Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XI (1977) pags. 77 - 108

ESPACIO CON LA METRICA OPERADOR

por

Yu TAKEUCHI

§ Introduccion.

Según la Mecánica Cuántica [4], un sistema mecánico está formado por muchos estados mecánicos, hablando en términos matemáticos, un sistema mecánico se identifica con un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ cuyos elementos (o vectores) representan los estados mecánicos del sistema. Una cantidad física observable T es un operador hermítico en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y al realizar la medición del valor de esta cantidad T se obtiene uno de los valores propios del operador T. Sean

$$\varphi_k \ (k = 1,2,3,\ldots) \quad \text{con } \|\varphi_k\| = 1 \tag{1}$$

los vectores propios (o los estados propios) del operador T correspondientes a los valores propios:

$$\lambda_k \ (k = 1,2,3,\ldots) ; \tag{2}$$

entonces $\{\varphi_k / k \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal completo del espacio $\mathcal{H}$. Si se observa la cantidad física T en uno de los estados propios, digamos en φ_k, entonces se obtiene λ_k como el valor observado de T. Sea ψ (con $\|\psi\| = 1$) un estado diferente a los estados propios de T; desarrollando ψ en el sistema $\{\varphi_k\}$ tenemos:

$$\psi = \Sigma_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k , \tag{3}$$

donde

$$a_k = \langle \psi . \varphi_k \rangle .$$

Si se hace la medición del valor de la cantidad física T en el estado ψ entonces la observación hace transferir el estado ψ a uno de los estado propios φ_k con la probabilidad $|a_k|^2 = |\langle \psi . \varphi_k \rangle|^2$. Esto es, al medir el valor de la cantidad T en el estado ψ, la probabilidad de obtener el valor λ_k es igual a $|a_k|^2$:

$$P(T = \lambda_k, \text{ en el estado } \psi) = |a_k|^2 = |\langle \psi . \varphi_k \rangle|^2 . \tag{4}$$

Así que la esperanza del valor de la cantidad física T observado en el estado ψ es igual a:

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \lambda_k |a_k|^2 = \langle T\psi . \psi \rangle . \tag{5}$$

En un espacio métrico (S,d), si la métrica d es una cantidad físicamente observable entonces d debe ser un operador hermítico en el sistema mecánico, y los valores observados de la cantidad distancia d son los valores propios del operador. En el presente trabajo estudiaremos este tipo de espacio. El espacio obtenido, bajo algunas condiciones, es equivalente al espacio semi-probabilísticamente métrico con la condición de Šertnev [1] para τ_{MIN}.

§ 2 Algunas fórmulas integrales.

En el presente parágrafo daremos algunas fórmulas de integración que van a servir como las herramientas principales del desarrollo.

Teorema 1. Sean $\alpha(t)$ una función creciente, contínua por la izquierda, con $\int_{\mathbb{R}} d\alpha(t) = k \neq \infty$, y $\beta(t)$ una función del valor real no negativo casi siempre 1) con respecto a α, 2) medible Lebesgue en $\mathbb{R}$; entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} \beta(t)\, d\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}^+} x d\{\int_{\beta(t)<x} d\alpha(t)\} \qquad (1)$$

Demostración: Para mayor sencillez suponemos que $\beta(t)\geqslant 0$ para todo $t\in\mathbb{R}$, puesto que en ambos miembros de la igualdad (1) el conjunto $\{t|\beta(t)<0\}$ da efecto nulo.

(1) Primer caso. Supongamos que $\int_{\mathbb{R}}\beta(t)\, d\alpha(t) \neq \infty$.

En $\mathbb{R}^2$ definimos la α-medida por:

$$m((-\infty,a)\times[c,d)) = [\alpha(a) - \alpha(-\infty)].(d-c).$$

Sea

$$S = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \beta(t),\ t \in \mathbb{R}\} ;$$

entonces S es α-medible, y

$$m(S) = \int_{\mathbb{R}} \beta(t)\, d\alpha(t) .$$

Por el teorema de Fubini, tenemos:

$$m(S) = \int_0^\infty \{\int_{\beta(t)\geq x} d\alpha(t)\}\, dx \quad \text{(integración por partes)}$$

$$= x.\int_{\beta(t)\geq x} d\alpha(t)\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty x d\{\int_{\beta(t)\geq x} d\alpha(t)\}$$

$$= 0 - \int_0^\infty x d\{k - \int_{\beta(t)<x} d\alpha(t)\} \quad \text{(véase 2))}$$

$$= \int_0^\infty x d\{\int_{\beta(t)<x} d\alpha(t)\}.$$

Así:

$$\lim_{x\to\infty} x.\int_{\beta(t)\geq x} d\alpha(t) = 0 .$$

(2) Segundo caso. Supongamos que $\int_{\mathbb{R}} \beta(t)\, d\alpha(t) = +\infty$.

Sea

$$\int_{\beta(t)<x} d\alpha(t) = \lambda(x) ; \quad \text{(vêase 3))}$$

entonces $\lambda(x)$ es evidentemente creciente, y tenemos:

$$\int_{[0,\infty)} x d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n-1,n)} x d\lambda(x)$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\,\{\lambda(n)-\lambda(n-1)\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\{\lambda(n)-\lambda(n-1)\}-\{\lambda(\infty)-\lambda'(0)\}$$

$$= n.\int_{n-1\leqslant\beta(t)<n} d\alpha(t)-(k-0)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1\leqslant\beta(t)<n}\beta(t)d\alpha(t)-k$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\beta(t)\,d\alpha(t)-k=+\infty \quad . \blacksquare$$

Nótese que el Teorema 1 es también válido si $\alpha(t)$ es una función de variación acotada y continua por la izquierda, puesto que una función de variación acotada es la diferencia de dos funciones crecientes con la misma continuidad.

Corolario 1. En el Teorema 1, si β es creciente y continua por la derecha, entonces (Apéndice 3):

$$\int_{\mathbb{R}}\beta(t).\,d\alpha(t)=\int_0^{\infty} x.d\alpha(\beta^{-1}(x)), \tag{2}$$

donde β^{-1} es la pseudo inversa de la función β definida por :

$$\begin{cases}\beta^{-1}(0)=-\infty\\ \beta^{-1}(x)=\sup\{s\,|\,\beta(s)<x\} \quad .(\text{Apéndice } 1)\end{cases} \tag{3}$$

Demostración: Basta demostrar que:

$$\int_{\beta(t)<x} d\alpha(t)=\alpha(\beta^{-1}(x)). \tag{4}$$

pero como:

$$\alpha(\beta^{-1}(x))-\alpha(-\infty)=\int_{[-\infty,\beta^{-1}(x))} d\alpha(t)$$

basta comprobar que

$$\{t \in \mathbb{R} \mid \beta(t)<x\} = [- \ , \beta^{-1}(x)) \qquad (5)$$

(Véase el Apéndice 1)• ■

Corolario 2. Si β es creciente y continua por la izquierda, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \beta^{-1}(t)\, d\alpha(t) = \int_0^{\infty} x d\alpha(\beta(x)) \ , \qquad (6)$$

donde β^{-1} es la pseudo inversa de β, definida por:

$$\beta^{-1}(t) = \sup\{x \mid \beta(x) \leqslant t\} \ . \qquad (7)$$

Demostración. En el apéndice 1 se demuestra que β^{-1} es creciente y continua por la derecha, y que $(\beta^{-1})^{-1} = \beta$. Por lo tanto, el Corolario 2 es consecuencia inmediata del Corolario 1.■

§ 3 Resolución de la identidad y la función de distribución.

Algunas propiedades del operador hermítico. Sean T_o un operador auto-adjunto en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $\{E_o(x)\}$ la resolución de la identidad correspondiente ([3], [6]) [donde sin perdida de generalidad, podemos suponer $E_o(x^-) = E_o(x)$ (continuidad por la izquierda)]:

$$T_o = \int_{-\infty}^{\infty} xd\ E_o(x). \qquad (1)$$

Si f(x) es una función de valor real y medible se gún Lebesgue podemos definir el siguiente operador hermítico:

$$f(T_o) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \; dE_o(x). \qquad (2)$$

Es bien conocido ([7]) que la familia $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \; d\, E_o(x) \mid f \text{ es de valor real, L-medible} \} \qquad (3)$$

de todos los operadores hermíticos de la forma (2) es un anillo conmutativo. Si B es un conjunto medible-L, entonces el operador:

$$P_B = \int_B d\, E_o(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_B(x) \; d\, E_o(x) = \chi_B(T_o) \qquad (4)$$

donde χ_B es la función característica del conjunto B, es un operador proyeccion. Si el subespacio lineal:

$$P_B \cdot \mathcal{H} \qquad (5)$$

es diferente del espacio total $\mathcal{H}$, éste se llama "un subespacio propio del operador T_o" correspondiente al conjunto B.

Dado un operador hermítico T, la esperanza de T medida en el estado $h \in \mathcal{H}$ (con $\|h\| = 1$) se define como $\langle Th , h \rangle$ (ver la fórmula (5) del § 1). Decimos que un operador hermítico T es "definido positivo", lo que se denota con

$$T \geqslant 0 , \qquad (6)$$

si la esperanza de T no es negativa en cualquier estado; esto es, si

$$\langle Th\ ,\ h \rangle \geqslant 0 \quad \text{para todo} \quad h \in \mathcal{H}. \tag{7}$$

Es fácil ver que $f(T_o) \in \mathcal{Q}$ es definido positivo si, y sólo si, $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in R$, salvo en un conjunto de medida nula que no contenga los valores propios del operador T_o.

II. Función de distribución relacionada con un operador hermítico.

Teorema 2. Sea $\{E(x)\}$ una resolución de la identidad; dado $h \in \mathcal{H}$ con $\|h\| = 1$, la función F_h definida por:

$$F_h(x) = \langle E(x)h,\ h \rangle = \|E(x)h\|^2 \tag{8}$$

es una función de distribución.

Demostración. (i) Si $x < y$ entonces se tiene que $\|E(x)h\|^2 \leqslant \|E(y)h\|^2$ puesto que $\{E(x)\}$ es un sistema creciente de proyecciones.
(ii) Como $\lim_{x \to -\infty} E(x) = 0$ (el operador nulo) y $\lim_{x \to +\infty} E(x) = I$ (el operador idéntico), se tiene evidentemente que

$$\lim_{x \to -\infty} F_h(x) = 0\ ,\ \lim_{x \to +\infty} F_h(x) = 1\ .$$

Definimos, por conveniencia,

$$F_h(-\infty) = 0\ ,\quad F_h(+\infty) = 1\ .$$

(iii) $F_h(x)$ es continua por la izquierda puesto que $\{E(x)\}$ es continua por la izquierda. ∎

Ejemplo 1. (Caso discreto). Supongamos que el ope rador hermítico T_o no tiene aspecto continuo; sean φ_n ($n = 1,2,3,\ldots$) los vectores propios normaliza dos del operador T_o correspondientes a los valores propios λ_n ($n = 1,2,3,\ldots$), entonces tenemos una resolución de la identidad $\{E_o(x)\}$ como sigue:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}_x = \text{el subespacio cerrado determinado por}\\ &\text{todos los } \varphi_n \text{ tales que } \lambda_n < x \quad ; \\ &E_o(x) = \text{el operador proyección sobre } \mathfrak{M}_x \ .\end{aligned} \tag{9}$$

Si $h \in \mathcal{H}$, $\|h\| = 1$, tenemos:

$$h = \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n \quad \text{con} \quad b_n = \langle h, \varphi_n \rangle. \tag{10}$$

Así:

$$\begin{aligned}F_h(x) &= \|E_o(x)h\|^2 = \langle E_o(x)h, h\rangle \\ &= \langle \sum_{\lambda_n<x} b_n\varphi_n \ , \sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi_n\rangle = \sum_{\lambda_n<x} |b_n|^2;\end{aligned} \tag{11}$$

por lo tanto:

$$F_h(x^+) - F_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ |b_n|^2 & \text{si } x = \lambda_n \ . \end{cases} \tag{12}$$

Esto es, $F_h(x)$ es la función de distribución correspondiente a la observación de la cantidad física T_o en el estado $h \in \mathcal{H}$.

<u>Ejemplo 2</u>. Sea $F(x)$ una función de distribución correspondiente a una variable aleatoria discreta X, o sea,

$$P(X = \lambda_k) = p_k > 0 \ , \text{ con } \Sigma_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \ ,$$

$$F(x) = \sum_{\lambda_k < k_*} p_k \quad .$$

Dado $h \in \mathcal{H}$ con $\|h\| = 1$, existe un operador auto-ad junto

$$T_o = \int_{-\infty}^{\infty} x \, d\, E_o(x) \quad \text{tal que} \quad F(x) = \|E_o(x)h\|^2 .$$

Nótese que el operador T_o depende del elemento $h \in \mathcal{H}$ dado.

Demostración. Sea $\{\varphi_k\}$ un sistema ortonormal completo del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que[4)]

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{p_k} \, . \, \varphi_k \quad . \tag{13}$$

Se define $\{E_o(x)\}$ como sigue:

$$E_o(x).\varphi_k = \begin{cases} \varphi_k & \text{si} \quad \lambda_k < x, \\ 0 & \text{si} \quad \lambda_k \geqslant x \; ; \end{cases} \tag{14}$$

entonces

$$E_o(x)\, h = \sum_{\lambda_k < x} \sqrt{p_k} \, . \, \varphi_k \quad ,$$

o sea:

$$\|E_o(x).h\|^2 = \sum_{\lambda_k < x} p_k = F(x)$$

Generalizando el ejemplo 2 obtenemos el siguien te.

Teorema 3. Sea $F(x)$ una función de distribución; da do $h \in \mathcal{H}$ ($\|h\| = 1$) existe un operador auto-adjun to $T = \int_{-\infty}^{\infty} x . d\, E(x)$ tal que

$$F(x) = \|E(x).h\|^2 \quad .$$

Demostración. Como el espacio de Hilbert es único (salvo isomorfismos) basta demostrar el Teorema 3 para $\mathcal{H} = L_2(0,1)$. Primero, definimos una familia de proyecciones $\{E_o(x)\}$ como sigue: Si $f(t) \in L_2(0,1)$ entonces

$$E_o(x).f(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } 0 \leqslant t < x \\ 0 & \text{si } x \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \quad (15)$$

Evidentemente se tiene que:

(i) $E_o(x)^2 = E_o(x)$ (para todo $x \in [0,1]$).

(ii) $\langle E_o(x)\, f, g \rangle = \langle f, E_o(x) g \rangle = \int_0^x f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$, para todo $f, g \in L_2(0,1)$.

(iii) Si $x < y$ tenemos:

$$\| E_o(x) f \|^2 = \int_0^x |f(t)|^2 dt \leqslant \int_0^y |f(t)|^2 dt = \| E_o(y) f \|^2,$$

para todo $f \in L_2(0,1)$.

(iv) $E_o(0) = 0$ (el operador nulo), $E_o(1) = 1$ (el operador idéntico).

(v)
$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x < x_o}} E_o(x).f(t) = \begin{Bmatrix} f(t) & \text{si } 0 \leqslant t < x_o \\ 0 & \text{si } x_o \leqslant t \leqslant 1 \end{Bmatrix} =$$

$$= E_o(x_o).f(t).$$

De modo que $\{E_o(x)\}$ es una familia monótona de proyecciones, continua por la izquierda.

(vi) Si $h_o(t) = 1$ (la función constante de valor 1) entonces

$$\| E_o(x).\, h_o \|^2 = \int_0^x 1^2\, dt = x. \quad (16)$$

(vii) Sea

$$E_1(x) = E_o(F(x)) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{17}$$

entonces se tiene inmediatamente que $\{E_1(x)\}$ es una resolución de la identidad

(viii) Tenemos, por (16), que:

$$\|E_1(x).h_o\|^2 = \|E_o(F(x)).h_o\|^2 = F(x) \tag{18}$$

(ix) como $\|h_o\| = \|h\| = 1$, existe un operador unitario U tal que

$$h = U \cdot h_o$$

Sea

$$E(x) = U \cdot E_1(x) \cdot U^{-1} \; ; \tag{19}$$

entonces $\{E(x)\}$ es una resolución de la identidad, además:

$$\|E(x)h\|^2 = \|U.E_1(x).U^{-1}.\ U\ h_o\|^2$$
$$= \|U.E_1(x)\ h_o\|^2 = \|E_1(x)\ h_o\|^2 = F(x). \blacksquare$$

En la demostración del Teorema 3, si T_o es el operador hermítico correspondiente a la resolución de la identidad $\{E_o(x)\}$ (con $E_o(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. $E_o(x) = I$ si $x > 1$), entonces, para todo $f, g \in L_2(0,1)$ tenemos:

$$\langle T_o f,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle E_o(x)f,g\rangle = \int_0^1 x d\{\int_0^x f(t)\overline{g(t)}\, dt\}$$

$$\int_0^1 xf(x)\ \overline{g(x)}dx = \langle tf(t),g(t)\rangle \; ; \tag{20}$$

esto es,

$$T_o.\ f(t) = t.f(t) \tag{21}$$

De la misma manera, si T_1 es el operador hermítico correspondiente a la resolución de la identidad $\{E_1(x)\}$, entonces, por un cálculo directo similar al anterior, se puede demostrar que

$$T_1 . f(t) = F^{-1}(t) . f(t), \tag{22}$$

donde F^{-1} es la pseudo inversa de F.

§ 4 Espacios con la métrica operador.

Definición 1. Sea $T_o = \int_{-\infty}^{\infty} x . d\, E_o(x)$ un operador hermítico dado en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Un espacio con la métrica operador es un par (S, T) donde

$$T : S \times S \longrightarrow \mathcal{Q}$$

$$(p,q) \longmapsto T_{p,q} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{p,q}(x) . d\, E_o(x) \quad (1)$$

que satisface las siguientes condiciones:

(i) $T_{p,q} \geq 0$ ($T_{p,q}$ es un operador hermítico definido positivo).

(ii) $T_{p,q} = 0$ (el operador nulo) si, y sólo si $p = q$.

(iii) $T_{p,q} = T_{q,p}$

(iv) $T_{p,q} + T_{q,r} \geq T_{p,r}$ (esto es, $T_{p,q} + T_{q,r} - T_{p,r}$ es un operador definido positivo).

Se va a mostrar que f es una semi-métrica estocástica fuerte para S a través de la correspondencia

$$f_{p,q} \longleftrightarrow T_{p,q} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{p,q}(x) d\, E_o(x), \qquad (2)$$

y que (S,F) es un semi-PM con una condición ($\check{S}$) ([1],[2]) por medio de la esperanza de la resolución de la identidad del operador, medida en un estado, definiendo F como en el Teorema 5 .

Teorema 4. Sea $h \in \mathcal{H}$ (con $\|h\| = 1$) un elemento del espacio de Hilbert, entonces

I. $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, \mu_h)$ con

$$\mu_h(B) = \left\|\int_B d\, E_o(x)\, h\right\|^2 = \int_B d\|E_o(x)\, h\|^2 \qquad (3)$$

es un espacio de probabilidad.

II. Si $\{T_{p,q}\}$ es una métrica operador, entonces $\{f_{p,q}\}$ es una semi-métrica estocástica fuerte.

III. Sea $h \in \mathcal{H}$ un elemento que no pertenece a ningún subespacio propio del operador T_o. Si $\{f_{p,q}\}_{p,q\in S}$ es una semi-métrica estocástica fuerte (con la probabilidad (3)), entonces $\{T_{p,q}\}_{p,q\in S}$ es una métrica operador.

Demostración. I. Evidente.

II. Sea

$$A = \{t\in\mathbb{R} \mid f_{p,q}(t) < 0\}. \qquad (4)$$

Si $h' \in \int_A d\, E_o(x).\mathcal{H}$ entonces $h' = \int_A d\, E_o(x).h'$,

luego tenemos:

$$\|h'\|^2 = \int_A d\,\|E_o(x)h'\|^2 \,,$$

$$\langle T_{p,q}\,.h';h'\rangle = \int_A f_{p,q}(x)\,d\|E_o(x)h'\|^2 . \tag{5}$$

Supongamos entonces que $\|h'\| \neq 0$, entonces $\langle T_{p,q}\, h', h'\rangle < 0$ puesto que $f_{p,q}(x) < 0$ para todo $x\varepsilon A$ (contradice a la condición (i)); por lo tanto, se tiene que $\|h'\| = 0$, esto es: $\int_A d\, E_o(x)$ es el operador nulo, así:

$$\mu_h\,(A) = \int_A d\|E_o(x).h\|^2 = 0$$

o sea que $f_{p,q} \geqslant 0$ (c.s.) .

De manera similar, se pueden demostrar otras condiciones.

III. Como $f_{p,q} \geqslant 0$ (c.s.) entonces

$$\mu_h\,(A) = \int_A d\|E_o(x)\, h\|^2 = 0 \tag{6}$$

donde $A \subseteq R$ es el conjunto definido en (4). Supongamos que $\int_A d\, E_o(x)$ no es el operador nulo, entonces

$$\int_{\mathbb{R}-A} d\, E_o(x).\mathcal{H}$$

es un subespacio propio del operador T_o: por hipótesis, tenemos que:

$$h \notin \int_{\mathbb{R}-A} d\, E_o(x).\, \mathcal{H} \,,$$

esto es:

$$\int_A d\, E_o(x)\circ h \neq 0 \,;$$

o sea,

$$\left\| \int_A d\, E_o(x)h \right\|^2 = \int_A d\| E_o(x)h \|^2 = \mu_h(A) \neq 0$$

(¡Absurdo!).

Así que $\int_A d\, E_o(x)$ es el operador nulo, luego:

$$T_{p,q} = \int_{\mathbb{R}} f_{p,q}(x).d\, E_o(x) = \int_{\mathbb{R}-A} f_{p,q}(x).d\, E_o(x) +$$

$$+ \int_A f_{p,q}(x).d\, E_o(x) = \int_{\mathbb{R}-A} f_{p,q}(x).d\, E_o(x) \geqslant 0$$

puesto que $f_{p,q}(x) \geqslant 0$ en $\mathbb{R} - A$.

De la misma manera, se pueden demostrar las otras condiciones para la métrica operador.∎

<u>Teorema 5.</u> **Sea T una métrica operador para S definida en (1).**

(i) $T_{p,q} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{p,q}(x).d\, E_o(x) = \int_0^{\infty} x.d\, E_{p,q}(x)$

donde

$$E_{p,q}(x) = \int_{f_{p,q}(t)<x} d\, E_o(t). \qquad (7)$$

(ii) Sea h_o un elemento que no pertenece a ningún subespacio propio del operador T_o; definimos:

$$F_{p,q}(x) = \| E_{p,q}(x)\, h_o \|^2 = \langle E_{p,q}(x)h_o, h_o \rangle \qquad (8)$$

entonces (S,F) con

$$\begin{aligned} F : S \times S &\longrightarrow \mathfrak{D}^+ \\ (p,q) &\longmapsto F_{p,q} \end{aligned} \qquad (9)$$

es un espacio semi-PM, donde $\mathfrak{D}^+$ es el conjunto de todas las funciones de distribución, F, tales que $F(0) = 0$.

(iii) Para todo $p,q \in S$ si $f_{p,q}$ es una función creciente y continua por la derecha, entonces tenemos:

$$(F^{-1}_{p,q} + F^{-1}_{p,r})^{-1} \leq F_{p,r} \tag{10}$$

donde $(\ldots)^{-1}$ indica la función pseudo inversa. (Apéndice 1).

<u>Demostración</u>. (i) Para todo $g,h \in \mathcal{H}$ tenemos :

$$\langle \int_{-\infty}^{\infty} f_{p,q}(x) d\, E_o(x) g,h \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_{p,q}(x) d \langle E_o(x).g,h \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} x d\{ \int_{f_{p,q}(t)<x} d \langle E_o(t).g,\ h \rangle$$ (por el Teorema 1); así se obtiene la igualdad (7).

(ii) Por el Teorema 2, $F_{p,q}$ es una función de distribución. Además, como $E_{p,q}(0) = 0$ (el operador nulo), entonces

$$F_{p,q}(0) = \| E_{p,q}(0)\, h_o \|^2 = 0.$$

Si $p = q$ tenemos que $T_{p,q} = 0$ (el operador nulo), luego:

$$E_{p,q}(x) = \int_R d\, E_o(t) = I \text{ (el operador idéntico)}$$

si $x > 0$, o sea que $F_{p,q}(x) = 1$ si $x > 0$ ($F_{p,q} = H$). Recíprocamente, si $F_{p,q}(x) = 1$ para todo $x > 0$, entonces:

$$\|E_{p,q}(x)\, h_o\| = \|\int_{f_{p,q}(t)<x} d\, E_o(t)h_o\| = \|h_o\|$$

para todo $x > 0$. (11)

Sea $A_n = \{t \in \mathbb{R} \mid f_{p,q}(t) < \frac{1}{n}\}$ entonces

$$\|E_{p,q}(\tfrac{1}{n})h_o\|^2 = \|\int_{x\varepsilon A_n} d\, E_o(x)\, h_o\|^2 =$$

$$= \int_{x\varepsilon A_n} d\|E_o(x)\, h_o\|^2 = \|h_o\|^2 \ .$$

Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_o = \{t \in \mathbb{R} \mid f_{p,q}(t) = 0\}$ entonces[5]

$$\|\int_{x\varepsilon A_o} d\, E_o(x)\, h_o\|^2 = \|h_o\|^2 \quad ;$$

luego

$$\int_{x\varepsilon A_o} d\, E_o(x).h_o = h_o \quad , \tag{12}$$

puesto que $\int_{x\varepsilon A_o} d\, E_o(x)$ es una proyección. Por hipótesis, h_o no pertenece a ningún subespacio propio del operador T_o; por lo tanto, la igualdad (12) implica que

$$\int_{\mathbb{R}-A_o} d\, E_o(x) = 0 \quad \text{(el operador nulo)}$$

o sea que

$$T_{p,q} = \int_{A_o} 0\, d\, E_o(x) + \int_{\mathbb{R}-A_o} f_{p,q}(x) d\, E_o(x) = 0$$

así que $p = q$.

(iii) Si $f_{p,q}$ es creciente y contínua por la derecha, por el Corolario 1 del Teorema 1, tenemos :

$$F_{p,q}(x)=\|E_{p,q}(x)\,h_o\|^2=\|\int_{f_{p,q}(t)<x} d\,E_o(t)h_o\|^2$$

$$=\int_{f_{p,q}(t)<x} d\|E_o(t)h_o\|^2=\|E_o(f^{-1}_{p,q}(x))h_o\|^2.$$

Sea $F(t)=\|E_o(t)\,h_o\|^2$ entonces:

$$F_{p,q}(x)=F(\,f^{-1}_{p,q}(x)\,). \tag{13}$$

Tomando la pseudo inversa de la igualdad (13) (Apéndice 1) se tiene que

$$F^{-1}_{p,q}=f_{p,q}(F^{-1}). \tag{14}$$

Así, por la definición 1 y por el Teorema 4, II, tenemos la desigualdad (10).

<u>Teorema 6</u>. Definamos una aplicación $\tau:\mathcal{D}^+\times\mathcal{D}^+\to\mathcal{D}^+$ como sigue:

$$\tau(A,B)=(A^{-1}+B^{-1})^{-1}\quad\text{(Apéndice 1)} \tag{15}$$

entonces τ es una t-función [1] . Además,

$$\tau(H_a,H_b)=H_{a+b}$$

<u>Demostración</u>. a) Si $A\leqslant C$, $B\leqslant D$ entonces (Apéndice)

$$A^{-1}\geqslant C^{-1},\quad B^{-1}\geqslant D^{-1};$$

luego

$$A^{-1}+B^{-1}\geqslant C^{-1}+D^{-1};$$

así:

$$\tau(A,B)=(A^{-1}+B^{-1})^{-1}\leqslant(C^{-1}+D^{-1})^{-1}=\tau(C,D).$$

b) $\tau(A,B) = \tau(B,A)$, por definición

c) Como
$$H^{-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ +\infty & \text{si } x = 1 , \end{cases}$$
para $A \in \mathcal{D}^+$ tenemos:
$$A^{-1} + H^{-1} = A^{-1}$$
puesto que $A^{-1}(1) = +\infty$. Por lo tanto, se tiene que
$$\tau(A,H) = (A^{-1}+H^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A.$$

d) $\tau(\tau(A,B), C) = \tau((A^{-1}+ B^{-1})^{-1} + C)$
$$= (A^{-1} + B^{-1} + C^{-1})^{-1} = \tau(A, \tau(B,C)).$$

e) Tenemos:
$$H_a^{-1}(x) = \mathrm{Sup}\{t \; \bar{\mathbb{R}} \,|\, H_a(t) \leq x\} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x<0 , \\ a & \text{si } 0 \leq x < 1 , \\ +\infty & \text{si } 1 \leq x . \end{cases}$$
Por lo tanto:
$$H_a^{-1}(x) + H_b^{-1}(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x<0 , \\ a+b & \text{si } 0 \leq x < 1 , \\ +\infty & \text{si } 1 \leq x ; \end{cases}$$
luego:
$$(H_a^{-1}+H_b^{-1})^{-1}(x) = \left\{\begin{matrix} 0 & \text{si } x \leq a+b \\ 1 & \text{si } x > a+b \end{matrix}\right\} = H_{a+b}(x) . \blacksquare$$

Según los Teoremas 5 y 6, dada una métrica operador $\{T_{p,q}\}$ el espacio semi-PM $\{F_{p,q}\}$ relacionado en el Teorema 5 satisface la condición $(\check{S})$ ([1]) para la t-función τ definida por (15). Recíprocamente, tenemos el siguiente:

<u>Teorema 7</u>. Sea (S,F) un espacio semi-PM que sa-

tisface la condición $(\check{S})$ para τ definida por (15). Dado un $h_o \varepsilon \mathcal{H}$ (con $\|h_o\| = 1$), existe una métrica operador $\{T_{p,q}\}_{p,q\varepsilon S}$ relacionada por (8) del Teorema 5.

Demostración. Basta utilizar el Teorema 3. Para mayor sencillez, tomamos que $h_o = 1$ (la función constante del valor 1 en $L_2(0,1)$) entonces por (17), § 3 tenemos:

$$E_{p,q}(x) = E_o(F_{p,q}(x)),$$

luego:

$$T_{p,q} = \int_{\mathbb{R}} x . d\, E_o(F_{p,q}(x)) = \int_{\mathbb{R}} F^{-1}_{p,q}(x) . d\, E_o(x). \blacksquare$$

Apendice 1

Función pseudo inversa

Definición 2. Sea f una función creciente, continua por la derecha en $[a,b]$ (a puede ser $-\infty$, b puede ser $+\infty$). En $[f(a), f(b)]$ se define la pseudo inversa de f, f^{-1} como sigue:

$$f^{-1}(\, f(a)\,) = a$$

$$f^{-1}(y) = \sup\{t \,\varepsilon\, [a,b] \;|\, f(t) < y\} \text{ para } y \neq f(a)$$

A continuación, daremos algunas propiedades de la pseudo inversa.

(i) f^{-1} es creciente.

Demostración. Sean $y < y'$, si $f(t) < y$ entonces

$f(t) < y'$, por lo tanto:

$$\{t \mid f(t) < y\} \subset \{t \mid (t) < y'\}$$

asi que: $f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y')$.

(ii) Si $f^{-1}(y) = x$ entonces $f(x) \geqslant y$ ∎

Demostración: Como $x = \sup\{t \mid f(t) < y\}$, para todo $x' > x$ tenemos que $f(x') \geqslant y$, esto es $f(x^{+}) \geqslant y$. Por la continuidad derecha de f se tiene que $f(x) \geqslant y$ ∎

(iii) Si $f(x) = y$ entonces $f^{-1}(y) \leqslant x$.

Demostración: $f^{-1}(y) = \sup\{t \mid f(t) < y\} = \sup\{t \mid f(t) < f(x)\}$. Como $f(t) < f(x)$ implica $t < x$, luego" $f^{-1}(y) \leqslant x$ ∎

(iv) $f(x) < y$ si, y sólo si, $x < f^{-1}(y)$.

Demostración: Si $f(x) < y$ entonces tenemos evidentemente que $x \leqslant f^{-1}(y)$. Si $x = f^{-1}(y)$, por (ii) se obtiene que $f(x) \geqslant y$ (¡absurdo!), luego: $x < f^{-1}(y)$. Si $x < f^{-1}(y)$ entonces se tiene inmediatamente que $f(x) \leqslant y$. Por (iii), $f(x) \neq y$, luego: $f(x) < y$ ∎

(v) f^{-1} es continua por la izquieda.

Demostración: Supongamos que f^{-1} no es continua por la izquierda en y, esto es,

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y^{-}) = \delta > 0, \quad \text{o sea:}$$

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) - \delta \quad \text{para todo} \quad y_1 < y.$$

Sea $x = f^{-1}(y)$ entonces: $f^{-1}(y_1) \leq x - \delta$ para todo $y_1 < y$. Por (ii): $f(x - \delta) \geq y_1$ (para todo $y_1 < y$). Tomando límite $y_1 \to y$ tenemos que: $f(x - \delta) \geq y$. Por (ii): $x = f^{-1}(y) \leq x - \delta$ (¡absurdo!)∎

(vi) Si $y = f(x)$, $f^{-1}(y) = \tilde{x}$ entonces $f(x) = f(\tilde{x})$, esto es, $(f \circ f^{-1})(y) = y$.

Demostración: Por (iii): $\tilde{x} = f^{-1}(y) \leq x$. Como f es creciente, entonces: $f(\tilde{x}) \leq f(x)$. Por (ii): $f(\tilde{x}) \geq y = f(x)$, así que: $f(x) = f(\tilde{x})$.

(vii) Si $f^{-1}(\tilde{y}) = x$, $y = f(x)$ entonces $f^{-1}(y) = f^{-1}(\tilde{y})$, esto es, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Demostración: $f(x) = y$ implica: $f^{-1}(y) \leq x = f^{-1}(\tilde{y})$ (por (iii)). $f^{-1}(\tilde{y}) = x$ implica $y = f(x) \geq \tilde{y}$ (por (ii)). Como f^{-1} es creciente, tenemos que $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(\tilde{y})$, así se obtiene que $f^{-1}(y) = f^{-1}(\tilde{y})$.

(viii) Si $f \leq g$ entonces $f^{-1} \geq g^{-1}$.

Demostración: Como $f \leq g$ se tiene que:

$$\{t | g(t) < y\} \subset \{t | f(t) < y\},$$

luego:

$$g^{-1}(y) = \sup\{t | g(t) < y\} \leq \sup\{t | f(t) < y\} = f^{-1}(y)$$

(ix) Si f y g son crecientes y continuas por la derecha, entonces

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Demostración: Sean $f^{-1}(z) = u$, $g^{-1}(u) = v$. Por (ii) tenemos: $f(u) \geq z$, $g(v) \geq u$. Luego: $(f\circ g)(v) = f(g(v)) \geq f(u) \geq z$. Por (iii) :

$$(f\circ g)^{-1}(z) \leq v . \tag{1}$$

Por otra parte, como $v = g^{-1}(u) = \sup\{t \mid g(t)<u\}$ existe una sucesión $\{t_n\} \to v$ tal que $g(t_n) < u$.
Pero:

$$u = f^{-1}(z) = \sup\{s \mid f(s) < z\} ;$$

luego: $f(g(t_n)) < z$. Por (iv): $t_n < (f\circ g)^{-1}(z)$;
por lo tanto:

$$v = \lim_{n\to\infty} t_n \leq (f\circ g)^{-1}(z) \tag{2}$$

De (1) y (2):

$$(f\circ g)^{-1}(z) = v = g^{-1}(f^{-1}(z)) = (g^{-1}\circ f^{-1})(z)$$

Definición 3. Sea f una función creciente, continua por la izquierda en $[a,b]$, definimos en $[-\infty, \infty]$ la pseudo inversa de f, f^{-1} como sigue:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \ y<f(a) , \\ \sup\{t\in[a,b] \mid f(t)\leq y\} & \end{cases}$$

$$\text{si } \ y \in [\,f(a), \infty\,] .$$

Por un método similar el caso anterior, se puede demostrar las siguientes propiedades:

(i') f^{-1} es creciente.

(ii') Si $f^{-1}(y)=x$ entonces $f(x)\leq y$.

(iii') Si $f(x)=y$ entonces $f^{-1}(y)\geq x$.

(iv') $f(x)>y$ si, y sólo si, $x>f^{-1}(y)$.

(v´) f^{-1} es continua por la derecha.

(viii´) Si $f \leqslant g$ entonces $f^{-1} \geqslant g^{-1}$.

(ix´) Si f y g son crecientes y continuas por la izquierda, entonces

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

(x) $(f^{-1})^{-1} = f$ si f es continua por la izquierda (ó por la derecha).

<u>Demostración:</u> Sea $f^{-1} = g$, si $g^{-1}(x) = y$ entonces:

$$f^{-1}(y) = g(y) \geqslant x \quad \text{(por (ii));}$$

luego:

$$f(x) \leqslant y \quad \text{(por (ii´)).} \qquad (3)$$

Si $f(x) = \tilde{y}$ entonces $g(\tilde{y}) = f^{-1}(\tilde{y}) \geqslant x$ (por (iii´)),

luego: $$g^{-1}(x) \leqslant \tilde{y} \quad \text{(por (iii)).} \qquad (4)$$

De (3) y (4) tenemos que $y = \tilde{y}$, esto es:

$$(f^{-1})^{-1}(x) = g^{-1}(x) = f(x) \text{ , o sea, } (f^{-1})^{-1} = f. \blacksquare$$

<u>Observación</u>: Si f ; $[a,b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$ entonces:

$$(f^{-1})^{-1} : [-\infty , b] \longrightarrow [-\infty, f(b)] .$$

Por lo tanto, la propiedad (x) debería enunciarse:

$(f^{-1})^{-1}$ es una **extensión** de f.

Apendice 2

Se acostumbra usar la definición 2 (Apéndice 1) de la pseudo inversa tanto para la función continua por la derecha como para la función continua por la izquierda . Sin embargo, la fórmula (2) de § 2 sólo es válida para la pseudo inversa definida en el Apéndice 1.

Ejemplo. Sean $\alpha(t) = \beta(t) = H(t)$ (Función de Heaviside). H es continua por la izquierda, aplicando la definición 2 se tendrá:

$$\beta^{-1}(t) = H^{-1}(t)=\sup\{s \mid H(s)<t\}= \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad t > 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ -\infty & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

entonces:

$$(\alpha \circ \beta^{-1})(x)=(H \circ H^{-1})(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad t > 1 . \end{cases}$$

Tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} \beta(t)d\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}} H(t)d\,H(t)=H(0).\{H(0^{+})-H(0)\}=0.$$

Por otra parte,

$$\int_{[o,\infty)} xd\alpha(\beta^{-1}(x)) = \int_{[o,\infty)} xd\,H(H^{-1}(x))$$

$$= \int_{\{1\}} xd\,H(H^{-1}(x)) = 1.\{(H \circ H^{-1})(1^{+})-(H \circ H^{-1})(1)\}=1.$$

Apendice 3

El corolario 1 y el corolario 2 del Teorema 1 (§1) son las fórmulas para el cambio de variables en las integrales de Riemann-Stieltjes [5], a continuación daremos una demostración sin usar los conceptos de la integral de Lebesgue.

<u>Teorema 8.</u> Sean α creciente y continua por la izquierda, β creciente y continua por la derecha en $[a, b]$, entonces tenemos el siguiente cambio de variables:

$$\int_a^b \alpha(x)\, d\,\beta(x) = \int_c^d \alpha(\beta^{-1}(y))\, dy \qquad (1)$$

donde $\quad c = \beta(a), \quad d = \beta(b).$

<u>Demostración:</u> Obsérvese que las integrales de Riemann-Stieltjes en ambos miembros de (1) existen bajo nuestra hipótesis. Sean

$$L = \int_a^b \alpha(x)\, d\beta(x), \quad L' = \int_c^d \alpha(\beta^{-1}(y))dy\ .$$

I. Dado $\varepsilon > 0$, existe una partición del intervalo $[a, b]$

$$a = x_o, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\ , \qquad (2)$$

tal que la (Condición de Riemann [5]):

$$L - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} \alpha(x_{k-1})\ \{\beta(x_k)-\beta(x_{k-1})\}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha(x_k)\{\beta(x_k)-\beta(x_{k-1})\} < L+\varepsilon. \qquad (3)$$

Sean $y_k = \beta(x_k)$, entonces por (iii), del Apéndice 1, tenemos que $\beta^{-1}(y_k) \leqslant x_k$, luego :

$$\Sigma_{k=1}^{n} \alpha(\beta^{-1}(y_k))(y_k - y_{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha(x_k)\{\beta(x_k)\ \ -$$

$- \beta(x_{k=1}) \} < L + \varepsilon.$

Como L´ es el límite decreciente de las sumas superiores de Riemann-Stieltjes se tiene que

$$L' < L + \varepsilon ;$$

o sea:

$$L' \leqslant L. \qquad (4)$$

II. En la condición de Riemann (3) se puede suponer que

$$y_{k+1} = \beta(x_{k+1}) > \beta(x_k) = y_k \quad \text{(para todo k).}$$

Escogemos $\tilde{y}_k \varepsilon (y_k, y_{k+1})$ tales que

$$\tilde{y}_k - y_k < \frac{\varepsilon}{n\,M}, \qquad (5)$$

donde $M = \text{Max } |\alpha(x)|$. Entonces, por (iv), del Apéndice 1, tenemos:

$$x_k < \beta^{-1}(\tilde{y}_k) \quad \text{para todo k.} \qquad (6)$$

Además:

$$\left|\Sigma_{k=1}^{n} \alpha(x_{k-1})(\beta(x_k)-\beta(x_{k-1}))-\Sigma_{k=1}^{n} \alpha(x_{k-1})(\tilde{y}_k-\tilde{y}_{k-1})\right|$$

$$\leqslant \Sigma_{k=1}^{n} |\alpha(x_{k-1})|\,|(y_k-y_{k-1})-(\tilde{y}_k - \tilde{y}_{k-1})|$$

$$\leqslant \Sigma_{k=1}^{n} M \frac{\varepsilon}{n\,M} = \varepsilon . \qquad (7)$$

De (3), (6) y (7) se tiene:

$$L - 2\,\varepsilon < \Sigma_{k=1}^{n} \alpha(x_{k-1})(\tilde{y}_k - \tilde{y}_{k-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha(\beta^{-1}(\tilde{y}_{k-1}))(\tilde{y}_k - \tilde{y}_{k-1}). \qquad (8)$$

Como L´ es el límite creciente de las sumas inferiores de Riemann-Stieltjes, tenemos que:

$$L - 2\,\varepsilon < L',$$

así que

$$L \leqslant L'. \qquad (9)$$

De (4) y (9) tenemos la igualdad (1).■

<u>Corolario</u>. Bajo las mismas hipótesis del Teorema 8, tenemos:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \beta(x)\, d\alpha(x) = \int_{c}^{d} y\, d\alpha(\beta^{-1}(y)) \qquad (10)$$

donde $\tilde{a} = \beta^{-1}(c)$, $\tilde{b} = \beta^{-1}(d)$.

<u>Demostración</u>: Aplicando la integración por partes, tenemos:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \beta(x)d\alpha(x) = \beta(\tilde{b})\alpha(\tilde{b}) - \beta(\tilde{a})\alpha(\tilde{a}) - \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \alpha(x)d\beta(x).$$

$$\int_{c}^{d} y d\alpha(\beta^{-1}(y)) = d.\alpha(\beta^{-1}(d)) - c.\alpha(\beta^{-1}(c)) -$$

$$\int_{c}^{d} \alpha(\beta^{-1}(y))\, dy .$$

Por la propiedad (vi) del Apéndice 1, tenemos:

$$d = \beta(b) = \beta(\tilde{b}), \quad c = \beta(a) = \beta(\tilde{a}) :$$

por lo tanto, el Teorema 8 garantiza la igualdad (10).■

N o t a s

1. Decimos que $\beta(t) \geqslant 0$ casi siempre con respecto a α si

$$\int_{\{t \mid \beta(t)<n\}} d\alpha(t) = 0$$

2. Sea $e_n = \{t \mid \beta(t) \geqslant n\}$, entonces $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $\bigcap_{n=1}^{\infty} e_n = \phi$, puesto que $\beta(t)$ es de valor real. Como β es integrable con respecto a α (la hipótesis) se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{e_n} \beta(t)\, d\alpha(t) = 0$$

Por lo tanto:

$$\int_{e_n} \beta(t)\, d\alpha(t) \geqslant n. \int_{e_n} d\alpha(t) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

3. Es fácil demostrar que λ es continua por la izquierda.

4. Sea $\{\psi_k\}$ un sistema ortonormal completo del espacio $\mathcal{H}$, sea

$$h' = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{p_k}\,.\,\psi_k \quad ;$$

entonces $\|h'\| = 1$. Existe un operador unitario U tal que

$$U\, h' = h$$

puesto que $\|h'\| = \|h\| = 1$. Sean

$\varphi_k = U\,\psi_k$ $(k=1,2,3,\ldots)$ entonces $\{\varphi_k\}$ es un sistema ortonormal completo del espacio $\mathcal{H}$, y se tiene que

$$h = U h' = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{p_k} U\psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{p_k}\, \varphi_k .$$

5. Para mayor sencillez, supóngase que $f_{p,q}(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

6. La t-función τ definida por (15) es igual a τ_{MIN}, esto es [1], si $A,B \in \mathcal{D}^+$, entonces tenemos:

$$\tau(A,B) = (A^{-1}+B^{-1})^{-1} = \sup_{u+v\leq x} (MIN(A(u),B(v))) = \tau_{MIN}(A,B).$$

<u>Demostración:</u> Primero, observamos el siguiente hecho (Apéndice [1], (iv)): si f es creciente y continua por la derecha, entonces:

$$[0, f^{-1}(x)) = \{t \geq 0 \mid f(t) < x\} \quad .$$

Dado $x > 0$ tenemos:

$$[0,(A^{-1}+B^{-1})^{-1}(x)) = \{t \geq 0 \mid A^{-1}(t) + B^{-1}(t) < x\}$$

$$= \bigcup_{0\leq u\leq x} [\{t \mid A^{-1}(t) < u\} \cap \{t \mid B^{-1}(t) < x - u\}]$$

$$= \bigcup_{0\leq u\leq x} [[0, A(u)) \cap [0, B(x - u))]$$

Nota: $(A^{-1})^{-1} = A$

$(B^{-1})^{-1} = B$ Apéndice [1].

$$= \bigcup_{0\leq u\leq x} [0, MIN \{A(u), B(x - u)\})$$

$$= [0, \sup_{0\leq u\leq x} MIN \{A(u), B(x - u)\})$$

$$= [0 \, , \tau_{MIN} (A, B)(x)).$$

Por lo tanto, se tiene la idualdad deseada.∎

REFERENCIAS.

[1] Weber, S: Espacios probabilísticamente métricos, Universidad Nacional de Colombia, 1977, Conferencias de un curso.

[2] Weber, S. Espacios Probabilísticamente métricos. Rev. Col. Mat. XI (1977) (de próxima aparición).

[3] Riesz, F., Nagy,B.SZ. Funcional Analysis, Frederick Ungar Pub. Co. New York, 1955.

[4] Dirac, P.A.M. The Principles of Quantum Mechanics, Oxford University Press, London, 1947.

[5] Apostol, T.M. Mathematical Analysis, Addison Wesley, Reading, 1957.

[6] Takeuchi, Y. Espacio de Hilbert, Universidad Nacional de Colombia, 1967.

[7] Takeuchi, Y. Representación de los números no convencionales mediante operadores hermíticos. Rev. Col. Mat. X (1976), 125-140.

***

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, 6, D.E., Colombia, S.A.

(Recibido en enero de 1977)