Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen IX (1975), págs. 173 - 187

CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES DEL PROBLEMA DE FRONTERA

$$(1) \qquad \begin{cases} Lu = g(u(x), x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

por

Alfonso CASTRO

§ 0. *Introducción*. Para efectos de terminología y notaciones el lector puede consultar [2] y [3]. En este artículo Ω denota una región en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$;

$$Lu = \sum_{\substack{|\alpha| = 1 \\ |\beta| = 1}} (-1)^{\alpha} D^{\alpha} a_{\alpha\beta} \cdot D^{\beta} u$$

un operador de segundo orden, uniformemente elíptico, autoadjunto, con coeficientes reales $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega)$, y, finalmente, $g: \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$; $(u, x) \to g(u, x)$ una función continua que admite derivada parcial continua con respecto a u. Cuando g es continua y acotada, y el problema lineal homogéneo asociado a (1),

$$(2) \qquad \begin{cases} (Lu)(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

posee únicamente la solución $u(x) \equiv 0$ en $\overline{\Omega}$, la existencia de soluciones débiles de (1) se puede probar usando el método de Schauder-Léray. El caso en que (2) tiene soluciones no triviales, la existencia de soluciones débiles de (1) es aún un problema abierto ; en [1] Lazer et alter dan condiciones suficientes para la solución de este problema.

§ 1. *Soluciones débiles*. Antes de enunciar el resultado principal de este trabajo queremos precisar la noción de *solución debil.*

Notemos con H el espacio de Sobolev real dado por el completado del espacio real de las funciones de clase C^1 y de soporte compacto contenido en Ω. Recordemos que en H el producto interior $<\,,\,>_1$ está definido por

$$< u, v >_1 = < u, v >_o + \sum_{|\alpha| = 1} < D^\alpha u \,,\, D^\alpha v >_o \,,$$

donde $<\,,\,>_o$ es el producto interior de $\mathfrak{L}^2(\Omega)$. Las normas de H y $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ las notaremos, respectivamente, por $|\ \ |_1$ y $|\ \ |_o$.

Además, la expresión

$$B(u,v) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} < a_{\alpha\beta} D^\alpha u \,,\, D^\alpha v >_o \,, \qquad u\,,\, v \in H\,,$$

define una forma bilineal continua y, por lo tanto, existe una constante real M tal que $|B(u,v)| \leq M\,|u|_1\,|v|_1$, para $u, v \in H$. Dicho lo anterior, para nosotros una *solución débil* de (1) será una función $u \in H$ que satisface la relación

$$B(u, w) = \int_\Omega g(u(\xi), \xi)\, w(\xi)\, d\xi \quad , \qquad \forall\, w \in H$$

También necesitaremos los siguientes hechos básicos acerca de las soluciones débiles del problema espectral $Lu = \lambda u$, $u = 0$ en $\partial\Omega$ (véase [2, lectura 14]) ; en primer lugar, por la desigualdad de Gaarding, existen constantes $C_o > 0$ y $C_1 > 0$ para las cuales se tiene

(3) $$C_1 |u|_1^2 \leq B(u,u) + C_o |u|_o^2 , \qquad \forall\, u \in H .$$

Si B_o es la forma bilineal, acotada y simétrica definida en $H \times H$ por

(4) $$B_o(u,v) = B(u,v) + C_o < u, v >_o .$$

existe un operador lineal acotado $T : \mathcal{L}^2(\Omega) \to H$ tal que, dado $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ entonces $B_o(Tf, v) = < f, v>_o$ para todo $v \in H$. Más aún, si consideramos T como una aplicación $\mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{L}^2(\Omega)$, por composición con la inyección compacta $H \to \mathcal{L}^2(\Omega)$, entonces T es un operador positivo, compacto y autoadjunto. En consecuencia (véase [2, lectura 15]), existe una sucesión de números reales $\{\alpha_n\}_1^\infty$, con α_k positivo para todo k, $\alpha_{k+1} \leq \alpha_k$ y $\lim\limits_k \alpha_k = 0$; y otra sucesión $\{\varphi_k\}_1^\infty$, de elementos de H para la cual $T\varphi_k = \alpha_k \varphi_k$ y $\{\varphi_k\}_1^\infty$, es un sistema ortonormal de $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Por lo tanto, si

$$\lambda_k = \frac{1}{\alpha_k} - C_o .$$

de (4) y $\alpha_k B_o(\varphi_k, v) = < \varphi_k, v >_o$ obtenemos :

$$B(\varphi_k, v) = \lambda_k < \varphi_k, v >_o ,$$

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} ;$$

es claro que $\lim\limits_k \lambda_k = \infty$. Dos relaciones útiles posteriormente son :

(5) $$B\left(\sum_{j=1}^\infty C_j \varphi_j , \sum_{j=1}^\infty C_j \varphi_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j C_j^2$$

$$(6) \qquad \Big| \sum_{j=1}^{\infty} C_j \varphi_j \Big|_o^2 = \sum_{j=1}^{\infty} C_j^2$$

§ 2. *Enunciado y demostración del resultado principal.* Nuestro objetivo en esta sección es probar el siguiente teorema :

TEOREMA 1 : Si existen un entero positivo N *y números reales* μ_o, μ_1 *y* C *tales que*

$$(7) \qquad \mu_1 < \lambda_{N+1} \quad , \quad \lambda_N < \mu_o$$

$$(8) \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(u, x) \leq \mu_1 \quad \textit{para todo} \quad u \in \mathbb{R} \quad \textit{y todo} \quad x \in \Omega \, , \; \textit{y}$$

$$(9) \qquad 2G(u, x) = 2\int_o^u g(s, x)\, ds \geq \mu_o u^2 - C \quad \textit{para todo} \quad u \in \mathbb{R} \quad \textit{y} \quad x \in \overline{\Omega} \quad ,$$

entonces el sistema (1) tiene por lo menos una solución débil.

En primer lugar demostraremos que en el teorema 1 podemos suponer que todos los valores propios de L son positivos. En efecto, en caso contrario, es posible encontrar $\gamma \in \mathbb{R}$ en tal forma que $\tilde{L} = L + \gamma$ tenga todos sus valores propios positivos ; más aún, es claro que los valores propios de $\tilde{L}$ son de la forma $\lambda_n + \gamma$ donde λ_n es un valor propio de L . Veamos ahora que si (1) satisface las condiciones del teorema 1, el sistema

$$(10) \qquad \begin{cases} \tilde{L}(u) = Lu + \gamma u = g(u, x) + \gamma u \\[2ex] u = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

también las satisface. En efecto, se tiene

$$\mu_1 + \gamma < \lambda_{N+1} + \gamma \quad ; \quad \lambda_N + \gamma < \mu_o + \gamma \quad ;$$

$$\frac{\partial\,(g(u,x)+\gamma u)}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u}(u,x) + \gamma \leq \mu_1 + \gamma \;;$$

$$2\int_o^u (g(s,x)+\gamma s)\, ds = 2\int_o^u g(s,x)\, ds + \gamma u^2 \geq (\mu_o + \gamma)\, u^2 - C \;.$$

Es decir, para el sistema (10) las constantes $\mu_o + \gamma$ y $\mu_1 + \gamma$ juegan los papeles de μ_o y μ_1. Ahora, si u_o satisface (10) claramente se ve que satisface (1). Es decir, basta demostrar el teorema 1 suponiendo que todos los valores propios de L son positivos.

La prueba del teorema 1 la haremos a través de varios lemas que, de una parte, facilitan la lectura de ésta y, de otra, ponen de manifiesto algunas propiedades del operador $J : H \to \mathbb{R}$, definido por

$$(11) \qquad J(u) = B(u,u) - 2\int_\Omega G\,(u(\xi), \xi)\, d\xi$$

LEMA 1: J es derivable en el sentido de Fréchet (véase [3, pg. 116]) *el gradiente de J es continuo y*

$$(12) \qquad \langle \nabla J(u),\, w \rangle_1 = 2\,B\,(u,w) - 2\int_\Omega g(u(\xi), \xi)\, w(\xi)\, d\xi$$

para todo $u \in H$, $w \in H$. En particular, u es una solución débil de (1) si, y solamente si, $\nabla J(u) = 0$.

Demostración: **Sean $u, w \in H$. Entonces**

$$(13) \qquad \lim_{t\to o+} \frac{B(u+tw,\, u+tw) - B(u,w)}{t} = \lim_{t\to o+} 2B(u\,w) + t\,B(w,w) = 2\,B(u,w)\;.$$

$$(14) \qquad \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\int_{\Omega} (G(u(\xi)+tw(\xi),\xi) - G(u(\xi),\xi))\,d\xi =$$

$$= \lim_{t\to 0+}\int_{\Omega}\left(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial u}(u(\xi)+stw(\xi),\xi)\,ds\right)w(\xi)\,d\xi = \int_{\Omega} g(u(\xi),\xi)w(\xi)\,d\xi$$

De (13) y (14) síguese que

$$(15) \quad \lim_{t\to 0+} \frac{J(u+tw)-J(u)}{t} = 2\left(B(u,w) - \int_{\Omega} g(u(\xi),\xi)\,w(\xi)\,d\xi\right)$$

Por otra parte,

$$(16) \quad \left|B(u,w) - \int_{\Omega} g(u(\xi),\xi)\,w(\xi)\,d\xi\right| \le M|u|_1|v|_1 + K(\text{medida }\Omega)^{\frac{1}{2}}\cdot|w|_0$$

$$\le (M|u|_1 + K(\text{medida }(\Omega))^{\frac{1}{2}})\,|w|_1 \,.$$

Luego, para cada u, la expresión $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{J(u+tw)-J(u)}{t}$ define un operador lineal continuo y, por lo tanto, J es derivable en el sentido de Gateaux (véase [3, pg. 117]).

Veamos que ∇J es continuo: en efecto, sean $u_1, u_2 \in H$; entonces

$$\langle \nabla J(u_1) - \nabla J(u_2), w\rangle = 2B(u_1-u_2, w) - 2\int_{\Omega} (g(u_1(\xi),\xi) - g(u_2(\xi),\xi))w(\xi)\,d\xi$$

$$\le 2M|u_1-u_2|_1|w|_1 + 2\int_{\Omega}\left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u}(u_1(\xi)+s(u_2(\xi)-u_1(\xi)),\xi)\,ds\right)(u_2(\xi)-u_1(\xi))w(\xi)\,d\xi$$

$$\le 2M|u_1-u_2|_1|w|_1 + 2\mu_1|u_2-u_1|_0|w|_0 \le 2(M+\mu_1)|u_1-u_2|_1|w|_1$$

Lo anterior muestra que ∇J es continuo y, por consiguiente J es derivable en el sentido de Fréchet. ‖

Para cada $u \in H$ consideremos ahora el operador $B_u : H \times H \to \mathbb{R}$, definido por

$$B_u(v,w) = B(v,w) - \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial u}(u(\xi), \xi)\, v(\xi)\, w(\xi)\, d\xi \ ;$$

dado que B y $\frac{\partial g}{\partial u}$ son continuos, B_u es continuo ; luego existe un operador lineal, continuo $A_u : H \to H$ tal que

$$B_u(v, w) = < A_u v, \ w >_1$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos para el u dado, la siguiente relación

$$< \frac{J(u+sv) - J(u)}{s} - Av, w >_1 = \varepsilon(s) \, |w|_o^2 \leq \varepsilon(s) \, |w|_1^2 \ , \qquad (w \in H)$$

donde

$$\varepsilon(s) = \left(\int_\Omega \left(\int_o^1 \{ \frac{\partial g}{\partial u}(u(\xi), \xi) - \frac{\partial g}{\partial u}(u(\xi) + s\tau v(\xi), \xi) \} d\tau \right)^2 v^2(\xi)\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora bien, dado que $\partial g / \partial u$ es continua, $\varepsilon(s) \to 0$ si $s \to 0$; como $w \in H$ era arbitrario, síguese finalmente que

$$(\nabla J)'(u) = A_u$$

o sea,

$$< D^2 J(u)\, w, w >_1 = < A_u w, w >_1 = B_u(w, w) \ .$$

O, equivalentemente,

$$(17) \quad < D^2 J(u) w, w >_1 = 2\, B(w, w) - 2 \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial u}(u(\xi), \xi)\, w^2(\xi)\, d\xi \ ,$$

donde D^2J es el Hessiano de J (véase [3, pg. 131]). Dado que $\partial g/\partial u$ y B son continuas, resulta que D^2J es continuo, es decir, hemos demostrado

LEMA 2 : $D^2 J$ *es continuo .*

Consideremos ahora el subespacio cerrado Y de H generado por el conjunto $\{\varphi_{N+1}, \varphi_{N+2}, \ldots\}$ y sea $X = Y^{\perp}$ el ortogonal de Y; en esta forma X coincide con el subespacio lineal generado por $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$.

Para cada $x \in X$, sea $J_x : H \to \mathbb{R}$ dada por $J_x(y) = J(x+y)$. Si notamos con P la proyección de H en Y, con P^* su adjunta, $P^* : Y \to H$, de la definición de J_x resulta que $\nabla J_x(y) = P^*(\nabla J(x+y))$.

Sea $w \in Y$; en $\mathcal{L}^2(\Omega)$ podemos escribirlo bajo la forma $w = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$, con $c_k \in \mathbb{R}$. Sea C la constante que aparece en (9) tomando η_o lo suficientemente grande para que se tenga $\eta_o(\lambda_{N+1} - \mu_1) > C + \lambda_{N+1}$, y usando la desigualdad de Gaarding, obtenemos, para $w \in Y$,

$$\begin{aligned}
\langle D^2 J_x(y)w, w\rangle_1 &= 2\left(B(w,w) - \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial u}(y(\xi),\xi)\, w^2(\xi)\, d\xi\right)\\
&= 2\left(\frac{1}{\eta_o} B(w,w) + \frac{\eta_o - 1}{\eta_o} B(w,w) - \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial u}(y(\xi),\xi)\, w^2(\xi)\, d\xi\right)\\
&\geq 2\left(\frac{C_1}{\eta_o}|w|_1^2 - \frac{C_o}{\eta_o}|w|_o^2 + \frac{\eta_o - 1}{\eta_o}\cdot \lambda_{N+1}|w|_o^2 - \mu_1 |w|_o^2\right)
\end{aligned}$$

donde hemos usado (3), (6) y (8) en este orden. Luego

$$\langle D^2 J_x(y)w, w\rangle_1 \geq \frac{2C_1}{\eta_o}|w|_1^2 + 2\left(\frac{\eta_o(\lambda_{N+1} - \mu_1) - \lambda_{N+1} - C_o}{\eta_o}\right)|w|_o^2$$

y, por la escogencia de η_o, tenemos

$$(18) \qquad < D^2 J_x(y)\, w, w >_1 \geq \frac{2\, C_1}{\eta_o} |w|_1^2 .$$

De (18) síguese que J_x es de clase C^2 y estrictamente convexo, y, por lo tanto, la existencia de un único $y \in Y$ tal que

$$(19) \qquad \nabla J_x(y) = 0 \ ;$$

denotemos a este único y por $\theta(x)$; por otra parte, es bien sabido que

$$J_x(\theta(x)) < J_x(y) \quad \text{para} \quad \theta(x) \neq y \in Y .$$

Como (19) es equivalente a

$$(20) \qquad <\nabla J_x(y), w>_1 = 0 , \quad \text{para todo} \quad w \in Y ,$$

si definimos $F : X \times Y \to Imagen\ P^*$ por $(x,y) \to P^*(\nabla J(x+y))$ entonces

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)(w) = \lim_{t \to o+} \frac{F(x,y)+tw) - F(x,y)}{t} = P^*\left(\lim_{t \to o+} \frac{\nabla J(x+y+tw) - \nabla J(x+y)}{t}\right).$$

Por lo tanto,

$$(21) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)(w) = P^*((D^2 J(x+y))(w)).$$

LEMA 3: Para todo $x_o \in X$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, \theta(x_o))$ *es uno a uno, sobre y su imagen es cerrada.*

Demostración: Tomemos $w \in Y$ tal que se tenga $\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, \theta(x_o))\, w = 0$; por (21) entonces $P^*(D^2 J(x_o + \theta(x_o)w)) = 0$; luego

$$(22) \qquad < P^* (D^2 J(x_o + \theta(x_o)) w), w >_1 = 0 \ ;$$

de (22) y (18) obtenemos

$$0 = < D^2 J(x_o + \theta(x_o)) w, w >_1 \geq \frac{2 C_1}{\eta_o} | w |_1^2 \ ,$$

de donde resulta que $w = 0$; de modo que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, \theta(x_o))$ es uno a uno.

Veamos ahora que la imagen de $\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, \theta(x_o))$ es cerrada. De (18) obtenemos que, para todo $w \in Y$,

$$(23) \qquad \frac{2 C_1}{\eta_o} | w |_1 \leq \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x_o + \theta(x_o)) w \right|_1 .$$

Si $\{ z_n \}_1^\infty$ es una sucesión en la imagen de $\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, \theta(x_o))$ y $\{ z_n \}_1^\infty$ converge a z_o, entonces $z_n = \frac{\partial F}{\partial y}(x_o + \theta(x_o)) w_n$ para algún $w_n \in Y$; luego de (23), para i, j enteros positivos, se tiene

$$(24) \qquad \frac{2 C_1}{\eta_o} | w_i - w_j |_1 \leq \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x_o + \theta(x_o)) w_i - \frac{\partial F}{\partial y}(x_o, \theta(x_o)) w_j \right|_1 = | z_i - z_j |_1$$

Como $\{ z_n \}_1^\infty$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{ w_n \}_1^\infty$ es también una sucesión de Cauchy, en virtud de (24) ; como Y es cerrado, $w_o = \lim_{n \to \infty} w_n \in Y$ implica que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, \theta(x_o)) w_o = \lim_{n \to \infty} \frac{\partial F}{\partial y}(x_o, \theta(x_o)) w_n = \lim_{n \to \infty} z_n = z_o \ ,$$

luego z_o está en la imagen de $\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, \theta(x_o))$, tal como queríamos mostrar.

Supongamos finalmente que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, \theta(x_o))$ no es sobre ; entonces existe $z \in Imagen\ P^*$, $z \neq 0$ y ortogonal a la imagen de $\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, \theta(x_o))$; es decir:

$$< \frac{\partial F}{\partial y}(x_o, \theta(x_o))w, z>_1 = 0 \quad , \qquad \forall\, w \in Y .$$

luego $\quad < P^*(D^2J(x_o + \theta(x_o))w), z>_1 = 0$, **o sea,**

$$< D^2J(x_o + \theta(x_o))w), P(z)>_1 = 0 \;;$$

en particular, para $w = Pz$, **tenemos**

$$0 = < D^2J(x_o + \theta(x_o))P(z), Pz> \geq \frac{2C_1}{\eta_o}|P(z)|_1^2$$

y, en consecuencia, $Pz = 0$. **Pero como**

$$|z|_1^2 = < z, z>_1 = < z, P^* z>_1 = < Pz, z>_1 = 0 ,$$

contradecimos que $z \neq 0$. **Luego** $\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, \theta(x_o))$ **es sobre.**

La información suministrada por el lema 3, el hecho de que $F(x_o, \theta(x_o)) = 0$ **, la relación (21) y el teorema de la función implícita, garantizan la existencia de una vecindad** V **de** x_o **en** X **y de una función inyectiva** $\varphi : V \to Y$ **, de clase** C^1 **, con inversa diferenciable, tal que** $F(x, \varphi(x)) = 0$ **para todo** $x \in V$ **; además, si** $x \in V$ **y** $F(x,y) = 0$ **, entonces** $y = \varphi(x)$ **. Como** $F(x, \theta(x)) = 0$, **se tiene** $\theta(x) = \varphi(x)$ **, luego** θ **y** φ **coinciden en** V **; en particular,** θ **es diferenciable en** x_o, **y esto para cualquier** $x_o \in X$ **. Es decir, tenemos :**

LEMA 4 : Existe una función $\theta : X \to Y$ *de clase* C^1 *tal que* $\nabla J_x(\theta(x)) = 0$*; además* $J_x(\theta(x)) < J_x(y)$ *para* $y \in Y$, $y \neq \theta(x)$.

Sea $\tilde{J} : X \to \mathbb{R}$ **, definida por** $\tilde{J}(x) = J(x + \theta(x))$ **; como** $J(x + \theta(x)) \leq J(x)$.

para probar que $\lim\limits_{|x|_1 \to \infty} J(x) = -\infty$ es suficiente probar que $\lim\limits_{\substack{|x| \to \infty \\ x \in X}} J(x) = -\infty$. Verifiquemos éste último hecho: para $x \in X$, $x = \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k$ se tiene

$$J(x) = B(x, x) - 2 \int_{\Omega} G(x(\xi), \xi)\, d\xi$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k^2 - \mu_o \int_{\Omega} (x^2(\xi) - C)\, d\xi$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k^2 - \mu_o \sum_{k=1}^{N} c_k^2 + \mu_o C \ (\mathit{medida}\ \Omega)$$

$$\leq (\lambda_N - \mu_o) |x|_o^2 + \mu_o C \ (\mathit{medida}\ \Omega)$$

Como X es de dimensión finita, existe una constante $K_1 > 0$ tal que para todo $x \in X$, $K_1 |x|_1 \leq |x|_o$. De aquí resulta que

$$J(x) \leq K_1 (\lambda_N - \mu_o) |x|_1^2 + \mu_o C \ (\mathit{medida}\ \Omega)\ ; \tag{25}$$

como por (7), $\lambda_N - \mu_o < 0$, de (25) tenemos

$$\lim_{\substack{|x|_1 \to \infty \\ x \in X}} J(x) = -\infty,$$

y, en virtud de lo anteriormente dicho,

$$\lim_{|x|_1 \to \infty} J(x) = -\infty. \tag{26}$$

LEMA 5 : $\tilde{J}$ *tiene por lo menos un punto crítico, el cual, además, podemos escoger en forma tal que* $\tilde{J}$ *tome allí su máximo global.*

Demostración : De (26) resulta la existencia de un $R > 0$ tal que $|x|_1 > R$

implica que

$$(27) \qquad J(x) < J(0) - 1 \;;$$

como la bola cerrada en X, de centro 0 y radio R, es compacta, existe $\bar{x} \in X$ tal que $|\bar{x}|_1 \leq R$ y $J(\bar{x}) \geq J(x)$, para todo $x \in X$, con $|x|_1 \leq R$. Entonces (27) nos dice que $\tilde{J}$ toma su máximo valor en $\bar{x}$; en particular, $\nabla \tilde{J}(\bar{x}) = 0$.

Demostración del teorema 1: Para $h \in X$ tenemos

$$0 = \tilde{J}'(\bar{x}) \cdot h = < \nabla J(\bar{x} + \theta(\bar{x})),\ h + \theta'(\bar{x})\, h >_1 \;;$$

como $\theta'(\bar{x})\, h \in Y$, entonces por (20) resulta que

$$(28) \qquad 0 = < \nabla J(\bar{x} + \theta(\bar{x})),\ \theta'(\bar{x})\, h >_1 \;.$$

Sabemos que cada $w \in H$ puede escribirse como $w = h + h'$, donde $h \in X$ y $h' \in Y$; de modo que

$$(29) \quad < \nabla J(\bar{x} + \theta(\bar{x})),\ w >_1 = < \nabla J(\bar{x} + \theta(\bar{x})),\ h >_1 + < \nabla J(\bar{x} + \theta(\bar{x})),\ h' >_1$$

Usando la relación (27), tenemos que en (29) el primer sumando de la derecha es 0 y en virtud de (20) el segundo también es 0; luego para todo $w \in H$

$$< \nabla J(\bar{x} + \theta(\bar{x})),\ w >_1 = 0 \,,$$

es decir,

$$\nabla J(\bar{x} + \theta(\bar{x})) = 0 \;;$$

luego, por el lema 1, $\bar{x} + \theta(\bar{x})$ es una solución débil de (1). Esto concluye la prueba del teorema 1.

La conclusión del teorema 1 se puede deducir también, cambiando las hipótesis

(8) y (9), por las siguientes, respectivamente,

$$(8') \qquad \mu_o \leq \frac{\partial g}{\partial u} (u, x)$$

y

$$(9') \qquad 2\, G(u, x) \leq \mu_{N+1} u^2 + C \quad ;$$

en este caso, cada J_x tiene un único máximo en Y, de modo que la construcción de la aplicación θ en nada se altera. En esta instancia, $\tilde{f}(x) \to \infty$ cuando $|x|_1 \to \infty$ lo cual también garantiza la existencia del punto crítico $\bar{x}$, el cual en este caso produce un mínimo.

Las condiciones (8) y (9), así como también las (8') y (9') son claramente más débiles que éstas.

$$(30) \qquad \mu_o \leq \frac{\partial g}{\partial u} (u, x) \leq \mu_1$$

Bajo la hipótesis (30), obviamente se tiene el resultado del teorema 1, pero además es posible probar la unicidad de la solución del sistema (1), algo que no está garantizado por el teorema 1.

Finalmente, debo expresar mis agradecimientos al profesor Alan Lazer quien no sólo conjeturó el resultado de este artículo sino que también sugirió valiosas ideas conducentes a la solución del problema.

Bibliografía

1. *Ambad, S., Lazer, A. and Paul J.: Elementary critical point theory and perturbations of elliptic boundary value problem at resonance.* Aparecerá en Indiana Journal of Mathematics (1975).

2. *Fichera, G. : Linear elliptic differential systems and eigen-value problems*. Springer-Verlag, New York (1965).

3. *Goldstein, A. : Constructive real analysis.* Harper & Row, New York (1967).

Department of Mathematical Sciences
University of Cincinnati
Cincinnati, Ohio, 45221

(Recibido en junio de 1975)