Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen X (1976), págs. 125-140

REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS NO CONVENCIONALES MEDIANTE OPERADORES HERMÍTICOS

por

Yu TAKEUCHI

SUMMARY

In this paper we obtain the field of non-standard real numbers as a quotient field of the ring of hermitian operators on a Hilbert space. In the last paragraph we interpret the non-standard real numbers in the context of theoretical physics.

§ 0. *Introducción*. **Utilizando un procedimiento análogo al de la construcción de los números no-convencionales a partir de la colección de las sucesiones numéricas [4], obtenemos en este trabajo el cuerpo de los números no-convencionales como un cuerpo cociente del anillo conmutativo de los operadores hermíticos. En el § 2, introducimos una clase de filtros en la colección de los subespacios de un espacio de Hilbert, los cuales utilizamos luego para dividir la colección de los operadores hermíticos en dos : la clase positiva y la clase negativa (¡ naturalmente los operadores definidos positivos deben pertenecer a la clase positiva !). Con esto podemos introducir un orden en el anillo conmutativo de los operadores hermíticos para el cual cada operador representa un número (real o no-convencional). Al final del parágrafo § 2, observamos que los operadores completamente continuos representan a los números infinitesimales. En el § 3** estudiamos la equivalencia entre los dos métodos para construir los números no-convencionales, el uno por sucesiones y el otro por operadores (desarrollado en el presente artículo). Finalmente, en el último parágrafo, damos una interpretación de los números infinitesimales en la física teórica.

§ *1. Un anillo conmutativo de operadores en el espacio de Hilbert.* Sea $\mathcal{H}$ un *espacio de Hilbert* de dimensión infinita. Dado un operador hermítico (más precisamente, un operador *auto-adjunto) H*, sea $\{E_H(\lambda)\}$ la resolución de la identidad de H ([2], [3], [4]):

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_H(\lambda) \; : \tag{1}$$

definimos entonces los tres subespacios :

$$\mathfrak{M}_H^+ = \int_0^{\infty} dE_H(\lambda) \, . \, \mathcal{H} = (1 - E_H(0)) \cdot \mathcal{H}$$

$$\mathfrak{M}_H^- = \int_{-\infty}^{0} dE_H(\lambda) \, . \, \mathcal{H} = E_H(0) \, . \, \mathcal{H} \, ,$$

$$\mathfrak{M}_H^o = (E_H(0) - E_H(0^-)) \, . \, \mathcal{H} \quad ;$$

los cuales gozan de las siguientes propiedades :

(i) $\mathfrak{M}_H^o = \{ x \mid Hx = 0 \} \subset \mathfrak{M}_H^-$.

(ii) $\mathfrak{M}_H^+$ es el *complemento ortogonal* de $\mathfrak{M}_H^-$, esto es, $\mathfrak{M}_H^+$ es ortogonal a $\mathfrak{M}_H^-$, y $\mathfrak{M}_H^+ \oplus \mathfrak{M}_H^- = \mathcal{H}$.

(iii) $< H.x \, , x > \; > 0$ para todo $x \in \mathfrak{M}_H^+$.

(iv) $< H.x, x > \; \leq 0$ para todo $x \in \mathfrak{M}_H^-$.

Si H no tiene a cero como valor propio, es decir, si $H.x = 0$ implica que $x = 0$, entonces existe H^{-1} que cumple

$$H^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \, dE_H(\lambda) \, . \tag{2}$$

H^{-1} es claramente un *operador hermítico.*

Si ahora $f(\lambda)$ es una función de valor real y medible según Lebesgue (*L*-medible), podemos definir el siguiente operador hermítico :

$$f(H) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_H(\lambda)\,. \tag{3}$$

Nótese que la función $f(\lambda)$ puede tomar el *valor infinito* en algunos puntos distintos de los valores propios del operador H. Por otra parte, si $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ son de valor real, tenemos :

$$f(H)\,.\,g(H) = g(H).\,f(H) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,.\,g(\lambda)\, dE_H(\lambda)\,; \tag{4}$$

$$f(H) + g(H) = \int_{-\infty}^{\infty} \{ f(\lambda) + g(\lambda) \}\, dE_H(\lambda). \tag{5}$$

Las relaciones (4) y (5) definen dos operaciones, con las cuales la familia de operadores hermíticos :

$$\mathfrak{A}_H = \{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_H(\lambda) \mid f(\lambda) \text{ es de valor real, } L\text{-medible} \} \tag{6}$$

se convierten en un *anillo conmutativo.* Si $f(H)$ no tiene valor propio nulo, entonces su inverso $f(H)^{-1}$ pertenece a $\mathfrak{A}_H$, y se tiene

$$f(H)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(\lambda)}\, dE_H(\lambda)\,, \tag{7}$$

es decir, $f(H)$ es una unidad del anillo $\mathfrak{A}_H$.

Si $\sigma \subseteq \mathbb{R}$ es un *conjunto medible*, es fácil ver que

$$P_\sigma = \int_\sigma dE_H(\lambda) \tag{8}$$

es un operador de proyección y que dados $\sigma, \tau \subseteq \mathbb{R}$, subsiste lo siguiente :

$$P_\sigma \cdot P_\tau = P_\tau \cdot P_\sigma = P_{\tau \cap \sigma}\,. \tag{9}$$

En particular, si $\phi_\sigma(\lambda)$ es la función característica del conjunto σ entonces :

$$P_\sigma = \int_\sigma dE_H(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\sigma(\lambda)\, dE_H(\lambda) = \phi_\sigma(H)\,. \tag{10}$$

El subespacio

$$P_\sigma \cdot \mathcal{H} \tag{11}$$

se llama *el subespacio propio de* H correspondiente al conjunto σ. Para $f(H) \in \mathfrak{A}_H$, tenemos evidentemente que

$$\mathfrak{M}^+_{f(H)} = \int_0^\infty dE_{f(H)}(\lambda) \,.\, \mathcal{H} = \int_\sigma dE_H(\lambda) \,.\, \mathcal{H} \tag{12}$$

con $\sigma = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid f(\lambda) > 0 \}$; esto es, $\mathfrak{M}^+_{f(H)}$ es un subespacio propio del operador H.

§ 2. *Filtro de subespacios.* Consideremos una familia no vacía $\mathcal{S}$ de subespacios de $\mathcal{H}$ tal que :

1. Si $A, B \in \mathcal{S}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{S}$ y además la proyección de A en B es $A \cap B$. (13)

2. Si $A, B \in \mathcal{S}$, y A es ortogonal a B, entonces

$$A \oplus B \in \mathcal{S}. \tag{14}$$

3. Si $A \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{H} \ominus A \in \mathcal{S}$.

Familias que cumplen las anteriores condiciones existen como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. La colección $\mathcal{S}$ de todos los subespacios propios de un operador hermítico satisface las tres condiciones anteriores. En efecto, dados $\sigma, \tau \subseteq \mathbb{R}$ obtenemos (por (9)) : $P_\sigma \cdot \mathcal{H} \cap P_\tau \cdot \mathcal{H} = P_{\sigma \cap \tau} \cdot \mathcal{H}$, y $P_\sigma \cdot P_\tau \cdot \mathcal{H} =$ Proyección de $P_\tau \cdot \mathcal{H}$ en $P_\sigma \cdot \mathcal{H} = P_{\sigma \cap \tau} \mathcal{H}$. Además $P_\sigma \cdot \mathcal{H}$ es ortogonal a $P_\tau \cdot \mathcal{H}$ si y sólo si $\sigma \cap \tau = \phi$. Observemos que $\{ 0 \} \in \mathcal{S}$ puesto que $\{ 0 \} = A \cap (\mathcal{H} \ominus A)$. También : $\mathcal{H} \in \mathcal{S}$ puesto que $\mathcal{H} = A \oplus (\mathcal{H} \ominus A)$.

Una colección $\mathcal{F}$ de subespacios en $\mathcal{S}$ se llama un *filtro de subespacios* en $\mathcal{S}$ si

(i) Si $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{S}$ y $B \supset A$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

(ii) Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(iii) $\{ 0 \} \notin \mathcal{F}$.

Nótese que un filtro de subespacios definido en la forma anterior *no* es en verdad un filtro en el sentido de la teoría de los conjuntos; sin embargo juega un papel semejante de éstos para clasificar los subespacios en $\mathcal{S}$. Observemos que si $A \in \mathcal{F}$ entonces ningún subespacio ortogonal a A pertenece a $\mathcal{F}$, puesto que si B es ortogonal a A entonces $A \cap B = \{0\} \notin \mathcal{F}$.

Mostremos ahora que el conjunto de todos los filtros de subespacios en $\mathcal{S}$ es *inductivo por inclusión*, esto es : Dada una cadena de filtros de subespacios en $\mathcal{S}$, $\{\mathcal{F}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, que cumple :

$$\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{F}_\mu \in \{\mathcal{F}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \quad \text{implica} \quad \mathcal{F}_\lambda \subset \mathcal{F}_\mu \text{ ó } \mathcal{F}_\mu \subset \mathcal{F}_\lambda,$$

entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ es un filtro de subespacios en $\mathcal{S}$.

En efecto : (i) Sea $A \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$, entonces $A \in \mathcal{F}_\lambda$ para algún λ. Si $B \in \mathcal{S}$ con $B \supset A$, entonces $B \in \mathcal{F}_\lambda$ (por (i)), luego : $B \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$.

(ii) Si $A,B \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$, entonces $A \in \mathcal{F}_\lambda$, $B \in \mathcal{F}_\mu$, para algún λ y para algún μ. Supongamos que $\mathcal{F}_\mu \supset \mathcal{F}_\lambda$, es claro que $A,B \in \mathcal{F}_\mu$; luego $A \cap B \in \mathcal{F}_\mu$, o sea, $A \cap B \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$.

(iii) Si $\{0\} \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$, entonces $\{0\} \in \mathcal{F}_\lambda$ para algún λ, lo cual es imposible y en consecuencia, $\{0\} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$.

Sean ahora $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ dos filtros de subespacios en $\mathcal{S}$. Decimos que $\mathcal{F}_1$ es *más fino que* $\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$. Por el axioma de Zorn, dado un filtro $\mathcal{F}$ de subespacios en $\mathcal{S}$, existe un filtro maximal $\mathcal{F}^*$ de subespacios en $\mathcal{S}$ más fino que $\mathcal{F}$; un tal filtro lo llamaremos *ultrafiltro de subespacios en* $\mathcal{S}$. Esto es, $\mathcal{F}^*$ debe satisfacer las siguientes propiedades :

(i) $\mathcal{F}^*$ es un filtro más fino que $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}^* \supset \mathcal{F}$).

(ii) No hay ningún filtro de subespacios en $\mathcal{S}$ más fino que $\mathcal{F}^*$ y distinto de $\mathcal{F}^*$.

De ahora en adelante, $\oplus$ indicará la suma ortogonal de subespacios.

LEMA. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro de subespacios en $\mathcal{S}$. Si $A,B \in \mathcal{S}$ son tales que

$A \oplus B \in \mathcal{F}^*$, *entonces* $A \in \mathcal{F}^*$ *ó* $B \in \mathcal{F}^*$.

Demostración. Supongamos que $A \notin \mathcal{F}^*$, $B \notin \mathcal{F}^*$. Sea P_o el operador proyección sobre el complemento ortogonal de A : $P_o . \mathcal{H} = \mathcal{H} \ominus A$, y definamos la siguiente familia de subespacios en $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{F}_o = \{ C \in \mathcal{S} \mid A \oplus P_o . C \in \mathcal{F}^* \} . \tag{15}$$

Nótese que $P_o . C$ siempre pertenece a $\mathcal{S}$ puesto que $P_o . C = C \cap (\mathcal{H} \ominus A)$. Vamos a demostrar que $\mathcal{F}_o$ es un filtro de subespacios en $\mathcal{S}$, y que $\mathcal{F}_o \neq \mathcal{F}^*$, $\mathcal{F}_o \supset \mathcal{F}^*$, lo cual evidentemente contradice la maximalidad de $\mathcal{F}^*$. En efecto : si $F \in \mathcal{F}^*$, entonces : $A \oplus P_o . F \in \mathcal{S}$, $A \oplus P_o . F \supset F$; luego $A \oplus P_o . F \in \mathcal{F}^*$, de modo que $F \in \mathcal{F}_o$ (esto es, $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}_o$). Es claro también que $\mathcal{F}^* \neq \mathcal{F}_o$, puesto que $B \notin \mathcal{F}^*$, pero $B \in \mathcal{F}_o$. (Nótese que $P_o . B = B$ ya que $B \subset \mathcal{H} \ominus A$). Finalmente, mostremos que $\mathcal{F}_o$ es un filtro de subespacios en $\mathcal{S}$. En efecto : (i) Supongamos que $C \in \mathcal{F}_o$; entonces $A \oplus P_o . C \in \mathcal{F}^*$. Si $D \supset C$, $D \in \mathcal{S}$ entonces $A \oplus P_o . D \supset A \oplus P_o . C$; por lo tanto se tiene que $A \oplus P_o . D \in \mathcal{F}^*$. (Nótese que $A \oplus P_o . D \in \mathcal{S}$ para todo $D \in \mathcal{S}$.) Esto es : $D \in \mathcal{F}_o$.

(ii) $\{0\} \notin \mathcal{F}_o$. En efecto, si $\{0\} \in \mathcal{F}_o$ entonces tendríamos $A \oplus P_o . \{0\} = A \in \mathcal{F}^*$, lo cual es imposible.

(iii) Supongamos que $C, D \in \mathcal{F}_o$, es decir, que $A \oplus P_o . C \in \mathcal{F}^*$, $A \oplus P_o . D \in \mathcal{F}^*$. Esto implica que : $(A \oplus P_o . C) \cap (A \oplus P_o . D) = A \oplus (P_o . C \cap P_o . D) \in \mathcal{F}^*$. Pero :

$$P_o . C \cap P_o . D = \{ (\mathcal{H} \ominus A) \cap C \} \cap \{ (\mathcal{H} \ominus A) \cap D \} = (\mathcal{H} \ominus A) \cap (C \cap D) = P_o . (C \cap D),$$

así que $C \cap D \in \mathcal{F}_o$.

Observemos, de paso, que si $A \oplus B \in \mathcal{F}^*$ y $A \in \mathcal{F}^*$, entonces $B \notin F^*$.

COROLARIO 1. Sea $A \in \mathcal{S}$; *entonces*

$$A \in \mathcal{F}^* \quad \text{ó} \quad \mathcal{H} \ominus A \in \mathcal{F}^* . \tag{16}$$

Demostración. Por la definición de $\mathcal{S}$, $\mathcal{H} \ominus A \in \mathcal{S}$, y como $\mathcal{H} = (\mathcal{H} \ominus A) \oplus A$, se obtiene (16).

COROLARIO 2. *Sean $A,B,C \in \mathcal{S}$, si $A \oplus B \oplus C \in \mathcal{F}^*$ entonces $A \oplus B \in \mathcal{F}^*$ ó $B \oplus C \in \mathcal{F}^*$.*

Demostración. Si $A \oplus B \notin \mathcal{F}^*$, entonces $C \in \mathcal{F}^*$; por lo tanto, $B \oplus C \in \mathcal{F}^*$.

Dado un operador hermítico H, consideremos $\mathcal{S}$ la colección de todos los subespacios propios de H (Véase el ejemplo 1.) Si $\mathcal{F}$ es la colección de subespacios definida por $\mathcal{F} = \{ A \in \mathcal{S} \mid \text{codimensión de } A \text{ es finita} \}$ entonces $\mathcal{F}$ es un *filtro* de subespacios en $\mathcal{S}$. Sea $\mathcal{F}^*$ un ultrafiltro de subespacios más fino que $\mathcal{F}$ y sea $\mathfrak{A}_H$ *el anillo de operadores* hermíticos definido en (6) :

$$\mathfrak{A}_H = \{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_H(\lambda) \mid f \text{ es de valor real y L-medible} \}. \tag{17}$$

Dado $T \in \mathfrak{A}_H$, hemos construido en el § 1 los tres subespacios $\mathfrak{M}_T^o$, $\mathfrak{M}_T^+$ y $\mathfrak{M}_T^-$ los cuales satisfacen las condiciones (i) -(iv) allí enunciadas. Ahora bien, decimos que :

$$T \geq 0 \quad \text{si} \quad \mathfrak{M}_T^o \oplus \mathfrak{M}_T^+ \in \mathcal{F}^*. \tag{18}$$

y como $\mathfrak{M}_T^+ \oplus \mathfrak{M}_T^o \oplus (\mathfrak{M}_T^- \ominus \mathfrak{M}_T^o) = \mathcal{H}$, y $\mathfrak{M}_T^- = \mathfrak{M}_{-T}^o \oplus \mathfrak{M}_{-T}^+$, se tiene que, para todo $T \in \mathfrak{A}_H$:

$$T \geq 0 \quad , \text{ o } \quad -T > 0. \tag{19}$$

Además, $T \geq 0$, y $-T \geq 0$ si,y sólo si,

$$\mathfrak{M}_T^o = \{ x \mid Tx = 0 \} \in \mathcal{F}^*. \tag{20}$$

Subsisten entonces las siguientes propiedades :

I. Si $T_1 \geq 0$, $T_2 \geq 0$, *entonces* $T_1 + T_2 \geq 0$.

II. Si $T_1 \geq 0$, $T_2 \geq 0$, *entonces* $T_1 . T_2 \geq 0$.

Demostración. Sean $T_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_H(\lambda)$, $T_2 = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, dE_H(\lambda)$ entonces

$$T_1 + T_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{ f(\lambda) + g(\lambda) \} dE_H(\lambda), \quad T_1 . T_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) . g(\lambda)\, dE_H(\lambda)$$

y,por lo tanto,

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \mid f(\lambda) + g(\lambda) > 0\} \supset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid f(\lambda) > 0\} \cap \{\lambda \in \mathbb{R} \mid g(\lambda) > 0\},$$

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \mid f(\lambda) . g(\lambda) > 0\} \supset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid f(\lambda) > 0\} \cap \{\lambda \in \mathbb{R} \mid g(\lambda) > 0\} .$$

Finalmente, por la primera propiedad satisfecha por un filtro, se obtienen las propiedades I y II.

Ejemplo 2. **Si** T **es definido positivo en** $\mathcal{H}$, **entonces** $T \geq 0$ **.**

Demostración. **Como para todo** $x \in \mathcal{H}$ **se tiene que** $< Tx, x > \geq 0$, **entonces**

$$\mathfrak{M}_T^+ \oplus \mathfrak{M}_T^o = \mathcal{H} \in \mathcal{F}^* .$$

Ejemplo 3. **Si el conjunto** $\{x \mid < Tx, x > \geq 0\}$ **contiene un subespacio de codimensión finita, entonces** $T \geq 0$ **.**

Demostración. **Tenemos de manera evidente que**

$$\{x \mid < Tx, x > \geq 0\} \supset \mathfrak{M}_T^+ \oplus \mathfrak{M}_T^o ,$$

$$\{x \mid < Tx, x > < 0\} \supset \mathfrak{M}_T^- \ominus \mathfrak{M}_T^o .$$

Si $\{x \mid < Tx, x > \geq 0\}$ **contiene un subespacio de codimensión finita, entonces la dimensión del subespacio** $\mathfrak{M}_T^- \ominus \mathfrak{M}_T^o$ **es finita, o sea que también lo es la codimensión de** $\mathfrak{M}_T^+ \oplus \mathfrak{M}_T^o$, **luego** $\mathfrak{M}_T^+ \oplus \mathfrak{M}_T^o \in \mathcal{F}^*$ **.**

Si $H_1, H_2 \in \mathfrak{A}_H$ **definimos :**

$$H_1 \geq H_2 \quad \text{si} \quad H_1 - H_2 \geq 0 . \tag{21}$$

De la (19) resulta que $\mathfrak{A}_H$ **está bien ordenado, o sea que**

$$H_1 \geq H_2 \qquad \text{o} \qquad H_2 \geq H_1 . \tag{22}$$

Subsisten además las siguientes propiedades :

III. $T \geq 0$ *si, y sólo si,* $-T \leq 0$ **(por (21)).**

IV. *Si* $T_1 \leq T_2, T_2 \leq T_3$, *entonces* $T_1 \leq T_3$ **(por (21) y I).**

V. *Si* $T_1 \leq T_2 , T_3 \leq T_4$, *entonces* $T_1 + T_3 \leq T_2 + T_4$ **(por (21) y I).**

VI. *Si* $T_1 \leq 0, T_2 \leq 0,$ *entonces* $T_1 . T_2 \geq 0$ **(por (21) y II).**

VII. *Si* $T_1 \geq 0,\ T_2 \leq 0,$ *entonces* $T_1 . T_2 \leq 0$ (por (21), II y III).

VIII. *Si* $T_1 \leq T_2, T_3 \geq 0$ *, entonces* $T_1 . T_3 \leq T_2 . T_3$ (por (21) y II).

IX. *Si* $T_1 \leq T_2\ ,\ T_3 \leq 0$ *, entonces* $T_1 . T_3 \geq T_2 \cdot T_3$ (por (21), II y III).

Decimos que $H_1 \sim H_2$ si

$$H_1 \geq H_2 \quad \text{y} \quad H_2 \geq H_1 . \tag{23}$$

Evidentemente, $H_1 \sim H_2$ si,y sólo si, $H_1 - H_2 \sim 0$. Por otra parte, de (20) se deduce que :

$$H_1 \sim H_2 \quad \text{si,y sólo si,} \quad \{ x \mid H_1\, x = H_2\, x \} \in \mathcal{F}^* . \tag{24}$$

Es fácil demostrar que $\sim$ es una *relación de equivalencia*. Decimos, por otra parte, que

$$H_1 > H_2 \quad \text{si,y sólo si,} \ H_1 \geq H_2 \ \text{ y } \ H_1 \not\sim H_2 . \tag{25}$$

X. *Si* $T \sim 0$*, entonces, para todo* $T_1 \in \mathfrak{A}_H$*, se tiene que* $T . T_1 \sim 0$.

Demostración. Como $T \sim 0$, resulta que $T \leq 0$ y $T \geq 0$. Supongamos que $T_1 \geq 0$, entonces (por II y III) : $T . T_1 \leq 0$, y $T . T_1 \geq 0$, esto es, $T . T_1 \sim 0$.

XI. *Si* $T_1 \sim 0$ *y* $T_2 \sim 0$ *entonces* $T_1 + T_2 \sim 0$ (por V).

XII. *Si* $T_1 \sim T_2$ *y* $T_3 \sim T_4$ *entonces* $T_1 + T_3 \sim T_2 + T_4$ (por XI).

XIII. *Si* $T_1 \sim T_2$ *y* $T_3 \sim T_4$ *entonces* $T_1 . T_3 \sim T_2 . T_4$.

Demostración. Como $T_1 \sim T_2$ si, y sólo si, $T_1 - T_2 \sim 0$, tenemos

$$(T_1 . T_3) - (T_2 . T_3) = (T_1 - T_2) . T_3 \sim 0 \quad \text{(por X).}$$

De la misma manera se tiene que

$$(T_2 . T_3) - (T_2 . T_4) \sim 0\ ; \quad \text{luego : } T_1 . T_3 - T_2 . T_4 \sim 0 \quad \text{(por XI) .}$$

XIV. *Si* $0 \leq T_1 \leq T_2$ *y* $T_2 \sim 0$ *, entonces* $T_1 \sim 0$.

Demostración. Por hipótesis, $T_2 - T_1 \geq 0\ ,\ - T_2 \geq 0\ ;$ luego $- T_1 = (T_2 - T_1) - T_2 \geq 0\ ;$ esto es, $T_1 \sim 0$.

XV. *Si* $T_1 \leq T_2 \leq T_3$, $T_1 \sim T_3$ *entonces* $T_1 \sim T_2$ *y* $T_2 \sim T_3$ **(por XIV).**

XVI. *Si* $T_1 < T_2$ *y* $T_3 \leq T_4$ *entonces* $T_1 + T_3 < T_2 + T_4$.

Demostración . **Basta demostrar que** $T_1 + T_3 \not\sim T_2 + T_4$. **Si tuviésemos** $T_1 + T_3 \sim T_2 + T_4$ **entonces** $T_2 + T_4 \leq T_1 + T_3 \leq T_1 + T_4$, **luego** $T_2 \leq T_1$, **o sea que** $T_1 \sim T_2$, **lo cual es contradictorio.**

XVII. *Si* $T_1 < T_2$ *y* $T_2 \leq T_3$ *entonces* $T_1 < T_3$ **(por XV).**

Ejemplo 4. **Sea** $T \in \mathfrak{A}_H$ **un operador hermítico positivamente definido en** $\mathcal{H}$; **si** T **no posee valor propio cero, entonces** $T > 0$.

TEOREMA 1. Si $T > 0$, *existe un operador* $T_1 \in \mathfrak{A}_H$ *definido positivo, uno a uno, y tal que* $T_1 \sim T$.

Demostración. **Si** $T > 0$ **se tiene que** $\mathfrak{M}_T^+ \oplus \mathfrak{M}_T^o \in \mathfrak{F}^*$, $\mathfrak{M}_T^o \notin \mathfrak{F}^*$ **luego** $\mathfrak{M}_T^+ \in \mathfrak{F}^*$. **Si** $T = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_H(\lambda)$, **entonces**

$$\mathfrak{M}_T^+ = \int_\sigma d\, E_H(\lambda) . \mathcal{H} , \quad \text{con} \quad \sigma = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid f(\lambda) > 0 \} \qquad (26)$$

Sea ahora

$$T_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)\, dE_H(\lambda) .$$

con

$$f_1(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda) & si \quad \lambda \in \sigma \\ 1 & si \quad \lambda \notin \sigma \end{cases}$$

de modo que

$$\{ x \mid Tx = T_1 x \} \supset \int_\sigma d\, E_H(\lambda) . \qquad (27)$$

De (26) y (27) resulta que : $\{ x \mid Tx = T_1 x \} \in \mathfrak{F}^*$; **o sea que** $T \sim T_1$. **Como** $f_1(\lambda) > 0$ **para todo** $\lambda \in \mathbb{R}$, **la siguiente desigualdad subsiste para todo** x **del dominio de** T_1 :

$$< T_1 x, x > = < \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) dE_H(\lambda).x, x > = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) d \| E_H(\lambda). x \|^2 > 0 \ ;$$

esto es, T_1 **es definido positivo y uno a uno, puesto que no admite a cero como**

valor propio.

COROLARIO 1 : Si $T \not\sim 0$, entonces existe $T \sim T_1$ tal que $T_1^{-1} \in \mathfrak{A}_H$.

Demostración. Sin pérdida de la generalidad, podemos limitarnos al caso $T > 0$. Si T_1 es el operador definido en la demostración del teorema, entonces T_1 no admite a cero como valor propio y por lo tanto, $T_1^{-1} \in \mathfrak{A}_H$.

COROLARIO 2. Si $T_1 . T_2 \sim 0$, entonces $T_1 \sim 0$, o $T_2 \sim 0$.

Demostración. Supongamos que $T_1 \not\sim 0$; entonces existe T tal que $T \sim T_1$, $T^{-1} \in \mathfrak{A}_H$. En virtud de XIII, $T.T_2 \sim 0$, y por consiguiente,

$$T_2 = T^{-1}. T. T_2 \sim 0 .$$

COROLARIO 3. Sea $\mathfrak{J} = \{ T \in \mathfrak{A}_H \mid T \sim 0 \}$; entonces $\mathfrak{J}$ es un ideal primo maximal de $\mathfrak{A}_H$.

Demostración.. En virtud de X y XI, $\mathfrak{J}$ es un ideal y es primo como consecuencia del Corolario 2, Teorema 1. Sea $\mathfrak{J}^*$ un ideal que cumple $\mathfrak{J}^* \supset \mathfrak{J}$ y $\mathfrak{J}^* \neq \mathfrak{J}$; entonces existe $T \not\sim 0$, $T \in \mathfrak{J}^*$. Por el Corolario 1, existe $T_1 \sim T$, con $T_1^{-1} \in \mathfrak{A}_H$. Tenemos $T_1 \in \mathfrak{J}^*$, ya que $T_1 = (T_1 - T) + T$, T , $T_1 - T \in \mathfrak{J}^*$. Por lo tanto, $I = T_1^{-1} . T_1 \in \mathfrak{J}^*$, esto es, $\mathfrak{J}^* = \mathfrak{A}_H$.

La clase cociente $\mathbb{R}^* = \mathfrak{A}_H / \sim$ es pues un cuerpo ; la clase representada por el operador T la denotamos con $[T]$ · Definimos, como es usual,

$$[T_1] < [T_2] \quad si \quad T_1 < T_2 . \tag{29}$$

Así, si I es el operador idéntico : $I = \int_{-\infty}^{\infty} dE_H(\lambda)$, y se nota con α la clase representada por $\alpha . I$ (con α real), vemos que

$$\alpha = [\alpha \cdot I] \tag{30}$$

con lo cual $\mathbb{R} = \{ \alpha \mid \alpha \textit{ real} \}$ es un subcuerpo de $\mathfrak{A}_H / \sim = \mathbb{R}^*$.

Un elemento $[T]$ se llama *infinitesimal* si $-\alpha \cdot I < T < \alpha \cdot I$, para todo $\alpha > 0$.

TEOREMA 2. Sea $T \in \mathfrak{A}_H$ un operador completamente continuo, entonces la *clase* $[T]$ *o es un infinitesimal, o es cero.*

Demostración. **Supongamos que** $T > 0$ **. Sea** $\{\phi_n\}$ **un sistema ortonormal completo del espacio** $\mathcal{H}$ **, entonces** $\phi_n \to 0$, **débilmente, cuando** $n \to \infty$ **; luego** $\| T.\phi_n \| \to 0 \ (n \to \infty)$ **, y por lo tanto :**

$$| < T\phi_n , \phi_n > | \leq \| T\phi_n \| \cdot \| \phi_n \| = \| T\phi_n \| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Dado $\alpha > 0$ **real, se tiene :**

$$< (\alpha \cdot I - T) . \phi_n , \phi_n > = \alpha - < T . \phi_n , \phi_n > \to \alpha \qquad (n \to \infty) \ ;$$

esto es, existe N_o **tal que**

$$< (\alpha \cdot I - T)\, \phi_n , \phi_n > \ > 0 \qquad \text{para todo} \quad n > N_o .$$

Por el ejemplo 3, vemos finalmente que $\alpha . I - T > 0$ **, o sea** $T < \alpha \cdot I$ **.**

§ 3. *Un operador diferencial en* $L_2(0,\pi)$. *Los números convencionales construidos por sucesiones.* **Sean** $\mathcal{H} = L_2(0,\pi)$ **y** $H = -\dfrac{d^2}{dt^2}$ **definido en el dominio** $D_H = \{ x(t) \in L_2(0,\pi) \mid x(0) = x(\pi) = 0 \}$ **. Evidentemente** H **es hermítico . Por otra parte,** H **es definido positivo ya que**

$$< Hx, x > = \int_0^{\pi} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \overline{x(t)}\, dt = -x'(t)\overline{x(t)} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x'(t)\, \overline{x'(t)}\, dt$$

$$= 0 + \int_0^{\pi} | x'(t) |^2 \, dt \geq 0 .$$

Como H **no posee valor propio nulo, entonces** $H > 0$ **, y existe el operador inverso de** H **dado por :**

$$H^{-1} x = \int_0^{\pi} K(s,t)\, x(s)\, ds$$

en donde

$$K(s,t) = \begin{cases} s(1 - \frac{1}{\pi}) & si \quad 0 \leq s \leq t \\ t(1 - \frac{s}{\pi}) & si \quad t \leq s \leq \pi \ . \end{cases}$$

Observemos, de paso, que un cálculo directo nos da :

$$H^{-1}.H.x = -\int_0^{\pi} K(s,t).\, x''(s)\, ds = x(t) - \frac{t}{\pi}\, x(\pi) - \left(1 - \frac{t}{\pi}\right) x(0) = x(t)\,,$$

por ser $x(0) = x(\pi) = 0$ **para** $x \in D_H$.

Sabemos, por otra parte, que todo operador integral de núcleo acotado es completamente continuo, de modo que H^{-1} **representa un *número infinitesimal* positivo en** $\mathbb{R}^* = \mathfrak{A}_H/\sim$.

Las funciones propias del operador diferencial H **están dadas por**

$$\phi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \operatorname{sen} nt \qquad (n = 1,2,3,\ldots)\,. \tag{31}$$

Por la teoría de las series de Fourier, sabemos que $\{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ **es un sistema ortonormal completo del espacio** $\mathcal{H} = L_2(0,\pi)$. **Vemos, pues, que todos los espectros del operador** H **son valores propios simples ; por lo tanto, la colección de todos los operadores hermíticos permutables con el operador** H **es igual al anillo** $\mathfrak{A}_H$ [2] **. En realidad tenemos :**

$$\left.\begin{array}{l} E_H(\lambda) = 0, \quad si \quad \lambda < 1\,, \\[2mm] E_H(\lambda) = E_H(n^2)\,, \quad si \quad n^2 \leq \lambda < (n+1)^2 \\[2mm] \{E_H(n^2) - E_H(n^2 - 0)\}\cdot \mathcal{H} = \{\phi_n\}\ . \end{array}\right\} \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{32}$$

Sea $f(\lambda)$ **una función definida en** $\mathbb{R}$ **; entonces :**

$$f(H) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,.\, dE_H(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n^2)\,.\,\{E_H(n^2) - E_H(n^2 - 0)\}\,,$$

y si $x(t) \in L_2(0,\pi)$ **, entonces**

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\,.\,\phi_n(t)\,, \qquad \text{con} \qquad x_n = \langle x(t)\,,\, \phi_n(t)\rangle\ ;$$

por lo tanto,

$$f(H)\,.\,x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n^2)\,.\,x_n\,.\,\phi_n(t)\,. \tag{33}$$

De modo que si definimos la sucesión numérica (a_n) por :

$$a_n = f(n^2) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad ,$$

entonces, en virtud de (33) podemos identificar el operador $f(H)$ con la sucesión (a_n). Más precisamente, se puede establecer una correspondencia biunívoca

$$f(H) \longleftrightarrow (a_n) = (f(n^2))$$

entre $\mathfrak{A}_H$ y $\mathbb{R}^\infty$. Evidentemente esta correspondencia es un isomorfismo de anillos :

$$\mathfrak{A}_H \approx \mathbb{R}^\infty$$

y por lo tanto, induce un isomorfismo de cuerpos :

$$\mathfrak{A}_H / \mathfrak{I} \approx \mathbb{R}^\infty / \overline{\mathfrak{I}}$$

en donde $\overline{\mathfrak{I}}$, la imagen de $\mathfrak{I}$ por el isomorfismo, es un ideal maximal de $\mathbb{R}^\infty$. Por el teorema de Łoš [6; pág. 83-84], una potencia del cuerpo $\mathbb{R}$ dividida por un ideal maximal, $\mathbb{R}^\infty / \overline{\mathfrak{I}}$, es isomorfa a una *ultrapotencia* de $\mathbb{R}$, y por lo tanto, es una extensión *elemental* de $\mathbb{R}$; esto es, si $\mathbb{R}^\infty / \overline{\mathfrak{I}}$ es isomorfo a un cuerpo de reales *no-convencionales,* también lo es $\mathfrak{A}_H / \mathfrak{I}$. La situación sería diferente si se hubiera utilizado el espacio $L_2(-\infty, \infty)$, puesto que en este caso el operador diferencial no posee valores propios en $L_2(-\infty, \infty)$.

§ 4. *Explicación de los números no-convencionales en la física teórica.* Sabemos que en la física teórica toda cantidad observable en el universo es representada por un *operador hermítico* y los *valores observados* (¡ en algún experimento!) de una cantidad física son los valores propios del operador correspondiente a la cantidad [5]. Además, dos cantidades son *observables simultáneamente* si son representados por operadores *permutables* entre sí. Podemos pensar pues, que los números reales son también aquellas cantidades observables en el universo, para las cuales se cumple la propiedad siguiente :

"Al observar la cantidad correspondiente al número real α *en cualquier estado físico* del universo, siempre se obtiene el valor numérico α".

Por esta propiedad, el operador correspondiente a la cantidad *número real* α debe tener un único valor propio α, así que tal operador es igual a $\alpha \cdot I$ en donde I es el operador idéntico. Como I es permutable con cualquier operador hermítico la *cantidad* α es observable simultáneamente con cualquier cantidad física del universo.

Los operadores hermíticos del anillo conmutativo $\mathfrak{A}_H$ son todos representantes de algunas cantidades físicas del universo, observables simultáneamente. De modo que *los números infinitesimales* también deben ser representantes de algunas cantidades existentes. Por ejemplo, el operador integral H^{-1} en el parágrafo anterior debe interpretarse en el mundo de la física teórica como sigue : Como los valores propios de H^{-1} son :

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots, \tag{34}$$

entonces al medir esta cantidad *infinitesimal* se obtiene "uno" de los números de la lista (34), de acuerdo con el estado físico en que se realice el experimento de la medición. De la misma manera, *el número no-convencional* representado por la sucesión (a_n) es una cantidad física observable en el universo, medible simultáneamente con cualquier otro número *(real* o *no-convencional),* y al realizar la observación de su *valor* se obtiene *uno* de los números de la lista siguiente :

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots \tag{35}$$

según el estado en que se realiza el experimento de la medición del valor, en contraste con la cantidad *Número real* cuya medición siempre da un único valor en cualquier estado de la observación.

Referencias

1. *A. Takahashi, Infinitesimales,* Boletín de Matemáticas, X(1976) (próxima aparición).
2. *M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space,* American Math. Soc. New York, 1936.

3. *F. Riesz, B. SZ. Nagy. Functional Analysis,* Frederick Ungar Pub. Co., New York, 1955.

4.- *Y. Takeuchi. Espacio de Hilbert,* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1967.

5. *P.A.M. Dirac. The Principles of Quantum Mechanics,* Oxford University Press, London, 1947.

6. *Kopperman, R. Model Theory and its applications,* Allyn & Bacon, Boston *1972.*

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D. E. Colombia, S. A.

(Recibido en enero de 1976).