

SOLUCION DE ECUACIONES INTEGRALES

DOBLES ASOCIADAS CON LA FUNCION H,

POR MEDIO DE LOS OPERADORES L y L^{-1}

por

A.M.M. de GOMEZ LOPEZ y S.L. KALLA

RESUMEN

En este trabajo consideraremos la solución de ecuaciones integrales dobles que involucran a la función H de Fox [4], por medio de los operadores L y L^{-1} . Las ecuaciones integrales dadas, deben ser transformadas en otras dos con núcleo común, con lo cual el problema se reduce a la solución de ecuaciones integrales simples. Al ser el núcleo común un núcleo simétrico de Fourier la solución se obtiene fácilmente.

ABSTRACT

In the present paper, we obtain the solution of a pair of dual integral equations involving Fox's H-function. The solution has been obtained by an appeal to the Laplace transform and their inverses. By applications of L and L^{-1} operators, we reduce the dual integral equations to the other pair with the same kernel, which happens to be a Fourier symmetrical kernel, and can be easily inverted.

§ 1 Introducci3n. Por la definici3n de la funci3n H introducida por Fox [4], tenemos:

$$H_{p,q}^{m,n} \left(x \mid \begin{matrix} \{(a_i, \alpha_i)\} \\ \{(b_i, \beta_i)\} \end{matrix} \right) =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i + \beta_i s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod_{i=1}^q \Gamma(1 - b_i - \beta_i s) \prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i s)} x^{-s} ds, \quad (1)$$

Donde la notaci3n $\{(a_i, \alpha_i)\}$, significa $(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2), \dots, (a_p, \alpha_p)$. Adem3s, el producto vac3o es considerado como unidad; x no es igual a cero y m, n, p, q son enteros positivos que satisfacen la relaci3n:

$$0 \leq m \leq q, \quad 0 \leq n \leq q; \quad \text{finalmente:}$$

$\alpha_i (i = 1, 2, \dots, p)$, $\beta_j (j = 1, 2, \dots, q)$,

son números positivos, y

$a_i (i=1, \dots, p)$, $b_j (j = 1, \dots, q)$, son números com
plejos.

Todos los polos del integrando en (1) son simples. El contorno L es una recta paralela al eje imaginario en el plano complejo $s = \sigma + it$, σ y t reales, tal que todos los polos de $\Gamma(b_i + \beta_i s)$, para $i = 1, \dots, m$, están a la izquierda de L y aquellos de $\Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)$, para $i = 1, \dots, n$, están a la derecha de L.

Para la definición, la continuación analítica y el desarrollo asintótico se puede consultar el trabajo de Braaksma [1] .

Fox [4] ha demostrado que la función

$$H_{\frac{m+n, p+q}{2(p+q), 2(m+n)}}(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) x^{-s} ds, \quad (2)$$

donde

$$M_{m,n,p,q}(s) = \prod_{j=1}^m \pi \Gamma(c_j - \frac{\gamma_j}{2} + \gamma_j s) \prod_{j=1}^p \pi \Gamma(a_j + \frac{\alpha_j}{2} - \alpha_j s) \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^n \pi \Gamma(d_j - \frac{\delta_j}{2} + \delta_j s) \prod_{j=1}^q \pi \Gamma(b_j + \frac{\beta_j}{2} - \beta_j s).$$

$$\cdot \left\{ \pi \prod_{j=1}^n \Gamma(d_j + \frac{\delta_j}{2} - \delta_j s) \prod_{j=1}^q \Gamma(b_j - \frac{\beta_j}{2} + \beta_j s) \right\}^{-1}$$

$$\cdot \left\{ \pi \prod_{j=1}^m \Gamma(c_j + \frac{\gamma_j}{2} - \gamma_j s) \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j - \frac{\alpha_j}{2} + \alpha_j s) \right\}^{-1}$$

tiene núcleo simétrico de Fourier.

De (2) se sigue que la transformada de Mellin de

$$H_{2(p+q), 2(m+n)}^{m+n, p+q}(x) \quad \text{es} \quad M_{m, n, p, q}(s),$$

en donde

$$M \left\{ H_{2(p+q), 2(m+n)}^{m+n, p+q}(x) \right\} = M_{m, n, p, q}(s) \quad (3)$$

La transformada de Laplace de $\varphi(x)$ se indica con $L\{\varphi(x)\}$ y se define por:

$$L\{\varphi(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-xt} \varphi(x) dx = \psi(t); \quad (4)$$

con $\varphi(x)$ y $\psi(t)$ relacionadas por (4), la transformada inversa de Laplace de $\psi(t)$ es:

$$L^{-1}\{\psi(t)\} = \varphi(x). \quad (5)$$

Simbólicamente podemos escribir:

$$L^{-1} L = L L^{-1} = 1. \quad (6)$$

La transformada de Mellin de $f(u)$ la indicamos por $M\{f(u)\} = F(s)$ y podemos escribir que $f(u) = M^{-1}\{F(s)\}$. Es decir:

$$M\{f(u)\} = F(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} f(u) du, \quad (7)$$

y

$$M^{-1}\{F(s)\} = f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_L F(s) u^{-s} ds. \quad (8)$$

Las condiciones para la validez de (7) y (8) pueden encontrarse por ejemplo, en Titchmarsh [14].

El teorema de Mellin-Parseval [14, p.94] dice que:

$$\text{Si: } M\{h(u)\} = H(s)$$

y

$$M\{f(xu)\} = x^{-s} F(s)$$

entonces

$$\int_0^{\infty} h(xu) f(u) du = \frac{1}{2\pi i} \int_L x^{-s} H(s) F(1-s) ds \quad (9)$$

El siguiente teorema de Fox [5, p.200], también se rá utilizado en este trabajo.

Si:

- (i) $\alpha > 0, \frac{1}{2} \alpha + \beta > 0, t > 0$;
- (ii) $s = \sigma + i\mu$, σ y μ reales;
- (iii) $F(s) \in L(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty)$,

entonces:

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma(\alpha s + \beta) F(s) t^{-\alpha s - \beta} ds\right\} &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(s) x^{\alpha s + \beta - 1} ds, \end{aligned} \quad (10)$$

en donde para ambas integrales el contorno C, puede ser la línea $\sigma = \frac{1}{2}$, paralela al eje imaginario en el plano complejo s. Además:

$$L\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{H(s)}{\Gamma(\alpha s + \beta)} x^{\alpha s + \beta - 1} ds\right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_C H(s) t^{-\alpha s - \beta} ds. \quad (11)$$

Encontramos ecuaciones integrales dobles en varios problemas de Física Matemática ([12] y [15]).

Los operadores L y L^{-1} son muy útiles para resolver ecuaciones integrales; existen además tablas de estos operadores ([2] y [11]). Estos operadores fueron utilizados por Fox [5], Verma [16] y Gómez López [8] en la solución de ciertas ecuaciones integrales. Otro método elegante de resolver ecuaciones integrales es mediante operadores de integración fraccional [3], [6], [7], [9], [13].

En este trabajo estudiaremos un par de ecuaciones integrales dobles con la función H como núcleo. Por medio de los operadores L y L^{-1} transformaremos las ecuaciones en otras dos con un núcleo común, reduciéndose el problema a la solución de ecuaciones integrales simples.

Siendo el núcleo común un núcleo simétrico de Fourier, la solución se obtendrá fácilmente.

§ 2 Las ecuaciones integrales dobles. Queremos

encontrar la solución de las siguientes ecuaciones integrales:

$$\int_0^{\infty} H_{2p+2q+1, 2m+2n+1}^{m+n+1, p+q}(xu) f(u) du = \varnothing(x), \quad 0 < x \leq 1, \quad (12)$$

$$\text{y} \quad \int_0^{\infty} H_{2p+2q+2, 2m+2n+1}^{m+n+1, p+q}(xu) f(u) du = \psi(x), \quad x > 1, \quad (13)$$

donde $\varnothing(x)$ y $\psi(x)$ están dadas y $f(x)$ debe determinarse. Las funciones H que aparecen en (12) y (13) se definen de la siguiente manera:

$$H_{2p+2q+1, 2m+2n+1}^{m+n+1, p+q}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) \cdot \frac{\Gamma(\lambda+s)}{\Gamma(\mu+s)} x^{-s} ds, \quad (14)$$

en donde

$$M_{m,n,p,q}(s) = \prod_{j=1}^m \Gamma(c_j - \frac{\gamma_j}{2} + \gamma_j s) \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j + \frac{\alpha_j}{2} - a_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(d_j - \frac{\delta_j}{2} + \delta_j s) \prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + \frac{\beta_j}{2} - \beta_j s) \cdot \left\{ \prod_{j=1}^n \Gamma(d_j + \frac{\delta_j}{2} - \delta_j s) \prod_{j=1}^q \Gamma(b_j - \frac{\beta_j}{2} + \beta_j s) \right\}^{-1} \cdot \left\{ \prod_{j=1}^m \Gamma(c_j + \frac{\gamma_j}{2} - \gamma_j s) \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j - \frac{\alpha_j}{2} + a_j s) \right\}^{-1}; \quad (15)$$

de (14) síguese que:

$$M \{ H_{2p+2q+1, 2m+2n+1}^{m+n+1, p+q}(x) \} = M_{m,n,p,q}(s) \cdot \frac{\Gamma(\lambda+s)}{\Gamma(\mu+s)}, \quad (16)$$

en donde M denota la transformada de Mellin.

Suponemos ahora que las siguientes condiciones están satisfechas:

(i) $s = \sigma + it$, donde σ y t son reales. C es la recta paralela al eje imaginario en el plano complejo s de ecuación $\sigma = \frac{1}{2}$.

(ii) Todos los polos del integrando en (14) son simples. El contorno L es tal que todos los polos de

$$\Gamma(c_j - \frac{\gamma_j}{2} + \gamma_j s), \Gamma(d_j - \frac{\delta_j}{2} + \delta_j s), \Gamma(\lambda + s)$$

están a la izquierda, y aquellos de

$$\Gamma(a_j + \frac{\alpha_j}{2} - \alpha_j s), \Gamma(b_j + \frac{\beta_j}{2} - \beta_j s)$$

están a la derecha.

$$(iii) D = 2 \left(\sum_1^m \gamma_j - \sum_1^p \alpha_j + \sum_1^n \delta_j - \sum_1^q \beta_j \right) > 0.$$

$$(iv) \frac{1}{D} (\lambda - \mu) < 0 \quad \text{en virtud de (14).}$$

Además:

$$H_{2p+2q+2, 2m+2n+1}^{m+n+1, p+q}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) \cdot$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\epsilon + s)}{\Gamma(\eta + s)\Gamma(\rho + s)} x^{-s} ds, \quad (17)$$

donde $M_{m,n,p,q}(s)$ está dado por (15).

De (17) síguese que:

$$M \{ H_{m+n+1,p+q}^{2p+2q+2,2m+2n+1}(x) \} = M_{m,n,p,q}(s).$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\epsilon + s)}{\Gamma(\eta + s)\Gamma(\rho + s)}, \quad (18)$$

donde M indica la transformada de Mellin.

Las condiciones para la validez para (17) son similares a las obtenidas en (14).

§ 3 Solución de las ecuaciones integrales (12) y (13). Vamos ahora a transformar las ecuaciones integrales (12) y (13) en otras dos con el mismo núcleo, haciendo uso de los operadores L y L^{-1} .

Teniendo en cuenta (16) y (18) y siendo

$$M \{ f(u) \} = F(s),$$

aplicamos (9) a (12) y (13), obteniendo:

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) \frac{\Gamma(\lambda + s)}{\Gamma(\mu + s)} x^{-s} F(1-s) ds,$$

$$0 < x < 1, \quad (19)$$

y

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) \frac{\Gamma(\epsilon+s)}{\Gamma(\eta+s)\Gamma(\rho+s)} x^{-s} F(1-s) ds, \\ x > 1. \quad (20)$$

Pasamos ahora a transformar la ecuación (19), en la que:

$$M_{m,n,p,q}(s) \cdot \frac{\Gamma(\lambda+s)}{\Gamma(\mu+s)} \cdot x^{-s} = M \left\{ \begin{matrix} m+n+1, p+q \\ 2p+2q+1, 2m+2n+1 \end{matrix} (xu) \right\}, \quad (21)$$

$$F(s) = M \{ f(u) \}.$$

Para ello debemos eliminar las dos funciones gamma que aparecen en el integrando de (19), utilizando (10) y (11). Eliminaremos primero $\Gamma(\lambda+s)$, y luego $\Gamma(\mu+s)$.

Escribiendo (19) en la forma:

$$x^{-\lambda} \phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) F(1-s) \frac{\Gamma(\lambda+s)}{\Gamma(\mu+s)} x^{-\lambda-s} ds, \quad (22)$$

y aplicando L^{-1} tenemos:

$$L^{-1}\{x^{-\lambda} \phi(x)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) F(1-s) \frac{1}{\Gamma(\mu+s)} t^{\lambda+s-1} ds; \quad (23)$$

(23) puede escribirse ahora en la forma:

$$t^{\mu-\lambda} \cdot L^{-1}\{x^{-\lambda} \phi(x)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) F(1-s) \frac{t^{\mu+s-1}}{\Gamma(\mu+s)} ds. \quad (24)$$

Aplicando L a (24) obtenemos:

$$L \{ t^{\mu-\lambda} \cdot L^{-1} \{ x^{-\lambda} \phi(x) \} \} = \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) F(1-s) x^{-\mu-s} ds \quad (25)$$

de donde:

$$\begin{aligned} x^{\mu} \cdot L \{ t^{\mu-\lambda} \cdot L^{-1} \{ x^{-\lambda} \phi(x) \} \} &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) F(1-s) x^{-s} ds. \end{aligned} \quad (26)$$

Haciendo

$$t_1(x) = x^{\mu} \cdot L \{ t^{\mu-\lambda} \cdot L^{-1} \{ x^{-\lambda} \phi(x) \} \}, \quad (27)$$

(26) puede escribirse en la forma:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) x^{-s} F(1-s) ds = t_1(x), \quad 0 < x < 1 \quad (28)$$

Procederemos ahora a transformar la ecuación (20), en la que:

$$\begin{aligned} M_{m,n,p,q}(s) \cdot \frac{\Gamma(\epsilon+s)}{\Gamma(\eta+s)\Gamma(\rho+s)} x^{-s} &= \\ &= M \left\{ \begin{matrix} m+n+1, p+q \\ 2p+2q+2, 2m+2n+1 \end{matrix} (xu) \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

y

$$F(s) = M \{ f(u) \}.$$

En (20) debemos eliminar las tres funciones gamma que aparecen en el integrando; esto lo hacemos siguiendo un procedimiento similar al utilizado

para transformar la ecuación (20), utilizando (10) y (11). Eliminando las funciones en el siguiente orden, $\Gamma(\epsilon+s)$, $\Gamma(\eta+s)$, $\Gamma(\rho+s)$, obtenemos suc
sivamente:

$$L\{t^{\rho-\eta-1} \cdot [L\{t^{\eta-\epsilon} L^{-1}\{x^{-\epsilon}\psi(x)\}\}]_{x=t-1}\} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) F(1-s)x^{-\rho-s} ds, \quad (30)$$

y

$$x^\rho \cdot L\{t^{\rho-\eta-1} [L\{t^{\eta-\epsilon} \cdot L^{-1}\{x^{-\epsilon}\psi(x)\}\}]_{x=t-1}\} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) F(1-s)x^{-s} ds, \quad (31)$$

Haciendo

$$t_2(x) = \{x^\rho \cdot L\{t^{\rho-\eta-1} [L\{t^{\eta-\epsilon} L^{-1}\{x^{-\epsilon}\psi(x)\}\}]_{x=t-1}\},$$

la (31) puede escribirse:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) F(1-s)x^{-s} ds = t_2(x), \\ x > 1. \quad (32)$$

De (28) y (32) podemos escribir:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L M_{m,n,p,q}(s) F(1-s) x^{-s} = t(x), \quad (33)$$

en donde

$$t(x) = \begin{cases} t_1(x) = \{x^\mu \cdot L\{t^{\mu-\lambda} L^{-1}[x^{-\lambda}\phi(x)]\}\} ; & 0 < x < 1 \\ t_2(x) = \{x^\rho \cdot L\{t^{\rho-\eta-1} [L\{t^{\eta-\epsilon} L^{-1}\{x^{-\epsilon}\psi(x)\}\}]_{x=t-1}\} \}. & x > 1 \end{cases} \quad (34)$$

Ahora bien, la (33), en virtud de (3), es:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L M\{H_{2(p+q), 2(m+n)}^{m+n, p+q}(u)\} x^{-s} F(1-s) ds = t(x) . \quad (35)$$

En virtud de (9), la (35) puede escribirse:

$$\int_0^\infty H_{2p+2q, 2m+2n}^{m+n, p+q}(xu) f(u) du = t(x) , \quad (36)$$

en donde $H(xu)$ se define como en (2).

Siendo $H(xu)$ un núcleo simétrico de Fourier, la solución es:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty t(u) \cdot H_{2(p+q), 2m+2n}^{m+n, p+q}(xu) du \\ f(x) &= \int_0^1 t_1(u) H_{2(p+q), 2(m+n)}^{m+n, p+q}(xu) du + \\ &+ \int_1^\infty t_2(u) H_{2(p+q), 2(m+n)}^{m+n, p+q}(xu) du , \end{aligned} \quad (37)$$

o sea:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \{u^\lambda \cdot L\{t^{u-\lambda} L^{-1}\{u^{-\lambda} \phi(u)\}\} \cdot \\ &\cdot H_{2(p+q), 2(m+n)}^{m+n, p+q}(xu) du + \int_1^\infty \{u^\rho \cdot \\ &\cdot L\{t^{\rho-\eta-1} [L\{t^{\eta-\epsilon} L^{-1}\{u^{-\epsilon} \psi(u)\}\}]_{u=t^{-1}}\} \cdot \\ &\cdot H_{2(p+q), 2(m+n)}^{m+n, p+q}(xu) du . \end{aligned}$$

§ 4 Casos Especiales. Tomando $p = 0$, $q = 0$,
 $n = 0$, $m = 1$, $\lambda = 0$,
 $\mu = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, $j = 1$, $c_1 - \frac{1}{2} = a$, $\rho = \varepsilon$,
 $\eta = \frac{1}{2}$, obtenemos en (2), usando [2, p.374] :

$$H_{\substack{m+n, p+q \\ 2(p+q), 2(m+n)}}(x) = J_{2a}(2\sqrt{x}) . \quad (39)$$

En (14), usando [2, p.337] obtenemos:

$$H_{\substack{m+n+1, p+q \\ 2p+2q+1, 2m+2n+1}}(x) = -\Pi^{1/2} J_a(\sqrt{x}) Y_a(\sqrt{x}), \quad (40)$$

En (17);

$$H_{\substack{m+n+1, p+q \\ 2p+2q+2, 2m+2n+1}}(x) = G_{12}^{10} \left(x \middle| \begin{matrix} 1/2 \\ a; -a \end{matrix} \right)$$

Por Mathai y Saxena [10, p.61]

$$G_{12}^{10} \left(x \middle| \begin{matrix} 1/2 \\ a; -a \end{matrix} \right) = \Pi^{-1/2} \cos(a\Pi) e^{x/2} I_a(x/2) ; \quad (41)$$

en donde $J_Y(x)$, $Y_Y(x)$ son funciones de Bessel y G es la bien conocida función de Meijer [4] .

Entonces para (12) y (13) por (40) y (41) tendremos:

$$\int_0^\infty \Pi^{-1/2} J_a(\sqrt{xu}) Y_a(\sqrt{xu}) f(u) du = \phi(x), \quad 0 < x < 1$$

y

$$\int_0^\infty \Pi^{-1/2} \cos(a\Pi) e^{xu/2} I_a(xu/2) f(u) du = \psi(x), \quad x > 1 ,$$

Por lo tanto, para (37) obtendremos:

$$f(x) = \int_0^1 t_1(u) J_{2a}(2\sqrt{xu}) du + \int_1^\infty t_2(u) J_{2a}(2\sqrt{xu}) du,$$

donde $t_1(u)$ y $t_2(u)$ están dados en (34).

Tomando $n = 0$ y $q = 0$ en (12) y (13), tendremos:

$$\int_0^{m+1,p} H_{2p,2m+1}(xu) f(u) du = \phi(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$y \int_0^{m+1,p} H_{2p+2,2m+1}(xu) f(u) du = \psi(x), \quad x > 1.$$

Su solución por (37) será:

$$f(x) = \int_0^1 t_1(u) H_{2p,2m}^{m,p}(xu) du + \int_1^\infty t_2(u) H_{2p,2m}^{m,p}(xu) du$$

en donde $H_{2p,2m}^{m,p}(x)$, es un núcleo simétrico de Fourier [4].

REFERENCIAS.

- [1] Braaksma, B.L.J.: Asymptotic expansions and analytic continuations for a class of Barnes-integrals. Compos. Math. 15, 259-341 (1963).
- [2] Erdélyi, A.: et al: Tables of integral Transforms, Vol. 1, Mc Graw-Hill, New York, (1954).
- [3] Erdélyi, A.: An integral equation involving Legendre functions. SIAM J. Appl. Math., 12 (1964), 15-30.

- [4] Fox, C.: The G and H-functions as symmetrical Fourier kernels. *Tras. Amer. Math. Soc.* 98, 395-429 (1961).
- [5] Fox, C.: Solving integral equations by L and L^{-1} operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* 29 (1971) N° 2, (p.299-306).
- [6] Fox, C.: Applications of Laplace transforms and their inverses. *Proc. Amer. Math. Soc.* 35 (1972), (p. 193-200).
- [7] Fox, C.: A formal solution of certain dual integral equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 119 (1965), 389-398.
- [8] Gómez-López, A.M.M.: The inversion formulae for some hypergeometric transforms. *Tohoku Mathematical Journal.* Vol. 26. N° 2 (p. 315-323), (1974).
- [9] Kumbhat, R.K. and Saxena, R.K.: A formal solution of certain triple integral equations involving H-functions. *Proc. Nat. Acad. Sc. India* (1974).
- [10] Mathai, A.M. and Saxena, R.K.: Generalized Hypergeometric Functions, with Applications in Statistics and Physical Sciences. Springer Vestae, (1973).
- [11] Oberhettinger, F. and Baddi, L.: Tables of Laplace Transforms. Springer Ves, New York-Heidelberg, (1973).

- [12] Sneddon, J.N.: Mixed Boundary value Problems in Potential Theory North Holland Publishing Co, (1966).
- [13] Saxena, R.K. and Kumbhat.: Dual Integral equations associated with Functions. Proc.Nat. Acad. Sci., India (1974).
- [14] Titchmarsh, E.C.: And introduction to the theory of Fourier integrals Oxford (1939).
- [15] Tranter, C.J.: Integral Transform in Mathematical Physic. 2nd. Ed. Meuthem and Co, London, Jhon Wiley, New York (1956).
- [16] Verma, R.U.: Solution of an integral equation by L and L^{-1} operators. Analele Stiintifice universitatii, Al. I. Cuza. Din Iasi, Sem. Matematic. Tomul XX (1974).

Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia y
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología.
Universidad Nacional de Tucumán.
Tucumán, Argentina, S. A.

(Recibido en julio de 1976).