Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen X (1976), págs. 1 - 37

TEOREMA Y FUNCIONES DE MULTIPLICIDAD ESPECTRAL

por

Klaus KALB

Dedicado al profesor Henri Yerly

1. Introducción. En los últimos años se utiliza preferiblemente en la introducción a la teoría espectral para un operador autoadjunto T en un espacio de Hilbert separable (ver [4], [6], [8], [12], [15]) la forma de operador de multiplicación del teorema espectral (que esencialmente fue desarrollada en el libro [16] de M. H. Stone) y no la formulación clásica con la medida espectral $(T=\int\lambda\, dE(\lambda))$; conforme a eso se dan demostraciones para ella que no usan la existencia de la medida espectral (sino que la implican). La razón matemática para este cambio es sobre todo la búsqueda de una mayor analogía con el caso de dimensión finita (ver [6]); las razones físicas son la mayor utilidad de la forma de operador de multiplicación para cálculos prácticos (ver [8]) y la posibilidad de usarla como substituto para el postulado de expansión (ver [3]), o bien como punto de partida para precisar este postulado en la teoría de desarrollos en funciones propias generalizadas (ver [7], [9]). Como desventaja se considera frecuentemente la arbitrariedad posible en la selección de las medidas que definen el espacio de representación, aunque este problema esté resuelto desde hace tiempo en la llamada teoría de la multiplicidad espectral (ver [16], [18], [11], [17], [5], [2], [10] y otros) mediante una canonización de la escogencia de estas medidas ("representación espectral canónica"). Pero esta teoría generalmente se considera como muy profunda. Otra complicación nace de las formulaciones aparentemente muy diferentes que los artículos anteriormente mencionados hacen del resultado central, a saber, el llamado "teorema de multiplicidad espectral", que puede ser considerado como una exposición más precisa de la forma del operador de multiplicación del teorema espectral, que satisface completamente las exigencias de unicidad.

La meta de la primera parte del presente artículo es exponer la equivalencia de diferentes formulaciones del teorema de multiplicidad espectral. Se trata, en primer lugar, de una versión parecida a la de [5], que probablemente tiene una mayor analogía con el caso de dimensión finita, y se da para ella una demostración sencilla, que se basa directamente en la forma del operador de multiplicación del teorema espectral y que fuera de los teoremas de Radon-Nikodym y Lusin usa sólo argumentos elementales de la teoría de la medida e integración. El énfasis reposa en una transición de una representación espectral común a la forma canónica, particularmente, en una determinación sencilla de los "conjuntos de multiplicidad". En esta primera parte no pensamos en una presentación de nuevos resultados y aún menos de métodos nuevos de demostración; más bien se trata de mostrar, por medio de una presentación autónoma de la teoría de multiplicidad, que se puede leer sin conocimientos especiales; *cómo* la representación espectral no canónica contiene ya toda la información sobre el operador que es relevante para la teoría de multiplicidad. Esto muestra una ventaja más de la forma del operador de multiplicación del teorema espectral sobre la forma clásica.

En la segunda parte de este trabajo, se describe primero de qué manera a cada una de las formas diferentes del teorema de multiplicidad le corresponde una "función de multiplicidad espectral", que está definida en $\mathbb{R}$ y toma valores en $\mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. En el caso de dimensión finita estas funciones se reducen a la función $v_e : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, que asocia a un número real la dimensión del espacio propio correspondiente a T. Ahora, el objetivo será comparar estas funciones entre sí, examinar en qué medida determinan el operador (salvo equivalencia unitaria), y tratar de describirlas independientemente de la forma del teorema de multiplicidad usada para la definición.

En todas las partes de este trabajo, las afirmaciones y demostraciones se presentan de tal manera que siempre es reconocible la forma en que ellas se pueden transferir al caso de una C^*-álgebra conmutativa unitaria de operadores acotados sobre H, si se parte de la forma del operador de multiplicación del teorema espectral para estas álgebras.

2. *Notaciones y preliminares.* La σ-álgebra de los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$ se denota por $\mathcal{B}$; las funciones medibles en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ se llaman funciones de Borel; una medida de Borel en $\mathbb{R}$ es una medida positiva sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ con $\mu(K) < \infty$, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$. La integral de una función $f \in L(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ sobre $\mathbb{R}$ se denota por $\int f(\lambda)\, d\mu(\lambda)$; la integral sobre un conjunto b por $\int_b f(\lambda)\, d\mu(\lambda)$. Escribimos $L^2(\mu) := L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$. Si $e \in \mathcal{B}$, entonces μ_e denota la medida de Borel en $\mathbb{R}$ definida por $\mu_e(b) = \mu(b \cap e)$ $(b \in \mathcal{B})$. Defi -

nimos $L^2(e,\mu) := L^2(e, e\cap \mathcal{B}, \mu|_{e\cap\mathcal{B}})$. $L^2(e,\mu)$ es isométricamente isomorfo a $L^2(\mu_e)$ de manera natural. Si $e, e' \in \mathcal{B}$, entonces escribimos $e=e'(\mu\text{-}a.e.)$ en $\mathbb{R}$, si $\mu(e\,\Delta\, e') = 0$ donde $e\,\Delta\, e' = (e-e')\cup(e'-e)$. La singularidad de dos medidas de Borel μ, ν y la continuidad absoluta de μ con respecto a ν (denotada por $\mu < \nu$) y la equivalencia de μ y ν (denotada por $\mu \sim \nu$) se definen como de costumbre (ver por ejemplo [13]). Un papel central lo juega el teorema de Radon-Nikodym, que dice que para μ finito con $\mu < \nu$ existe una función $\varphi \geq 0$ integrable respecto a ν y unívocamente determinada (ν-$a.e.$) en $\mathbb{R}$, con $\mu(b) = \int_b \varphi(\lambda)\, d\nu(\lambda)$ para todo $b \in \mathcal{B}$. Como de costumbre denotamos $\frac{d\mu}{d\nu} := \varphi$. El soporte de una medida de Borel μ se denota por $supp(\mu)$. Usaremos varias veces que para $\mu < \nu$ con $e := \{\lambda : \frac{d\mu}{d\nu}(\lambda) > 0\}$ vale

$$(2.1) \qquad supp(\mu) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \nu((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)\cap e) > 0 \quad \text{para todo} \quad \varepsilon > 0\}.$$

Esto vale, en particular si $\mu = \nu_e$. Si (K_n) es una sucesión de espacios de Hilbert, entonces $\oplus_n K_n$ denota el espacio de Hilbert de todas las sucesiones $(x_n) \in \prod_n K_n$ con $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$, dotado del producto escalar

$$(x,y) = \sum_n (x_n, y_n)_{K_n} \quad \text{para} \quad x = (x_n),\ y = (y_n).$$

Sea ahora H un espacio de Hilbert separable sobre $\mathbb{C}$, $T : H \supset D_T \to H$ un operador autoadjunto. Muchas descripciones modernas presentan el teorema espectral para T en la forma siguiente (ver, por ejemplo, [2], p. 1209 ; [12], [13]):

TEOREMA S : Existe una sucesión (ρ_m) *de medidas de Borel finitas en*

$\mathbb{R}$ y una aplicación unitaria

$$(S.1) \qquad U : H \to \hat{H} = \bigoplus_{1 \le m < \infty} L^2(\rho_m)$$

tal que para el operador correspondiente a T en $\hat{H}$, $\hat{T} = UTU^{-1}$ (con dominio $D_{\hat{T}} = UD_T$) vale :

$$(S.2) \qquad D_{\hat{T}} = \{ \hat{x} = [\hat{x}_m(\cdot)] : \sum_{1 \le m < \infty} \int |\lambda^2| \hat{x}_m(\lambda)|^2 d\rho_m(\lambda) < \infty \}$$

$$(S.3) \qquad [\hat{T}\hat{x}]_m(\lambda) = \lambda \cdot \hat{x}_m(\lambda) \quad \rho_m - a.e. \quad en\ \mathbb{R}, \quad 1 \le m < \infty$$

(para todo $\hat{x} = [\hat{x}_m(\cdot)] \in D_{\hat{T}}$).

U se llama una representación espectral (ordinaria o común) de T. Ella convierte a T en el operador de multiplicación (con la función $\lambda \mapsto \lambda$) en $\hat{H}$. Se dice que T tiene una multiplicidad total $\le N$, si existe una representación espectral U, para la cual todos los ρ_m son iguales a cero, salvo N excepciones posibles. Si $N = 1$, T se llama cíclico (o operador con espectro simple). Esto se cumple si, y sólo si, existe un vector $x \in D_{T^\infty} := \bigcap_{1 \le n < \infty} D_{T^n}$ tal que la envolvente lineal de los $T^n x$, $1 < n < \infty$, sea densa en H. La demostración del teorema S siempre se reduce a este caso.

Finalmente sea $\mathfrak{T}$ una C^*-álgebra comutativa unitaria de operadores acotados sobre H, sea Λ el espectro de $\mathfrak{T}$ (es decir el conjunto de los homomorfismos de $\mathfrak{T}$ sobre C); las transformadas de Gelfand de los $T \in \mathfrak{T}$ se denotan por $T(.)$. Entonces vale:

TEOREMA S': Existe una sucesión (ρ_m) de medidas de Borel finitas sobre

Λ *y una aplicación unitaria*

$$U : H \to \hat{H} = \bigoplus_{1 \leq m < \infty} L^2(\rho_m) \quad .$$

tal que los operadores $T \in \mathfrak{T}$ *se convierten en los operadores de multiplicación con* $T(\cdot)$ *en* $\hat{H}$ *: Para* $\hat{T} = UTU^{-1}$ *vale*

$$[\hat{T}\hat{x}]_m(\lambda) = T(\lambda) \cdot \hat{x}_m(\lambda) \; (\rho_m\text{-}a.e.) \quad en \; \mathbb{R}, \quad 1 \leq m < \infty$$

(para todo $\hat{x} = [x_m(\cdot)] \in \hat{H}$ *)*.

Para demostrar este teorema se puede partir, por ejemplo, del teorema 12.22 en [14] (pág. 306) y aplicar a éste el método de transición del teorema espectral clásico para un operador autoadjunto al teorema S (ver [1] en el caso cíclico); naturalmente se puede también proceder directamente modificando las pruebas más recientes del teorema S.

En lo que sigue queremos estudiar la teoría de multiplicidad para un solo operador autoadjunto (posiblemente no acotado), partiendo del teorema S. Como ya se dijo en la introducción, una aplicación de nuestros métodos al teorema S' conduce a una discusión correspondiente de la teoría de multiplicidad de $\mathfrak{T}$. Sólo hay que hacer ciertas modificaciones si se transfieren las afirmaciones sobre sistemas completos de invariantes unitarios, ya que el espacio básico Λ depende de $\mathfrak{T}$.

3. *Versiones diferentes del teorema de multiplicidad espectral.* Para reducir considerablemente la arbitrariedad de la selección de la sucesión de medidas (ρ_m), la cual existe en el teorema S, se debe hacer una 'selección canónica' de estas

medidas. Mediante ésta, las medidas se determinan salvo equivalencia, en forma tal que a T se asocia una sucesión única de clases de equivalencia de medidas. Esta sucesión determina el operador salvo equivalencia unitaria. La diferencia entre las distintas versiones del teorema de multiplicidad espectral consiste en una determinación diferente de esta "selección canónica".

Una primera tal posibilidad ya se encuentra implícitamente en los trabajos de E. Hellinger (1909) y H. Hahn (1912) sobre invariantes unitarias de formas cuadráticas de un número infinito de variables ; se formuló para el caso abstracto de un operador autoadjunto arbitrario por M.H. Stone ([*16*]), *p. 258*); F. Wecken [*18*] eliminó la separación un poco complicada entre el espectro contínuo y el puntual:

TEOREMA M.1 : a) Existe una sucesión $\mu_1 > \mu_2 > \cdots$ *de medidas de Borel finitas sobre* $\mathbb{R}$ *y una aplicación unitaria*

$$U_1 : H \to \hat{H}_1 = \bigoplus_{1 \leq m < \infty} L^2(\mu_m) \qquad \text{(M.1.1)}$$

tal que $\hat{T}_1 = U_1 T U_1^{-1}$ *es el operador de multiplicación en* $\hat{H}_1$, *es decir, valen las ecuaciones (M.1.2), (M.1.3) que corresponden a (S.2), (S.3).* U_1 *se llama una representación espectral canónica de* T.

b) Para toda otra representación espectral canónica de T *con la sucesión* $\mu'_1 > \mu'_2 > \cdots$ *vale* $\mu_m \sim \mu'_m$ *para* $1 \leq m < \infty$.

c) Si se tienen dos operadores T, T' *con las sucesiones correspondientes* $\mu_1 > \mu_2 > \cdots$, $\mu'_1 > \mu'_2 > \cdots$, *entonces* T *es unitariamente equivalente a* T', *si, y sólo si,* $\mu_m \sim \mu'_m$ *para* $1 \leq m < \infty$.

Dunford-Schwartz (ver [2], thm. 10, p. 916) expresan esa selección canónica de la manera siguiente :

TEOREMA M.2 : a) Existen una medida de Borel finita μ sobre $\mathbb{R}$, conjuntos de Borel $\mathbb{R} = e_1 \supset e_2 \supset \dots$ y una aplicación unitaria

$$(M.2.1) \qquad U_2 : H \to \hat{H}_2 = \bigoplus_{1 \leq m < \infty} L^2(e_m, \mu) ,$$

tal que $\hat{T}_2 = U_2 T U_2^{-1}$ *es el operador de multiplicación en* $\hat{H}_2$:

$$(M.2.2) \qquad D_{\hat{T}_2} = \{ \hat{x} = [\hat{x}_m(\cdot)] : \sum_{1 \leq m < \infty} \int_{e_m} \lambda^2 | \hat{x}_m(\lambda) |^2 d\mu(\lambda) < \infty \}$$

$$(M.2.3) \qquad [\hat{T}\hat{x}]_m(\lambda) = \lambda \cdot \hat{x}_m(\lambda) \ (\mu\text{-}a.e) \quad en \quad e_m , \quad 1 \leq m < \infty$$

$$(\text{ para todo } \hat{x} = [\hat{x}_m(\cdot)] \in D_{\hat{T}}).$$

Una tal representación espectral de T se llama representación espectral ordenada de T.

b) Para toda otra representación espectral ordenada de T con la medida μ' y los conjuntos de multiplicidad $\mathbb{R} = e'_1 \supset e'_2 \supset \dots$ vale $\mu \cdot \mu'$, $e_m = e'_m$ (μ-a.e.) en $\mathbb{R}$ para $1 \leq m < \infty$.

c) Estas condiciones caracterizan también la equivalencia unitaria.

Nelson [10] presenta una teoría de multiplicidad para C^*-álgebras conmutativas de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert no necesariamente separable. Su teorema espectral, en el caso especial que estamos estudiando, dice (ver [10], thm. 12, p. 96) :

TEOREMA M.3 : a) Existe una medida de Borel finita ν sobre $\mathbb{R}$, una suce-

sión $d_1, d_2, \ldots, d_\infty$ *de conjuntos de Borel disjuntos que recubren a* $\mathbb{R}$ *y una aplicación unitaria*

$$(\mathrm{M.3.1}) \qquad U_3 : H \to \hat{H}_3 = \bigoplus_{1 \leq n \leq \infty} n \,.\, L^2(d_n, \nu),$$

que convierte el operador T *en el operador de multiplicación en* $\hat{H}_3$.

b) Si se tiene otra tal representación espectral de T *con la medida de Borel* ν' *y los conjuntos* $d'_1, d'_2, \ldots, d'_\infty$*, entonces vale* $\nu \sim \nu'$, $d_n = d'_n$ $(\nu\text{-a.e.})$ *en* $\mathbb{R}$ *para* $1 \leq n \leq \infty$.

c) Estas condiciones caracterizan también la equivalencia unitaria.

Aquí se define

$$n \,.\, L^2(d_n, \nu) = \bigoplus_{1 \leq j \leq n} L^2(d_n, \nu),$$

$$\infty \cdot L^2(d_n, \nu) = \bigoplus_{1 \leq j < \infty} L^2(d_n, \nu) .$$

Se ve inmediatamente, que el teorema M.3 sólo es otra manera de escribir el teorema M.2. En la afirmación de existencia, por ejemplo, se puede tomar en ambos teoremas la misma medida $\mu = \nu$. En la transición de M.2 a M.3 se define $d_n = e_n - e_{n+1}$ para $1 \leq n < \infty$, $d_\infty = \bigcap_{1 \leq m < \infty} e_m$; entonces $\hat{H}_2$ y $\hat{H}_3$ son isométricamente isomorfos bajo la aplicación

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots) \mapsto (\hat{x}_1|_{d_1} ; \hat{x}_1|_{d_2}, \hat{x}_2|_{d_2} ; \ldots ; \hat{x}_1|_{d_\infty}, \hat{x}_2|_{d_\infty}, \ldots) .$$

Con esto el operador de multiplicación en $\hat{H}_2$ se convierte en el operador de multiplicación en $\hat{H}_3$. Transfiriendo M.3 a M.2 se define $e_m = \bigcup_{m \leq n \leq \infty} d_n$

$(1 \leq m < \infty)$ y se procede correspondientemente. También las afirmaciones b) y c) de ambos teoremas se corresponden una a otra.

La siguiente versión del teorema M.3, que se encuentra sin demostración en [12], está en la misma relación con éste, como el teorema M.2 al M.1 :

TEOREMA M.4 : a) Existe una sucesión $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\infty$ *de medidas de Borel acotadas sobre* $\mathbb{R}$ *mutuamente singulares y una aplicación unitaria*

$$(M.4.1) \qquad U_4 : H \to \hat{H}_4 = \bigoplus_{1 \leq n \leq \infty} n \, . \, L^2(\nu_n) \, ,$$

que convierte el operador T *en el operador de multiplicación en* $\hat{H}_4$.

b) Si se tiene otra tal representación de T *con medidas* $\nu'_1, \nu'_2, \ldots, \nu'_\infty$, *entonces vale* $\nu_n \sim \nu'_n$ *para* $1 \leq n \leq \infty$.

c) Estas condiciones caracterizan también la equivalencia unitaria.

Conociendo los métodos de demostración se puede ver fácilmente (ver sección 4), que no sólo los teoremas M.2 y M.3 son equivalentes, sino que efectivamente se trata, en todos los cuatro teoremas, de versiones diferentes de una misma afirmación. Mientras la demostración para el teorema M.1 es todavía algo complicada y larga en las presentaciones de Stone y Wecken, la del teorema M.2 en Dunford – Schwartz [2] ya es muy clara y elegante pero particularmente en la parte en que se demuestra la existencia de μ y e_m, $1 \leq m < \infty$, utiliza ampliamente la existencia y las propiedades de la medida espectral $E(.)$ (definida sobre $\mathcal{B}$) de T . Para aplicar los teoremas M.1 - M.4 (por ejemplo a desarrollos en funciones propias generalizadas) es preciso saber *cómo*, por ejemplo, en el caso del teorema M.3, se puede obtener la medida ν , los conjuntos $d_1, d_2, \ldots, d_\infty$ y la transformación unitaria U_3 partiendo de una representación no canónica (S.1) de T ya conocida. Sobre todo sería satisfactorio, poder extraer un sistema $\mu, d_1, d_2, \ldots, d_\infty$, perteneciente a T, directamente de (S.1). En este contexto queremos recoger un método de construcción, que se debe a John von Neumann [11], el cual satisface estas exigencias en mayor grado que los métodos de [2], [16], [12], [10].

Primero tenemos que reformular el teorema M.3 un poco, describiendo los conjuntos de multiplicidad $d_1, d_2, \ldots, d_\infty$ mediante una *función de multiplicidad* $k: \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Para esto definimos

$$k(\lambda) = n \quad \text{si} \quad \lambda \in d_n \qquad (1 \leq n \leq \infty)$$

$k(.)$ es una función de Borel y vale

$$(3.1) \qquad d_n = \{\lambda : k(\lambda) = n\} \qquad (1 \leq n \leq \infty).$$

Ahora el teorema M.3 puede ser enunciado así: Al operador T corresponden una medida de Borel finita ν y una función de Borel $k: \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, tales que T tiene una representación espectral (M.3.1) con los conjuntos d_n de (3.1). Las condiciones en b) y c) dicen ahora simplemente: $k = k'$ (ν-a.e.) en $\mathbb{R}$. De la conexión estrecha entre los teoremas M.3 y M.2 que describimos anteriormente, se concluye que en M.2 los conjuntos e_m vienen dados por $e_m = \{\lambda : k(\lambda) \geq m\}$ $(1 \leq m < \infty)$. Con eso tenemos también una formulación del teorema M.2 mediante la función k.

Esta versión del teorema de multiplicidad espectral es ahora una parte de la afirmación del Thm. III, pág. 422 en [11], donde la teoría de multiplicidad se describe por primera vez usando la teoría de las *integrales directas*. La demostración contiene particularmente una descripción muy sencilla de la función k, función que queremos llamar la *función de multiplicidad de von Neumann* de T.

La medida $\mu = \nu$ en los teoremas M.2, respectivamente M.3, es equivalente a la medida espectral $E(.)$ de T en el sentido de que μ y $E(.)$ tienen los mismos conjuntos de Borel nulos. C. Foiaş [5] utiliza en su versión de la teoría de multiplicidad una medida μ, respecto a la cual $E(.)$ es absolutamente continua en el sentido de que, para todo $b \in \mathcal{B}$ con $\mu(b) = 0$ vale también $E(b) = 0$. Queremos recoger esta idea, porque con ella el teorema M.3 (o M.2) se puede transcribir en una forma que tiene mayor analogía con el caso de dimensión finita, en el cual T está determinado, salvo equivalencia unitaria, por la función de multiplicidad espectral ν_e (ver la introducción). Primero tenemos que describir nuestra situación inicial sin utilizar la medida espectral de T.

(3.2) DEFINICIÓN : Sea τ una medida de Borel sobre $\mathbb{R}$. Escribimos $T < \tau$, si para una (y con eso para toda) representación espectral ordinaria (S.1) de T vale :

$$\tau(b) = 0 \Rightarrow \rho_m(b) = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq m < \infty .$$

Escribimos $T \sim \tau$, si para una (y con eso para toda) representación espectral ordinaria (S.1) de T vale

$$\tau(b) = 0 \Leftrightarrow \rho_m(b) = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq m < \infty .$$

(Aquí b es un conjunto de Borel arbitrario .)

Si $T \sim \tau$, entonces escribimos en vez de $(\tau\text{-}a.e.)$ también $(T\text{-}a.e.)$ y en vez de τ-conjunto nulo también T-conjunto nulo. Tenemos que demostrar todavía la validez de "... y con eso para toda" en la definición (3.2). Para esto sea

$$(S.1) \qquad U' : H \to \hat{H}' = \bigoplus_{1 \leq m < \infty} L^2(\rho'_m)$$

otra representación espectral ordinaria de T. Hay que mostrar, que para un conjunto de Borel arbitrario, b vale :

$$(3.3) \qquad \rho_m(b) = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq m < \infty <=> \rho'_m(b) = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq m < \infty .$$

Para demostrar esto consideraremos la aplicación unitaria

$$W := U' U^{-1} : \hat{H} \to \hat{H}'$$

Si F es una función de Borel acotada, la multiplicación con F en $\hat{H}$ y $\hat{H}'$ se define de manera natural (es decir, por componentes). Mostremos primero (ver [2], pág. 977, ecuación (*)) que

$$(3.4) \qquad W(F \cdot \hat{x}) = F \cdot W\hat{x} \qquad \text{para todo} \quad \hat{x} \in \hat{H} .$$

Para demostrar esto basta considerar un $\hat{x} \in D_{\hat{T}^\infty}$. Sea $\hat{x}' = W\hat{x}$. Hay que mostrar que

$$(U^{-1}(F \cdot \hat{x}), y) = (U'^{-1}(F \cdot \hat{x}'), y) \quad \text{para todo} \quad y \in H .$$

o con $\hat{y} = Uy$, $\hat{y}' = U'y$:

$$(3.5) \qquad (F \cdot \hat{x}, \hat{y}) = (F \cdot \hat{x}', \hat{y}') \quad \text{para todo} \quad y \in H .$$

Por (S.3), respectivamente (S.3'), esta relación vale primero para $F(\lambda) = \lambda$ (puesto que en este caso se reduce a $(T\hat{x}, \hat{y}) = (T'\hat{x}', \hat{y}')$. Puesto que $\hat{x} \in D_{\hat{T}^\infty}$, (3.5) vale también si F es un polinomio ; entonces también si F es función continua con soporte compacto y, finalmente, por una aplicación del teorema de Lusin (ver por ejemplo [13], p. 54) y del teorema de la convergencia dominada, para toda función de Borel acotada. (En estos pasos los productos escalares se deben considerar como sumas de integrales). Con esto (3.4) queda demostrado.

Para demostrar (3.3) supongamos ahora que $\rho'_m(b) = 0$ para $1 \leq m < \infty$. Supongamos también que existe un m_o con $\rho_{m_o}(b) > 0$. Sea entonces $\hat{x} = (0, \ldots, \chi_b, 0, \ldots)$, donde χ_b denota la función característica de b y está en el m_o-ésimo lugar de $\hat{x}$. Se tiene $\hat{x} \in \hat{H}$, $\|\hat{x}\|^2 = \rho_{m_o}(b) > 0$; por otro lado, vale, por (3.4) : $W\hat{x} = W(0, \ldots, \chi_b^2, 0, \ldots) = W(\chi_b \cdot \hat{x}) = \chi_b \cdot W\hat{x}$, es decir,

$$\|W\hat{x}\|^2 = \sum_{1 \leq m < \infty} \int_b |[W\hat{x}]_m(\lambda)|^2 \, d\rho'_m(\lambda) = 0$$

puesto que $\rho'_m(b) = 0$ para $1 \leq m < \infty$. Pero esto es imposible ya que W es unitario.

Una medida ρ con $\rho \sim T$ siempre viene dada por $\rho = \sum_{1 \leq m < \infty} \frac{1}{2^m \rho_m(\mathbb{R})} \rho_m$. Para esta ρ, vale : $\tau < T \Leftrightarrow \tau < \rho$, $\tau \sim T \Leftrightarrow \tau \sim \rho$. Veremos que en (M.1) -(M.4) vale : $\mu_1 \sim T$, respectivamente, $\mu \sim T$, respectivamente, $\nu \sim T$, respectivamente $\left(\sum_{1 \leq n < \infty} \frac{1}{2^n \nu_n(\mathbb{R})} \nu_n + \nu_\infty \right) \sim T$. Ahora la quinta versión del teorema espectral anunciada anteriormente se puede enunciar :

TEOREMA M. 5 : Sea $T < \tau$, a) Entonces existe una función de Borel $k_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ (la llamada función de multiplicidad de von Neumann de T respecto τ) y una aplicación unitaria

$$(M.5.1) \qquad U_5 : H \to \hat{H}_5 = \bigoplus_{1 \leq n \leq \infty} n . L^2 (d_n , \tau) \ .$$

donde $d_n = \{\lambda : k_\tau(\lambda) = n\}$ para $1 \leq n \leq \infty$, que convierte el operador T en el operador de multiplicación en $\hat{H}_5$.

b) $k_\tau(\cdot)$ está unívocamente determinada (τ -a.e.) en $\mathbb{R}$.

c) Si $T, T' < \tau$ son dos operadores con las funciones de multiplicidad $k_\tau(\cdot)$, $k'_\tau(\cdot)$ respecto T, entonces T y T' son unitariamente equivalentes si, y sólo si, $k_\tau(\lambda) = k'_\tau(\lambda)$ (τ - a.e.) en $\mathbb{R}$.

Naturalmente se puede enunciar también una versión correspondiente a M.2 del teorema M.5, con $e_m = \{\lambda : k_\tau(\lambda) \geq m\}$ $(1 \leq m < \infty)$.

4. Demostración del teorema de multiplicidad espectral. No es difícil transcribir M.3 directamente a la forma M.5. Pero puesto que aquí se debe describir el método de construcción de John von Neumann, apliquemos este método directa - mente a M.5, quien posee una afirmación de existencia más general que M.3. La demostración de las afirmaciones de unicidad b) y c) sólo es una traducción de la demostración en [2] de las afirmaciones correspondientes de M.3 a M.5 ; ella sólo se da para completar la presentación.

(i) Demostración de la afirmación de existencia en el teorema M.5 : Para la construcción de $k_\tau(\cdot)$ y de U_5 partimos de una representación espectral común (S.1) de T. Formamos las derivadas de Radon-Nikodym $\frac{d\rho_m}{d\tau}$ e introducimos los conjuntos de Borel

$$(4.1) \qquad c_m = c_m^\tau = \{ \lambda \in \mathbb{R} : \frac{d\rho_m}{d\tau}(\lambda) > 0 \} .$$

Entonces la función de multiplicidad de von Neumann k_τ de T respecto τ viene dada por

$$(4.2) \qquad k_\tau(\lambda) = \sum_{1 \leq m < \infty} \chi_{c_m^\tau}(\lambda) .$$

La demostración de la unicidad que daremos más tarde, prueba en particular que k_τ no depende de la selección de la representación espectral (S.1) (excepto en un conjunto nulo con respecto a τ). Para construir U_5, notemos primero que los espacios $L^2(\rho_m)$ y $L^2(c_m, \tau)$ son isométricamente isomorfos mediante la aplicación

$$L^2(\rho_m) \ni \hat{x}_m(\cdot) \mapsto \sqrt{\frac{d\rho_m}{d\tau}(\cdot)}\ \hat{x}_m(\cdot) \in L^2(c_m, \tau) ,$$

la cual es compatible con la multiplicación con $\lambda \mapsto \lambda$, y podemos por eso substituir la representación espectral (S.1) por la siguiente :

$$(S.1^+) \qquad U^+ : H \to \bigoplus_{1 \leq m < \infty} L^2(c_m, \tau) .$$

Es claro cómo deben modificarse (S.2) y (S.3) .

Sea $d_n = \{ \lambda : k_\tau(\lambda) = n \}$ $(1 \leq n \leq \infty)$. Ahora nuestra tarea es construir una aplicación

$$V_5 : \bigoplus_{1 \leq m < \infty} L^2(c_m, \tau) \quad , \quad \bigoplus_{1 \leq n \leq \infty} n . L^2(d_n, \tau) \ ,$$

por la cual el operador de multiplicación en el primer espacio de representación se convierta en el operador de multiplicación en el segundo espacio de representación. La representación espectral llamada U_5 es entonces $U_5 = V_5 U^+$.

Para la construcción de V_5 introducimos subconjuntos apropiados, comunes a los c_m y d_n: Si $\lambda \in d_n$, entonces denotamos los n índices i con $\lambda \in c_i$ según el orden natural por $i_{n1}(\lambda) < i_{n2}(\lambda) < \cdots < i_{nn}(\lambda)$ para $1 \leq n < \infty$, $i_{\infty 1}(\lambda) < i_{\infty 2}(\lambda) < \cdots$ para $n = \infty$. Ahora definimos para $1 \leq m < \infty$ los conjuntos

$$t_m^{11} \ ; \ t_m^{21}, t_m^{22} \ ; \ \ldots \ ; \ t_m^{\infty 1}, t_m^{\infty 2} \ \ldots .$$

mediante

$$t_m^{nk} := \{ \lambda \in d_n : i_{nk}(\lambda) = m \} \qquad (1 \leq n \leq \infty \ , \quad 1 \leq k < n + 1) .$$

Los t_m^{nk} son conjuntos de Borel, puesto que los c_m y d_n son de este tipo y puesto que para $1 \leq n \leq \infty$, $1 \leq m < \infty$ vale :

$$t_m^{n1} = d_n \cap c_m - \bigcup_{1 \leq j < m} c_j \ .$$

y para $1 \leq n \leq \infty$, $2 \leq k < n + 1$, $1 \leq m < \infty$ vale :

$$t_m^{nk} = d_n \cap c_m \cap [\bigcup_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{k-1} < m} [c_{j_1} \cap c_{j_2} \cap \cdots \cap c_{j_{k-1}} - \bigcup_{\substack{1 \leq j < m \\ j \neq j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}}} c_j \ ]]$$

Valen las relaciones siguientes, donde el punto indica que se trata de reuniones disjuntas :

$$d_n = \dot{\bigcup}_{1 \leq m < \infty} t_m^{nk} \qquad (1 \leq n \leq \infty \ , \quad 1 \leq k < n+1)$$

(4.3)

$$c_m = \dot{\bigcup}_{1 \leq n \leq \infty} \ \dot{\bigcup}_{1 \leq k < n+1} t_m^{nk} \qquad (1 \leq m < \infty)$$

Después de estos preliminares podemos ahora definir V_5 de la manera siguiente :

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots) \mapsto V_5 \hat{x} = \tilde{x}$$

donde $\tilde{x} = (\tilde{x}_{11} \ ; \tilde{x}_{21}, \tilde{x}_{22} \ ; \ldots ; \tilde{x}_{\infty 1}, \tilde{x}_{\infty 2}, \ldots)$ se define por

$$\tilde{x}_{nk}(\lambda) = \hat{x}_m(\lambda) \qquad \text{para} \qquad \lambda \in t_m^{nk} \qquad (1 \leq m < \infty)$$

para $1 \leq n \leq \infty$, $1 \leq k < n+1$. Las funciones así definidas son medibles y por (4.3) vale

$$\| \tilde{x} \|^2 = \sum_{1 \leq n \leq \infty} \ \sum_{1 \leq k < n+1} \int_{d_n} | \tilde{x}_{nk}(\lambda) |^2 d\tau(\lambda)$$

$$= \sum_{1 \leq n \leq \infty} \ \sum_{1 \leq k < n+1} \ \sum_{1 \leq m < \infty} \int_{t_m^{nk}} | \hat{x}_m(\lambda) |^2 d\tau(\lambda)$$

$$= \sum_{1 \leq m < \infty} \ \sum_{1 \leq n \leq \infty} \ \sum_{1 \leq k < n+1} \int_{t_m^{nk}} | \hat{x}_m(\lambda) |^2 d\tau(\lambda)$$

$$= \sum_{1 \leq m < \infty} \int_{c_m} | \hat{x}_m(\lambda) |^2 d\tau(\lambda) = \| \hat{x} \|^2$$

Por eso V_5 es un homomorfismo isométrico de $\bigoplus_{1 \leq m < \infty} L^2(c_m, \tau)$ en $\bigoplus_{1 \leq n \leq \infty} n \cdot L^2(d_n, \tau)$. El hecho de que V_5 sea sobreyectivo se concluye directamente de la construcción: si

$$x = (x_{11}; x_{21}, x_{22}; \ldots; x_{\infty 1}, x_{\infty 2}, \ldots) \in \bigoplus_{1 \leq n \leq \infty} n \cdot L^2(d_n, \tau) \quad ;$$

entonces vale $x = U_1 \hat{x}$, donde $\hat{x} \in \bigoplus_{1 \leq m < \infty} L^2(c_m, \tau)$ se define por

$$\hat{x}_m(\lambda) = x_{nk}(\lambda) \quad \text{para} \quad \lambda \in t_m^{nk} \qquad (1 \leq n \leq \infty \quad , \quad 1 \leq k < n+1)$$

para $1 \leq m < \infty$. Obviamente, V_5 es también compatible con la multiplicación.

(ii) Demostración de las afirmaciones de unicidad en el teorema M.5: Primero b): Sea $k'_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ otra función de Borel a la cual corresponde una representación espectral

$$(M.5.1') \qquad U'_5 : H \to \hat{H}'_5 = \bigoplus_{1 \leq n \leq \infty} n \cdot L^2(d'_n, \tau) \; .$$

donde $d'_n := \{\lambda \in \mathbb{R} \; : \; k'_\tau(\lambda) = n\}$ $\qquad (1 \leq n \leq \infty)$. Consideremos la aplicación unitaria

$$W = U'_5 \, U_5^{-1} : \hat{H}_5 \to \hat{H}'_5 \; .$$

Se ve, como en la sección 3, que para toda función de Borel acotada F, vale

$$(4.4) \qquad W(F \cdot \hat{x}) = F \cdot (W\hat{x}) \, , \quad \text{para todo} \quad \hat{x} \in \hat{H}_5 \; .$$

(En la demostración se debe tener en cuenta que τ es σ-finita). Demostraremos ahora que $k = k'$ (τ-a.e.) en $\mathbb{R}$, probando por inducción matemática que

$$(4.5) \qquad d_j = d'_j \quad (\tau\text{-a.e.}) \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \qquad (0 \leq j < \infty) \ .$$

Para esto son útiles los vectores

$$\hat{z}^o = (1|_{d_1} ; 1|_{d_2}, 0 ; 1|_{d_3}, 0, 0 ; \ldots ; 1|_{d_\infty}, 0, 0, \ldots)$$

$$\hat{z}_1 = (0 ; 0, 1|_{d_2} ; 0, 1|_{d_3}, 0 ; \ldots ; 0, 1|_{d_\infty}, 0, \ldots)$$

$$\hat{z}_2 = (0 ; 0, 0 ; 0, 0, 1|_{d_3} ; \ldots ; 0, 0, 1|_{d_\infty}, \ldots)$$

$\cdot$
$\cdot$
$\cdot$

(1 denota la función constante $\lambda \mapsto 1$).

(4.5) **vale para** $j = 0$ **: De no ser así se tendría, por ejemplo,** $\tau(d'_o - d_o) > 0$ **. Se escoge entonces un conjunto de Borel** $s \subset d'_o - d_o$ **con** $0 < \tau(s) < \infty$ **y se considera el vector** $\hat{x}_o = \chi_s \cdot \hat{z}^o \in \hat{H}_5$ **. Vale** $\|\hat{x}^o\|^2 = \sum_{1 \leq n \leq \infty} \tau(s \cap d_n) > 0$ **, puesto que de lo contrario sería** $\tau(s) = \sum_{0 \leq n \leq \infty} \tau(s \cap d_n) = \sum_{1 \leq n \leq \infty} \tau(s \cap d_n) = 0$ **(por** $s \cap d_o = \phi$ **). Por otro lado, ya que se tiene** $W\hat{x}^o = W(\chi_s^2 \cdot \hat{z}^o) = \chi_s \cdot W(\chi_s \cdot \hat{x}^o) = \chi_s \cdot W\hat{x}^o$ **, vale**

$$\|W\hat{x}^o\|^2 = \sum_{1 \leq n \leq \infty} \ \sum_{1 \leq k < n+1} \int_{s \cap d'_n} |[W\hat{x}^o]_{nk}(\lambda)|^2 \, d\tau(\lambda) = 0$$

puesto que $s \cap d'_n = \phi$ **, para** $1 \leq n \leq \infty$ **. Esto contradice la isometricidad de** W **.**

Supongamos ahora que (4.5) vale para $0 \leq j \leq J : \tau(d_j \Delta d'_j) = 0$ **. Para mostrar que también** $\tau(d_{J+1} \Delta d'_{J+1}) = 0$ **, suponemos que, al contrario ,**

$\tau(d_{J+1} \Delta d'_{J+1}) > 0$, es decir, por razones de simetría, simplemente que $\tau(d'_{J+1} - d_{J+1}) > 0$. Ahora elegimos un conjunto de Borel $s \subset d'_{J+1} - d_{J+1}$ con $0 < \tau(s) < \infty$ y definimos vectores $\hat{x}^j \in \hat{H}_5$ para $0 \leq j \leq J+1$ mediante $\hat{x}^j = \chi_s . \hat{z}^j$. Los $\hat{x}^j$ forman un sistema ortogonal en $\hat{H}_5$ y son no-triviales : Si valiera, para un j fijo con $0 \leq j \leq J+1$, que $\| \hat{x}^j \|^2 = \sum_{j+1 \leq n \leq \infty} \tau(s \cap d_n) = 0$, entonces se tendría $\tau(s) = \sum_{0 \leq n \leq \infty} \tau(s \cap d_n) = \sum_{0 \leq n \leq J} \tau(s \cap d_n) = 0$, puesto que $s \cap d_{J+1} = \phi$ y $\tau(s \cap d_n) \leq \tau(d_n - d'_n) \leq \tau(d_n \Delta d'_n) = 0$ para $0 \leq n \leq J$ (obsérvese que $s \subset \mathbb{R} - d'_n$ para $n \neq J+1$.) Entonces los $W\hat{x}^j$, $0 \leq j \leq J+1$ forman un sistema ortogonal de vectores no triviales en $\hat{H}'_5$.

Sea ahora $d \subset s$ un conjunto de Borel arbitrario con $\tau(d) > 0$. Definimos $\hat{y}^j \in \hat{H}^5$ mediante $\hat{y}^j = \chi_d . \hat{z}^j$, $0 \leq j \leq J+1$. Entonces los $W\hat{y}^j$, $0 \leq j \leq J+1$, también forman un sistema ortogonal en $\hat{H}'_5$. Por esto vale, ya que se tiene

$$W\hat{y}^j = W(\chi_d . \hat{z}^j) = W(\chi_d . \chi_s . \hat{z}^j) = W(\chi_d . \hat{x}^j) = \chi_d . W\hat{x}^j$$

y $d \subset d'_{J+1}$ (es decir, $d \cap d'_n = \phi$ para $n \neq J+1$) , que

$$(4.6)\quad \delta_{ij} . \| W\hat{y}^j \|^2 = (W\hat{y}^i, W\hat{y}^j) = (\chi_d . W\hat{x}^i , \chi_d . W\hat{x}^j) =$$

$$= \int_d \sum_{1 \leq k \leq J+1} \hat{u}^i_k(\lambda) \cdot \overline{\hat{u}^j_k(\lambda)}\, d\tau(\lambda) .$$

Aquí hemos introducido las abreviaciones $(W\hat{x}^j)_{J+1,k}(\cdot) = \hat{u}^j_k(\cdot)$, $1 \leq k \leq J+1$, $0 \leq j \leq J+1$, para simplificar las notaciones. Puesto que (4.6) vale para todo conjunto de Borel $d \subset s$ con $\tau(d) > 0$, se concluye que vale $(\tau - a.e.)$ en s :

$$\sum_{1 \leq k \leq J+1} \hat{u}_k^i(\lambda)\, \overline{\hat{u}_k^j(\lambda)} = 0 \qquad (0 \leq i < j \leq J+1)$$

$$\sum_{1 \leq k \leq J+1} |\hat{u}_k^j(\lambda)|^2 > 0 \qquad (1 \leq j \leq J+1) .$$

Puesto que $\tau(s) > 0$, existe $\lambda_o \epsilon\, s$ para el cual valen ambas relaciones. Para este λ_o los vectores $(\hat{u}_1^j(\lambda_o), \ldots, \hat{u}_{J+1}^j(\lambda_o))$, $0 \leq j \leq J+1$, forman un sistema ortogonal de $J+2$ vectores no triviales en $\mathbb{C}^{J+1}$. Esta contradicción demuestra la afirmación para $J+1$.

Ahora c) : Sean $T, T' < \tau$ dos operadores autoadjuntos con las funciones de multiplicidad de von Neumann k, k' con respecto a τ. Entonces T, T' tienen las representaciones espectrales (M.5.1), (M.5.1'). Primero, sean T, T' unitariamente equivalentes, es decir, que existe una aplicación unitaria $V : H \to H$ con $D_{T'} = VD_T$, $T'V = VT$ en D_T. Entonces la aplicación unitaria $U_5'' = U_5'V : H \to \hat{H}_5'$ es otra representación espectral de T, puesto que para $x \epsilon D_T$ vale

$$(U_5'' Tx)_{nk}(\lambda) = (U_5' VTx)_{nk}(\lambda) = (U_5' T'Vx)_{nk}(\lambda) = \lambda\, (U_5' Vx)_{nk}(\lambda) = \lambda (U_5'' x)_{nk}(\lambda)$$

$$(\tau\text{-}a.e.) \quad \text{en } d_n' \quad (1 \leq n \leq \infty \quad , \quad 1 \leq k < n+1) .$$

Con esò tenemos según b) que $k(\lambda) = k'(\lambda)$ $(\tau\text{-}a.e.)$ en $\mathbb{R}$. Entonces vale $d_n = d_n'$ $(\tau\text{-}a.e.)$ $(1 \leq n \leq \infty)$, por lo tanto, $\hat{H}_5 = \hat{H}_5'$, es decir, tanto T como T' son unitariamente equivalentes al operador de multiplicación en $\hat{H}_5$; luego T y T' son unitariamente equivalentes uno al otro.

(iii) Equivalencia de las versiones diferentes del teorema de multiplicidad espectral : Primero se demostrará que el teorema M.3 es un caso particular del M. 5 que corresponde a la selección $T \sim \tau = \nu$. Para esto, en la parte de existencia, sólo se debe mostrar que con esta selección de τ vale $k_\tau(\lambda) \geq 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (es decir, $\mathbb{R} = \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} d_n$). Según la definición de $k_\tau(\cdot)$ (ver (4.1), (4.2)) esto significa que $\tau(c_o) = 0$ para $c_o := \{\lambda : k_\tau(\lambda) = 0\} = \mathbb{R} - \bigcup_{1 \leq m < \infty} c_m$. Pero esta afirmación se concluye de

$$\rho_m(c_o) = \int_{c_o} \frac{d\rho_m}{d\tau}\, d\tau = 0 \qquad (1 \leq m < \infty)$$

(obsérvese que $\frac{d\rho_m}{d\tau} = 0$ en c_o) y $T \sim \tau$.

Si tenemos recíprocamente una representación (M.3.1) de T con $\bigcup_{1 \leq n \leq \infty} d_n = \mathbb{R}$, entonces se debe tener $\nu \sim T$, puesto que podemos escribir la fórmula (M. 3.1) así :

$$U : H \to \hat{H} = \bigoplus_{1 \leq n \leq \infty} n \,.\, L^2(\nu_{d_n}) \,,$$

y considerarla por eso como una representación espectral no canónica de tipo (S.1), en la cual las medidas participantes, que son (posiblemente) diferentes una de otra, son $\nu_{d_1}, \nu_{d_2}, \ldots, \nu_{d_\infty}$. Entonces, según la sección 3, vale

$$\nu = \sum_{1 \leq n \leq \infty} \nu_{d_n} \sim T \,.$$

De lo anterior y de b) en M.5, se concluye la afirmación b) en M.3 .

Demostración de c) en M.3 : Sean T, T' operadores con las medidas correspondientes ν, ν' y las sucesiones (d_n), (d'_n) de los conjuntos de multiplicidad. Si T, T' son unitariamente equivalentes, entonces la afirmación

$$(4.7) \qquad \nu \sim \nu', \quad d_n = d'_n \quad (\nu\text{-}a.e.) \text{ en } \mathbb{R} \quad \text{para} \quad 1 \leq n \leq \infty$$

se puede reducir a la afirmación ya demostrada, como en la demostración de la afirmación c) de M.5. Si, al revés, valen las afirmaciones (4.7), entonces primero T es unitariamente equivalente al operador de multiplicación en $\bigoplus_{1 \leq n \leq \infty} n \cdot L^2(d_n, \nu')$. Ahora observemos que, puesto que $\nu \sim \nu'$, se puede suponer $\frac{d\nu'}{d\nu}(\lambda) > 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Por eso, $L^2(d_n, \nu')$ es isométricamente isomorfo a $L^2(d_n, \nu)$ mediante la aplicación

$$\hat{x}_n(\cdot) \mapsto \sqrt{\frac{d\nu'}{d\nu}(\cdot)}\; \hat{x}_n(\cdot) \qquad ,$$

que es compatible con la multiplicación. Esto demuestra que T' es unitariamente equivalente al operador de multiplicación en $\bigoplus_{1 \leq n \leq \infty} n \cdot L^2(d_n, \nu)$, y entonces también a T.

Ya conocemos la relación entre M.2 y M.3. En la transición de M.3 a M.4, se define (como ya lo hicimos antes) $\nu_n = \nu_{d_n}$ para $1 \leq n \leq \infty$, y, correspondientemente, en la transición de M.4 a M.3, $\nu = \sum_{1 \leq n < \infty} \frac{1}{2^n \nu_n(\mathbb{R})} \nu_n + \nu_\infty$, $d_n = \{ \lambda : \frac{d\nu_n}{d\nu}(\lambda) > 0 \}$. Similarmente se procede con M.1, M.2. Se puede renunciar ahora a la presentación de los detalles.

5. *Funciones de multiplicidad espectral.* En el caso de dimensión finita sólo hay un método razonable de definir una función de multiplicidad del operador T, a saber, la función ν_e (ver la introducción). ν_e es un invariante unitario comple-

to de T (es decir, determina a T salvo equivalencia unitaria). En el caso de dimensión infinita queremos considerar, como función de multiplicidad de T, a una función unitariamente invariante $v : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, que, (i) en el caso de dimensión finita se reduzca a v_e, (ii) aplique a todo valor propio aislado la dimensión del espacio propio correspondiente y que (iii), según ella los operadores de multiplicidad total $\leq N$ estén caracterizados por $v(\lambda) \leq N$ en $\mathbb{R}$.

A cada una de las versiones del teorema de multiplicidad espectral tratadas anteriormente corresponde una definición natural de una tal función. Si $T < \tau$, ésta es, en el caso del teorema M.5, la "función" de multiplicidad de von Neumann de T con respecto a τ, $k_\tau(\cdot)$, que cumple todas las exigencias de v, siempre y cuando éstas se modifiquen teniendo en cuenta que $k_\tau(\cdot)$ está definida unívocamente (τ*-a.e.*) en $\mathbb{R}$. k_τ (mejor: la clase de equivalencia determinada por k_τ) es un invariante unitario *completo* de todos los operadores $<\tau \cdot k_\tau$ se puede obtener de una representación espectral común, arbitraria, (S.1) de T (ver (4.1), (4.2)). Los conjuntos c_m están caracterizados por la siguiente condición:

$$\rho_m = \rho_{m_{c_m}} \quad (\text{es decir, } \rho_m \text{ está concentrada sobre } c_m)$$

y

$$\tau(b) = 0 \quad \text{para todo} \quad b \subset c_m \quad \text{con} \quad \rho_m(b) = 0 .$$

Por eso los c_m se pueden considerar como *portadores de masa de* ρ_m *con respecto a* τ.

Si T se da previamente, sin asignarle ninguna medida, entonces la arbitrariedad posible en la selección de una τ se puede eliminar considerablemente exigiendo que $k_\tau(\lambda) \geq 1$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Sabemos, de la sección 4, que en este caso se debe cumplir $T \sim \tau$ y que k_τ es igual *(T - a.e.)* a la función de multiplicidad de von Neumann k de T, introducida en la sección 3, la cual determina los conjuntos e_m, respectivamente, d_n, en el teorema M.2, respectivamente, M.3. k se asocia directamente al operador (es decir, no a la pareja $T < \tau$) y naturalmente cumple también las exigencias hechas anteriormente a una función de multiplicidad. En particular, k es un invariante unitario *(T - a.e.)* en $\mathbb{R}$ de T.

Mientras las funciones de multiplicidad de von Neumann k_τ y k, que tienen su origen en los teoremas M.5, respectivamente, M.2, M.3, sólo se pueden definir razonablemente en relación con una medida, los teoremas M.1 y M.4 conducen a funciones realmente definidas en forma puntual. Con el teorema M.1 está ligada la llamada *función de multiplicidad de Hellinger* de T (ver [16], p. 267; [9]), la cual se define como sigue:

$$m(\lambda) = \sum_{1 \leq m < \infty} \chi_{supp(\mu_m)}(\lambda). \tag{5.1}$$

Esta definición naturalmente no depende de la selección de los μ_m, según la afirmación b) en el teorema M.1.

La función $m(.)$ describe (mediante $supp.(\mu_m) = \{\lambda \in \mathbb{R} : m(\lambda) \geq m)$ la sucesión $supp(\mu_1) \supset supp(\mu_2) \supset \cdots$, que por el teorema M.1 se asocia de manera única a T y que se puede interpretar como *espectro escalonado* de T. Para explicar esto partimos de una representación espectral común (S.1) de T. Mediante ésta, el operador se descompone en la suma ortogonal de los operadores cíclicos $T_n = U^{-1}\hat{T}U|_{U^{-1}L^2(\rho_m)}$. Aquí vale

$$\sigma(T_m) = \sigma(\hat{T}|_{L^2(\rho_m)}) = supp(\rho_m) \qquad (1 \leq m < \infty) \quad ,$$

y además

$$\sigma(T) = \overline{\bigcup_{1 \leq m < \infty} supp(\rho_m)}$$

Si ahora, en vez de (S.1), se considera una representación espectral canónica (M. 1.1) de T se obtiene

$$\sigma(T) = \sigma(T_1) \supset \sigma(T_2) \supset \ldots$$

$$\sigma(T_m) = \{ \lambda : m(\lambda) \geq m \} \qquad (1 \leq m < \infty) \quad ,$$

lo que justifica la interpretación de $m(.)$ como "espectro escalonado" de T. Según el teorema M.1, $m(.)$ es un invariante unitario del operador T, pero uno que (como el espectro) está muy lejano de ser completo.

Podemos utilizar también en el teorema M.4 los soportes (determinados unívocamente por T) de las medidas participantes ν_n en la definición de una función de multiplicidad espectral :

$$(5.2) \qquad \tilde{m}(\lambda) := \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} - \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} supp(\nu_n) \\ \sup\{ n : \lambda \in supp(\nu_n) \} & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

El teorema M.4 muestra, en particular, que $\tilde{m}$ es un invariante unitario de T. Pero la función m no determina los soportes de los ν_n mediante los cuales está definido.

Se puede ver fácilmente que m y $\tilde{m}$ también son funciones de multiplicidad de T en el sentido de la definición dada al principio de esta sección, es decir, que cumplen las afirmaciones (i)–(iii). Finalmente llamamos la atención sobre el hecho de que k (y k_T) toma como valor, aún en los valores propios no aislados, la dimensión del espacio propio asociado, hecho que no se debe cumplir para las funciones m y $\tilde{m}$, como lo muestran ejemplos sencillos.

6. *Una caracterización de las funciones de multiplicidad, la cual es independiente del teorema de multiplicidad espectral.* Lo mismo que en el caso de k, pueden obtenerse las funciones m y $\tilde{m}$ directamente de una representación espectral ordinaria (S.1) de T: Con $e_m = \{ \lambda : k(\lambda) \geq m \}$, $d_n = \{ \lambda : k(\lambda) = n \}$ vale

$$supp(\mu_m) = supp(\rho_{e_m}) \qquad (1 \leq m < \infty)$$

$$supp(\nu_m) = supp(\rho_{d_n}) \qquad (1 \leq n \leq \infty)$$

donde $\rho \sim T$, por ejemplo, $\rho = \sum\limits_{1 \leq m < \infty} \dfrac{1}{2^m \cdot \rho_m(\mathbb{R})} \rho_m$

La definición (5.1) tiene una semejanza formal con (4.2): En (5.1), en vez de los c_m, es decir, de los "portadores de masa de los ρ_m respecto ρ", se consideran los soportes de los ρ_m. La diferencia decisiva entre las dos definiciones es, que, en (4.2) se toma como base una representación arbitraria de T, mientras que en (5.1) una representación espectral canónica. Queremos examinar ahora, hasta qué punto la definición de $m(.)$ depende de esta restricción. (Una posibilidad de describir $m(.)$ mediante propiedades de multiplicidad de la medida espectral de T se encuentra en [9]).

Partamos de una representación espectral arbitraria de T dada por (5.1). Análogamente a (4.2) definimos

$$(6.1) \qquad t_U(\lambda) = \sum_{1 \leq m < \infty} \chi_{supp(\rho_m)}(\lambda) .$$

Primero hay que constatar que t_U depende en gran medida de la selección de U; tampoco se puede decir de manera alguna que t_U es determinada $(T\text{-}a.e.)$ en $\mathbb{R}$ por T.

(6.2) *Ejemplo:* Sea μ la medida de Lebesgue en [0,1]. Existe (ver [13], p. 56, ex. 3) un conjunto de Borel $e \subset [0,1]$, tal que para todo intervalo $I \subset [0,1]$ vale: $0 < \mu(e \cap I) < \mu(I)$. Sea ahora T el operador de multiplicación en $L^2([0,1], \mu)$. Vale obviamente que

$$m(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{para } \lambda \in [0,1] \\ 0 & \text{para } \lambda \in \mathbb{R} - [0,1] \end{cases}$$

Ahora definimos $\mu_1 = \mu_e$, $\mu_2 = \mu_{[0,1]-e}$. Entonces la aplicación

$$U : L^2([0,1], \mu) \to L^2([0,1], \mu_1) \oplus L^2([0,1], \mu_2)$$

definida por $Ux = (x, x)$ es una representación espectral de T. Ya que $supp(\mu_1) = supp(\mu_2) = [0,1]$, vale entonces $t_U(\lambda) = 2$ para todo $\lambda \in [0,1]$.

Después de este ejemplo podría parecer que

$$(6.3) \qquad m(\lambda) = \min \{ t_U(\lambda) \ : \ U \quad \text{representación espectral de} \quad T \ \} .$$

Pero esta afirmación también es falsa generalmente, puesto que se puede mostrar que este mínimo es cero en todos los puntos del espectro continuo. Ilustramos esto en el caso del ejemplo anterior para $\lambda = \frac{1}{2}$ **:**

(6.4) Ejemplo : **Sea** T **como en (6.2) : consideremos la sucesión**

$$e_1 = [\, 0 \, , \tfrac{1}{4} \,] \cup [\tfrac{3}{1}, \, 1] \, , \quad e_2 = [\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{8}] \cup [\tfrac{5}{8}, \tfrac{3}{4}] \, , \ \cdots$$

Definimos μ_n **por** $\mu_n = \mu_{e_n}$ **. Entonces tenemos una representación espectral de** T

$$U : L^2([\,0,1\,] \, , \mu) \quad \to \quad \bigoplus_{1 \leq n < \infty} L^2([\,0,1\,] \, , \mu_n) \, .$$

Aquí se tiene $supp(\mu_n) = e_n \, , \ 1 \leq n < \infty$ **, es decir,** $t_U(\frac{1}{2}) = 0$ **.**

Cuando se intenta caracterizar $m(\,.\,)$ **por una relación de la forma (6.3), en el lado derecho no se deben considerar todas las representaciones espectrales** U **de** T **, sino que hay que limitarse a representaciones que cumplan ciertas condiciones adicionales. Hasta ahora se logró encontrar una tal condición natural sólo en el caso en que la multiplicidad total de** T **es finita. En este caso una nueva función de multiplicidad se puede definir razonablemente por**

$$(6.5) \qquad t(\lambda) = \min \{ t_U(\lambda) : U \quad \text{representación espectral } \textit{finita} \text{ de} \quad T \ \} .$$

La proposición siguiente responde a nuestras preguntas en este caso :

(6.6) PROPOSICION : Sea T de multiplicidad total finita. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ vale :

$$m(\lambda) = \hat{m}(\lambda) = t(\lambda) .$$

Demostración : **a) Mostremos primero que $m(\lambda) = m(\lambda)$. Con este fin partimos de una representación espectral ordenada (M.2.1) de T . A ésta pertenece una representación espectral canónica (M.1.1) con $\mu_m = \mu_{e_m}$ $(1 \leq m < \infty)$ y una representación (M.3.1) con $d_n = e_n - e_{n+1}$ para $1 \leq n < \infty$, $d_\infty = \bigcap_{1 \leq m < \infty} e_m$. Entonces, con $\nu_n = \mu_{d_n}$, $(1 \leq n \leq \infty)$ se tiene una representación espectral (M.4.1). Demostraremos ahora que**

$$(6.7) \qquad supp(\mu_m) = \overline{\bigcup_{m \leq n \leq \infty} supp(\nu_n)} \qquad \text{para} \quad 1 \leq m < \infty$$

Primero vale $e_m = \bigcup_{m \leq n \leq \infty} d_n$ para $1 \leq m < \infty$. De esto y de la definición de los μ_m, ν_n se concluye (ver (2.1)) , que $\overline{\bigcup_{m \leq n \leq \infty} supp(\nu_n)} \subset supp(\mu_m)$.Sea al revés , $\lambda \in supp(\mu_m)$ Si $\lambda \notin \overline{\bigcup_{m \leq n \leq \infty} supp(\nu_n)}$, entonces existe $\varepsilon > 0$ con $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \cap supp(\nu_n) = \phi$ para $m \leq n \leq \infty$. Entonces vale

$$\mu_m((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) = \mu((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \cap e_m) = \sum_{m \leq n \leq \infty} \mu((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \cap d_n)$$

$$= \sum_{m \leq n \leq \infty} \nu_n((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) = 0 \quad ,$$

es decir, $\lambda \notin supp(\mu_m)$. Con esto (6.7) queda demostrado.

Si ahora la multiplicidad total de T es $\leq N$, entonces (6.7) se reduce a

$$supp(\mu_m) = \bigcup_{m \leq n \leq N} supp(\nu_n) \qquad (1 \leq m \leq N) .$$

De esto se concluye directamente que $m(\lambda) = \tilde{m}(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Demos ahora la demostración de $t(\lambda) = m(\lambda)$. Por el teorema M.1, se cumple trivialmente que $t(\lambda) \leq m(\lambda) = \tilde{m}(\lambda)$. Para mostrar que $\tilde{m}(\lambda) \leq t(\lambda)$, hay que probar que, para una representación espectral finita arbitraria,

$$(S.1) \qquad U : H \to \bigoplus_{1 \leq m \leq N} L^2(\rho_m) \, ,$$

de T vale: $\tilde{m}(\lambda) \leq t_U(\lambda)$. Para ver esto, seguimos el proceso descrito en la sección 4 que conduce a la representación espectral

$$(M.4.1) \qquad U_4 : H \to \bigoplus_{1 \leq n \leq N} L^2(\nu_n)$$

de T. Con este fin escribimos, con $\tau \sim \rho \sim T$, (S.1) en la forma

$$(S.1^+) \qquad U^+ : H \to \bigoplus_{1 \leq m \leq N} L^2(c_m \cdot \rho) \, ,$$

e introducimos la función de multiplicidad de von Neumann k definiendo además $d_n = \{ \lambda : k(\lambda) = n \}$, $1 \leq n \leq N$. Entonces los ν_n vienen dados por $\nu_n = \rho_{d_n}$. Si $\tilde{m}(\lambda) = 0$, no hay que mostrar nada. Sea $m(\lambda) = n_o$ con $1 \leq n_o \leq N$. Entonces se cumple particularmente $\lambda \in supp(\nu_{n_o})$. Con las notaciones de la sección 4 (ver (4.3)) valen las relaciones

$$d_{n_o} = \biguplus_{1 \leq m \leq N} t_m^{n_o k} \qquad (1 \leq k \leq n_o) \, .$$

Por eso, para todo $\kappa \in d_{n_o}$, existen índices $m_1(\kappa), m_2(\kappa), \cdots, m_{n_o}(\kappa)$ con $\kappa \in S_\kappa := \bigcap_{1 \leq k \leq n_o} t_{m_k(\kappa)}^{n_o k}$. Puesto que $t_m^{n_o k} \cap t_m^{n_o k'} = \phi$ para $k \neq k'$, los

$m_m(\kappa)$ deben ser diferentes uno del otro, es decir, S_κ está contenido en por lo menos n_o de los c_l con índices diferentes. Sólo hay un número finito de estos S_κ, sean $S_{\kappa_1}, S_{\kappa_2}, \ldots, S_{\kappa_M}$. Para estos vale entonces $d_{n_o} = \bigcup_{1\leq l\leq M} S_{\kappa_l}$. Puesto que $\lambda \in supp(\nu_{n_o})$ vale $\rho((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \cap d_n) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Entonces existe un $l_o \in \{1, \ldots, M\}$ con $\rho((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \cap S_{\kappa_{l_o}}) > \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ ("principio de los cajones" ; aquí se usa esencialmente, que U es una representación espectral *finita*). Por eso para los c_m con $S_{\kappa_{l_o}} \subset c_m$ vale $\rho((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \cap c_m) > 0$, es decir, $\lambda \in supp(\rho_m)$. Puesto que según lo anterior $S_{\kappa_{l_o}} \subset c_m$ se cumple por lo menos n_o veces, se concluye que $t_U(\lambda) \geq n_o = \tilde{m}(\lambda)$.

7. *Comparación de las diferentes funciones de multiplicidad espectral.* Primero queremos comparar m y $\tilde{m}$ en el caso de multiplicidad total infinita. De (6.7) se concluye que siempre vale

$$\tilde{m}(\lambda) \leq m(\lambda) \qquad \text{para todo} \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

y que

$$\tilde{m}(\lambda) = m(\lambda) \; , \qquad \text{para todo} \quad \lambda \in \mathbb{R} \; , \tag{7.2}$$

es válido, si $\bigcup_{1\leq n\leq\infty} supp(\nu_n)$ es cerrado para $1 \leq m < \infty$. Si esta condición no se cumple, puede suceder que $\tilde{m}(\lambda) < m(\lambda)$:

(7.3) *Ejemplo :* Sea μ la medida de Lebesgue en $[0,1]$, sea $d_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ para $1 \leq n < \infty$, $d_\infty = \phi$. Definimos T como el operador de multiplicación en $\bigoplus_{1\leq n<\infty} n\, L^2(d_n, \mu)$. Entonces se cumple $supp(\nu_n) = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ para $1 \leq n < \infty$, $supp(\nu_\infty) = \phi$, es decir, $\tilde{m}(0) = 0$. Por otro lado, tenemos de

$e_m = \bigcup_{m \leq n \leq \infty} d_n = (0, \frac{1}{m}]$, $\mu_m = \mu_{e_m}$, **una representación espectral canónica de T en $\bigoplus_{1 \leq m < \infty} L^2(\mu_m)$. Puesto que $supp(\mu_m)) = [0, \frac{1}{m}]$ para $1 \leq m < \infty$, se cumple $m(0) = \infty$.**

En este ejemplo $\lambda = 0$ es un *punto de acumulación* de la sucesión $(supp(\nu_n))_{1 \leq n \leq \infty}$ en el siguiente sentido : Existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \cdots$ y para $1 \leq k < \infty$ $\lambda_{n_k} \epsilon\, supp(\nu_{n_k})$ con $\lambda_{n_k} \to \lambda$. Ejemplos de este tipo son los únicos contraejemplos, puesto que de (6.7) se concluye

$$m(\lambda) = \begin{cases} \infty & \text{si } \lambda \text{ es un punto de acumulación de } supp(\nu_n))_{1 \leq n \leq \infty} \\ \widetilde{m}(0) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, también la función de multiplicidad de Hellinger $m(.)$ puede ser determinada directamente de la representación espectral (M.4.1).

Ahora comparemos las funciones m, $\widetilde{m}$ con k. Aquí vale siempre :

$$(7.4) \qquad k(\lambda) \leq m(\lambda) \ , \ k(\lambda) \leq \widetilde{m}(\lambda) \qquad (T\text{-}a.e.) \quad \text{en } \mathbb{R} .$$

Por (7.1) sólo se debe demostrar la segunda afirmación. Para la demostración definimos $d_n = \{\lambda : k(\lambda) = n\}$. Si $\rho \sim T$, una sucesión de medidas $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\infty$, con la cual tenemos una representación espectral (M.4.1) de T, viene dada por $\nu_n = \rho_{d_n}$. Hay que mostrar que $\rho(\{\lambda : k(\lambda) > \widetilde{m}(\lambda)\}) = 0$. Se cumple

$$\{\lambda : k(\lambda) > \widetilde{m}(\lambda)\} = \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} \{\lambda : k(\lambda) = n > \widetilde{m}(\lambda)\} \subset \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} d_n \cap (\mathbb{R} - supp(\nu_n))$$

y aquí

$$\rho(d_n \cap (\mathbb{R} - supp(\nu_n))) = \nu_n(\mathbb{R} - supp(\nu_n)) = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq n \leq \infty .$$

No debe valer $k(\lambda) = m(\lambda)$ ni $k(\lambda) = \tilde{m}(\lambda)$ $(T-a.e.)$ en $\mathbb{R}$:

(7.5) Ejemplo : Sea ρ la medida de Lebesgue en $[0,1]$, e como en el ejemplo (6.2). Sea T el operador de multiplicación en $L^2([0,1],\rho) \oplus L^2(e,\rho)$. Entonces se cumple $\mu_1 = \rho$, $\mu_2 = \rho_e$, $\mu_m = 0$ para $3 \leq m \leq \infty$; $\nu_1 = \rho_{[0,1]-e}$, $\nu_2 = \rho_e$, $\nu_n = 0$ para $3 \leq n \leq \infty$; $supp(\mu_1) = supp(\mu_2) = supp(\nu_1) = supp(\nu_2) = [0,1]$. Entonces $m(\lambda) = \tilde{m}(\lambda) = 2$ para todo $\lambda \in [0,1]$, pero $k(\lambda) = 1$ para todo $\lambda \in [0,1] - e$ y $\rho([0,1] - e) > 0$.

Como último problema examinemos bajo cuáles condiciones la función k coincide con la función m. La función m es superiormente semi-continua. Se tiene

(7.6) PROPOSICIÓN : Si $k(.)$ se puede escoger superiormente semi-continua, es decir, si los conjuntos e_m en teorema M.2 se pueden escoger cerrados, entonces vale $m(\lambda) = k(\lambda)$ $(T-a.e.)$ en $\mathbb{R}$.

Demostración : Sea $\mu_m = \rho_{e_m}$, $1 \leq m < \infty$. Definimos $e'_m = e_m \cap supp(\mu_m)$, $k'(\lambda) = \sum_{1 \leq m < \infty} \chi_{e'_m}$ y demostramos primero que

$$(7.7) \qquad k'(\lambda) = k(\lambda) \qquad (\rho - a.e.) \quad \text{en} \quad \mathbb{R} :$$

Trivialmente vale $k'(\lambda) \leq k(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$; hay que mostrar que $\rho(\{\lambda : k'(\lambda) < k(\lambda)\}) = 0$. Esto se concluye de

$$\{\lambda : k'(\lambda) < k(\lambda)\} = \bigcup_{0 \leq m < \infty} \{\lambda : k(\lambda) > m = k'(\lambda)\}$$

$$\subset \bigcup_{0 \leq m < \infty} e_{m+1} \cap (\mathbb{R} - (e_{m+1} \cap supp(\mu_{m+1})))$$

$$= \bigcup_{0 \leq m < \infty} e_{m+1} \cap (\mathbb{R} - supp(\mu_{m+1})) \quad .$$

Terminamos la demostración (7.6) probando que

(7.8) Si $k(.)$ es superiormente semi-continua y $k(\lambda) \leq m(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces vale $k(\lambda) = m(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración de (7.8) : **Bajo las hipótesis hechas, e_m es cerrado y $e_m \subset supp(\mu_m)$ para $1 \leq m < \infty$. Por la definición de μ_m, vale $\mu_m(\mathbb{R} - e_m) = \rho(\mathbb{R} - e_m) \cap e_m) = 0$. Puesto que $\mathbb{R} - e_m$ es abierto, se concluye $\mathbb{R} - e_m \subset \mathbb{R} - supp(\mu_m)$; es decir, $e_m \supset supp(\mu_m)$. Entonces $m(\lambda) = \bigcup_{1 \leq m < \infty} \chi_{supp(\mu_m)}(\lambda) \leq \sum_{1 \leq m < \infty} \chi_{e_m}(\lambda) = k(\lambda)$.**

Bibliografía

1. *N. I. Achieser und I.M. Glasman. Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum.* Berlín 1968 .

2. *N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators II.* New York, 1963.

3. *K. O. Friedrichs, Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields,* New York 1953.

4. *K.O. Friedrichs, Spectral Theory of Operators in Hilbert Space.* New York, Heidelberg, Berlin 1973.

5. C. Foiaş, *Décomposition intégrale des familles spectrales et sémi-spectrales en opérateurs qui sortent de l'espace hilbertien.* Acta Sci. Math. Szeged 2o, 117-155 (1959).

6. P.R. Halmos. *What does the Spectral Theorem Say ?* Am. Math. Monthly 7o 241-247 (1963).

7. R.A. Hirschfeld, *Expansions in Eigenfuctionals.* Nederl. Akad. Wetensch.Proc. Ser. A 68, 512-520 (1965) .

8. J. M. Jauch and B. Misra, *The Spectral Representation.* Helv. Phy. Acta 38, 30-52 (1965) .

9. K. Kalb, *Die Velfachheit nach Hellinger und die geometrische Vielfachheit der verallgemeinerten Eigenwerte.* Arch. Math. 25, 290-296 (1974).

10. E. Nelson, *Topics on Dynamics. I : Flows.* Princeton 1969 .

11. J. v. Neumann. *On Rings of Operators IV. Reduction Theory.* Ann. of Math. (2) 5o, 401-485 (1949)

12. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I : Functional Analysis.* New York , London 1972.

13. W. Rudin, *Real and Complex Analysis.* New York, 1973.

14. W. Rudin, *Functional Analysis.* New York, 1973.

15. B. Simon, *Topics in Functional Analysis Proceedings of the instructional conference "Mathematics of Contemporary Physics".* London 1972.

16. M. H. Stone, *Linear Transforms in Hilbert Space.* Providence 1932.

17. E. Thoma, *Zur Reduktionstheorie in separablen Hilbert-Raumen.* Math. Z. 67, 1-9 (1957).

18. F. Wecken, *Unitärinvarianten selbstadjungierter Operatoren.* Math. Ann. 116, 422-455 (1939).

Fachbereich Mathematik
der Universität
D 65 Mainz
República Federal de Alemania

(Recibido en febrero de 1974 : la revisión final en julio de 1974) .