que el elemento ρ en (K_1) es único.

LEMA 1. Todo módulo de Hilbert sobre un álgebra de Stone satisface (K_o).

Demostración. Sea $\Gamma(\pi)$ un módulo de Hilbert sobre un álgebra de Stone $S(C)$ y sean $\{e_i\}$ proyecciones ortogonales en $C(S)$ con m.c.s. e y ρ un elemento de $\Gamma(\pi)$ tal que $e_i \rho = 0$ para todo i. Entonces $|e_i\rho| = 0$ para todo i y puesto que $e_i |\rho| = |e_i\rho|$ y $|\rho|$ es un elemento de $C(S)$, se sigue que $|e\rho| = e|\rho| = 0$ [2)] y esto implica que $e\rho = 0$. ■

2. *EL K- COMPLETADO DE UN MÓDULO DE HILBERT*

El objetivo de esta sección y de la siguiente es probar que todo módulo de Hilbert puede completarse en el sentido de la definición. En otras palabras, que dado un módulo de Hilbert H es posible construir un K-módulo de Hilbert $\tilde{H}$ tal que H sea un submódulo de $\tilde{H}$, y tal que todo operador acotado de H en un K-módulo de Hilbert H' se puede extender de manera única a un operador acotado de $\tilde{H}$ en H'.

LEMA 2. Todo módulo pre-Hilbert puede completarse para obtener un módulo de Hilbert.

Demostración. No daremos los detalles de la demostración ya que el proce-

---

2) Si $\{e_i\}$ son proyecciones ortogonales com m.c.s. e y $e_i f = 0$, donde $f \in C(S)$, entonces $ef = 0$.

so de completación es exactamente el mismo que se utiliza para completar un espacio pre-Hilbert.

Si H es un módulo pre-Hilbert sobre un álgebra de Stone y L es el conjunto de las sucesiones de Cauchy en H, su completado $\hat{H}$ es el espacio cociente $\hat{H} = L/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia en L definida por $\{\rho_n\} \sim \{\lambda_n\}$ si y sólo si $\|\rho_n - \lambda_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

En $\hat{H}$ se define el siguiente producto interno

$$< \dot{\rho} , \dot{\lambda} > \; = \; \lim_{n \to \infty} \; < \rho_n , \lambda_n >$$

donde $\rho = \{\rho_n\}$ y $\lambda = \{\lambda_n\}$ son sucesiones de Cauchy en H. ■

COROLARIO 1. $\hat{H}$ *es isomorfo a un submódulo de* $\hat{H}$ *denso en* $\hat{H}$. ■

COROLARIO 2. $\hat{H}$ *es único salvo isomorfismos.* ■

Sea $\Gamma(\pi)$ un módulo de Hilbert sobre un álgebra de Stone y sea E el espacio topológico definido en la introducción. Notaremos por $\Sigma(\pi)$ al conjunto de las secciones acotadas de S en E.

Nota. Una sección ρ se dice acotada si el conjunto $\{ \|\rho(x)\| \; ; \; s \in S \}$ es acotado. La norma es la inducida por el producto interno en la fibra correspondiente.

Es claro que $\Sigma(\pi)$ con las operaciones naturales y con la norma definida por

$$\|\rho\| = \sup_{x \in S} \|\rho(x)\|$$

es un $C(S)$ - módulo normado.

Sea H_o el subconjunto de $\Sigma(\pi)$ definido por : $\rho \in H_o$ si y sólo si existe en $C(S)$ una familia de proyecciones ortogonales $\{e_i\}$ con m.c.s. 1 tal que

$e_i \rho \in \Gamma(\pi)$ para todo i.

LEMA 3. H_o es un submódulo de $\Sigma(\pi)$ que contiene $\Gamma(\pi)$.

Demostración. Sean $\rho, \lambda \in H_o$ y sean $\{e_i\}$ y $\{f_j\}$ familias de proyecciones ortogonales en $C(S)$ con m.c.s. 1 tales que $e_i \rho$, $f_j \lambda \in \Gamma(\pi)$ para todo i y para todo j. Entonces $\{e_i f_j\}$ es una familia de proyecciones ortogonales en $C(S)$ con m.c.s. 1, y

$$(e_j f_j)(\rho + \lambda) = (e_i f_j)\rho + (e_i f_j)\lambda = f_j(e_i \rho) + e_i(f_j \lambda),$$

de donde se sigue que $(e_i f_j)(\rho + \lambda) \in \Gamma(\pi)$ para todo i y todo j.

Ahora, si $f \in C(S)$, de

$$e_i(f\rho) = (e_i f)\rho = f(e_i \rho)$$

se sigue que $f\rho \in H_o$.

Finalmente, puesto que todo elemento de $\Gamma(\pi)$ es una sección acotada y $1\rho = \rho$ es claro que $\Gamma(\pi)$ está contenido en H_o. ■

Sean ρ y λ elementos de H_o y sean $\{e_i\}$ y $\{f_j\}$ familias de proyecciones ortogonales en $C(S)$ con m.c.s. 1 tales que $e_i\rho$ y $f_j\lambda$ están en $\Gamma(\pi)$ para todo i y para todo j.

Sea $\{g_{ij}\} = \{e_i f_j\}$ y sea $X = \cup X_{ij}$ donde $X_{ij} = \{x \in S \; ; \; g_{ij}(x) = 1\}$, entonces la función $<\rho, \lambda>_o$ definida por

$$<\rho, \lambda>_o(x) = <\rho(x), \lambda(x)>$$

es una función continua en X. En efecto, $<\rho, \lambda>_o(x) = <g_{ij}\rho, g_{ij}\lambda>(x)$ para todo $x \in X_{ij}$ y puesto que las funciones $<g_{ij}\rho, g_{ij}\lambda>$ son continuas y los conjuntos X_{ij} son abiertos y disyuntos se sigue que $<\rho, \lambda>_o$ es continua en

X.

Por otra parte, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|<\rho(x), \lambda(x)>| \leq ||\rho(x)|| \, ||\lambda(x)||$$

se sigue que $<\rho, \lambda>_o$ es acotada y por el lema 2 existe una única función $<\rho,\lambda>$ definida y continua en S que coincide con $<\rho, \lambda>_o$ en X.

LEMA 4. La función $<\rho, \lambda>$ *no depende de la elección de las proyecciones ortogonales* $\{e_i\}$ *y* $\{f_j\}$.

Demostración. Es suficiente demostrar que si f y f' son funciones continuas y acotadas en X y X' respectivamente, tales que $f(x) = f'(x)$ para todo $x \in X \cap X'$, donde X y X' son subconjuntos densos en S, sus extensiones continuas a todo el espacio S son iguales. Pero esto se sigue inmediatamente del hecho de que $X \cap X'$ es un conjunto denso en S y por tanto existe una *única* función g definida y continua en S tal que $g(x) = f(x) = f'(x)$ para cada x en $X \cap X'$. ■

LEMA 5. $<,>$ *es un producto interno sobre* H_o *con valores en* $C(S)$.

Demostración. Se comprueban fácilmente las cuatro propiedades del producto interno. A manera de ejemplo probaremos la primera propiedad.

Sean ρ y λ elementos de H_o y sea X como en la definición de $<\rho, \lambda>_o$. Entonces

$$<\rho,\lambda>(x) = <\rho, \lambda>_o(x) = <\rho(x), \lambda(x)> = \overline{<\lambda(x), \rho(x)>} = \overline{<\lambda, \rho>_o}(x) = \overline{<\lambda, \rho>}(x)$$

para todo $x \in X$, y de la unicidad de las extensiones continuas se sigue que

$$<\rho, \lambda> = \overline{<\lambda, \rho>}. \quad ■$$

Nótese que si $\rho, \lambda \in \Gamma(\pi)$, entonces el producto interno del lema 4 coincide con el producto interno sobre $\Gamma(\pi)$.

Se ha demostrado que H_o con el producto interno definido anteriormente es un módulo pre-Hilbert (sobre $C(S)$) que contiene a $\Gamma(\pi)$.

Sea $\tilde{H}$ el completado de H_o, entonces H_o puede considerarse como un submódulo de $\tilde{H}$ (denso en $\tilde{H}$) y por tanto $\Gamma(\pi)$ puede también considerarse como un submódulo de $\tilde{H}$.

Probaremos ahora que $\tilde{H}$ es un K-módulo de Hilbert (sobre $C(S)$) con lo cual habremos conseguido la primera parte de nuestro objetivo.

TEOREMA 1. El completado $\tilde{H}$ del módulo pre-Hilbert H_o es un K-módulo de Hilbert sobre $C(S)$ que contiene a $\Gamma(\pi)$.

Demostración: Puesto que $\tilde{H}$ es obviamente un módulo de Hilbert sobre $C(S)$ y todo módulo de Hilbert sobre un álgebra de Stone satisface la propiedad (K_o) de la definición 1, nos queda únicamente por demostrar que se satisface la propiedad (K_1).

Primero probaremos (K_1) para una familia $\{\rho_i\}$ de elementos de H_o.

Sea $\{e_i\}$ una familia de proyecciones ortogonales en $C(S)$ con m.c.s. 1 y sea $\{\rho_i\}$ una familia acotada de elementos de H_o. Notaremos por U_i al conjunto siguiente :

$$U_i = \{ x \in S \ ; \ e_i(x) = 1 \}.$$

Ahora bien, sea ρ la sección definida por

$$\rho(x) = \rho_i(x)$$

si $x \in U_i$ y $\rho(x) = 0$ si $x \notin U$, donde $U = \bigcup U_i$.

Es claro que ρ es una sección acotada en S y que

$$e_i\rho = e_i\rho_i \quad \text{para todo } i.$$

Ahora, para cada i sea $\{f_{j_i}^{(i)}\}$ una familia de proyecciones ortogonales en

$C(S)$ con m.c.s. 1 tal que $f_{j_i}^{(i)} \rho_i$ es un elemento de $\Gamma(\pi)$ para todo j_i y sea $g_{j_i}^{(i)} = e_i f_{j_i}^{(i)}$; entonces $\{ g_{j_i}^{(i)} \}_{i, j_i}$ es una familia de proyecciones ortogonales en $C(S)$ con m.c.s. 1. Más aún, puesto que

$$g_{j_i}^{(i)} \rho = g_{j_i}^{(i)} \rho_i$$

para todo i y todo j_i y $g_{j_i}^{(i)} \rho_i \in \Gamma(\pi)$, se tiene que $\rho \in H_o$.

Considérese ahora una familia acotada $\{ \rho_i \}$ de elementos de H. Puesto que H_o es denso en $\tilde{H}$, para cada entero positivo n y cada elemento ρ_i existe un elemento $\lambda_n^{(i)}$ en H_o tal que

$$\| \rho_i - \lambda_n^{(i)} \| < \frac{1}{n} ,$$

de donde se concluye que para cada entero positivo n la familia $\{ \lambda_n^{(i)} \}_i$ es acotada y por la primera parte de la demostración de este teorema existe un elemento $\delta_n \in H_o$ tal que

$$e_i \delta_n = e_i \lambda_n^{(i)} \quad \text{para todo} \quad i .$$

De las desigualdades

$$\| e_i \delta_n - e_i \delta_m \| = \| e_i \lambda_n^{(i)} - e_i \lambda_m^{(i)} \| \leq \| e_i \lambda_n^{(i)} - e_i \rho_i \| + \| e_i \rho_i - \lambda_m^{(i)} \| \leq \| \lambda_n^{(i)} - \rho_i \| +$$
$$+ \| \rho_i - \lambda_m^{(i)} \| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} ,$$

se sigue que $\| \delta_n - \delta_m \| < \frac{1}{m}$, lo cual implica que $\{ \delta_n \}$ es una sucesión de Cauchy. Sea entonces $\rho \in \tilde{H}$ el límite de la sucesión $\{ \delta_n \}$. Probaremos que

$$e_i \rho = e_i \rho_i \quad \text{para todo} \quad i , \tag{1}$$

con lo cual quedará demostrado el teorema.

Pero *(1)* se deduce de

$$\| e_i \rho + e_i \rho_i \| \leq \| e_i \rho - e_i \delta_n \| + \| e_i \delta_n - e_i \rho_i \| \leq \| \rho - \delta_n \| + \| \lambda_n^{(i)} - \rho_i \|$$

puesto que las dos últimas normas tienden a cero cuando n tiende a infinito. ■

DEFINICIÓN 2. $\tilde{H}$ se denomina el *K-completado* del módulo de Hilbert $\Gamma(\pi)$.

3. OPERADORES ACOTADOS

Sean H y K módulos de Hilbert sobre un álgebra de Stone $C(S)$. Por un *operador acotado* T de H en K se entiende una aplicación continua de H en K que es a su vez un homomorfismo de módulos.

TEOREMA 2. Sea $\Gamma(\pi)$ un módulo de Hilbert sobre un álgebra de Stone $C(S)$ y sea $\tilde{H}$ su K-completado. Si T es un operador acotado de $\Gamma(\pi)$ en un K-módulo de Hilbert H' sobre $C(S)$, existe un único operador acotado S de $\tilde{H}$ en H', tal que su restricción a $\Gamma(\pi)$ coincide con T.

Nótese que, al igual que antes, se está considerando a $\Gamma(\pi)$ como un submódulo de $\tilde{H}$.

Demostración. Sea H_o el módulo pre-Hilbert definido anteriormente. Probaremos primero que el operador T se puede extender a un operador acotado T' de H_o en H' y luego extenderemos T' a un operador acotado S de $\tilde{H}$ en H'.

Sea ρ un elemento de H_o y sea $\{e_i\}$ una familia de proyecciones ortogonales con m.c.s. 1 tal que $e_i\rho \in \Gamma(\pi)$ para todo i, y sea $\lambda_i = T(e_i\rho)$. Puesto que T es un operador acotado la familia $\{\lambda_i\}$ es acotada y como H' es un K-módulo de Hilbert existe un único elemento $\lambda \in H'$ tal que $e_i\lambda_i = e_i\lambda$ para todo i.

Definimos entonces

$$T'(\rho) = \lambda.$$

Ahora, si $\{f_j\}$ es otra familia de proyecciones ortogonales en $C(S)$ con m.c.s. 1 tal que $f_j\rho \in \Gamma(\pi)$ para todo j y λ' es tal que $T(f_j\rho) = f_j T(f_j\rho) = f_j\lambda'$, de

$$e_i f_j(\lambda-\lambda') = f_j(e_i\lambda) - e_i(f_j\lambda') = f_j T(e_i\rho) - e_i T(f_j\rho) = T(e_i f_j\rho - e_i f_j\rho) = 0$$

y de la propiedad (K_o) de los K-módulos se sigue que $\lambda = \lambda'$.

Hemos demostrado que la aplicación T' está bien definida. Por otra parte es claro que $T'(\rho) = T(\rho)$ para todo $\rho \in \Gamma(\pi)$. T' es un homomorfismo de módulos. En efecto, sean $\rho, \lambda \in H_o$ y sean ρ' y λ' sus imágenes por la aplicación T'. Si $\{e_i\}$ y $\{f_j\}$ son proyecciones ortogonales en $C(S)$ con m.c.s. 1 tales que $e_i\rho$ y $f_j\lambda$ están en $\Gamma(\pi)$ para todo i y todo j, entonces $\{e_i f_j\}$ son proyecciones ortogonales con m.c.s. 1 tales que $e_i f_j(\rho+\lambda) \in \Gamma(\pi)$ para todo j.

De la definición de la aplicación T' se sigue entonces que

$$T(e_i f_j(\rho+\lambda)) = e_i f_j T'(\rho+\lambda). \tag{1}$$

Por otra parte

$$T(e_i f_j(\rho+\lambda)) = T(e_i f_j \rho) + T(e_i f_j \lambda) = e_i f_j(\rho' + \lambda'). \tag{2}$$

De (1) y (2) se concluye que

$$T'(\rho+\lambda) = \rho' + \lambda' = T'(\rho) + T'(\lambda).$$

De manera similar, si $f \in C(S)$ puesto que $e_i(f\rho) = f(e_i\rho) \in \Gamma(\pi)$, de las igualdades

$$T(e_i(f\rho)) = fT(e_i\rho) = e_i(f\rho')$$

se sigue que

$$T'(f\rho) = fT'(\rho).$$

Con esto queda probado que T' es un homomorfismo de módulos.

Por último, si M es un número positivo tal que $\|T(\delta)\| \leq M\|\delta\|$ para todo $\delta \in \Gamma(\pi)$, de

$$\| e_i T'(\rho) \| = \| T(e_i \rho) \| \leq M \| e_i \rho \| \leq M \| \rho \|$$

se deduce que la aplicación T' es continua.

Ahora, sea S la aplicación de $\tilde{H}$ en H' definida de la siguiente manera :

Sea ρ un elemento de $\tilde{H}$, y sea $\{\rho_n\}$ una sucesión de elementos de H_o que converge a ρ. Se define entonces

$$S(\rho) = \lim_{n \to \infty} T'(\rho_n)$$

Nótese que el límite de la derecha existe, ya que

$$\| T'(\rho_n) - T'(\rho_m) \| = \| T'(\rho_n - \rho_m) \| \leq M \| \rho_n - \rho_m \|,$$

(donde M es un número positivo tal que $\| T'(\delta) \| \leq M \| \delta \|$ para todo $\delta \in H_o$), y por tanto, $\{ T'(\rho_n) \}$ es una sucesión de Cauchy.

Por otra parte, la definición de la aplicación S no depende de la elección de la sucesión $\{\rho_n\}$. En efecto, si $\{\lambda_n\}$ es otra sucesión en H_o que converge a ρ, entonces

$$\| T'(\lambda_n) - S(\rho) \| \leq \| T'(\lambda_n) - T'(\rho_n) \| + \| T'(\rho_n) - S(\rho) \| \leq M \| \lambda_n - \rho_n \| + \\ + \| T'(\rho_n) - S(\rho) \|,$$

donde las dos últimas normas tienden a cero cuando n tiende a infinito, y esto implica precisamente que

$$\lim_{n \to \infty} T'(\lambda_n) = S(\rho)$$

Que S es un homomorfismo de módulos resulta inmediatamente de las propiedades de los límites.

La aplicación S es continua puesto que

$$\| T'(\rho) \| = \lim_{n\to\infty} \| T'(\rho_n) \| \leq M (\lim_{n\to\infty} \| \rho_n \|) = M \| \rho \| ,$$

donde M es tal que $\| T'(\delta) \| \leq M \| \delta \|$ para todo $\delta \in H_o$, y es claro que S es una extensión de T' y por tanto una extensión de T.

Para terminar con la demostración de este teorema probaremos que la extensión S es única.

En efecto, sea R un operador acotado de $\tilde{H}$ en H' cuya restricción a $\Gamma(\pi)$ coincide con T y sean ρ un elemento de H_o y $\{e_i\}$ proyecciones ortogonales en $C(S)$ con m.c.s. 1 tales que $e_i \rho \in \Gamma(\pi)$ para todo i. Entonces

$$e_i (S(\rho) - R(\rho)) = S(e_i \rho) - R(e_i \rho) = 0$$

para todo i, por tanto $S(\rho) = R(\rho)$.

Hemos demostrado que S y R coinciden en H_o.

Ahora bien, sea ρ un elemento arbitrario de $\tilde{H}$ y sea $\{\rho_n\}$ una sucesión en H_o que converge a ρ, entonces

$$S(\rho_n) = R(\rho_n)$$

para todo número entero positivo n. Haciendo tender n a infinito, de la continuidad de los operadores S y R se sigue que $S(\rho) = R(\rho)$ y en consecuencia $S = R$. ■

Referencias

1. *Hewitt, Edwin y Ross, Keneth, Abstract Harmonic Analysis*, Academic Press Inc., New York, 1963.
2. *Horváth, John, Topological Vector Spaces and Distributions*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1966.
3. *Kaplansky, Irving, Modules over Operators Algebras*, American Journal of Mathematics, 75, (1953), 839-858.

4. *Kaplansky, Irving, Projections in Banach Algebras,* Annals of Mathematics, 53 (1953), 235-249.

5. *Rickart, Charles, Banach Algebras, D. Van Nostrand Company, Inc.,* Princeton New Jersey, 1960 .

Universidad Central del Ecuador
Centro de Matemáticas
Quito, Ecuador, S. A.

y

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas y Estadística
Bogotá, 6 , D. E., Colombia, S. A.

(Recibido en febrero de 1974) .