Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XI (1977), págs. 121 - 134

GROUPES QUI REFLÈTENT LES DÉCOMPOSITIONS DE LEURS QUOTIENTS OU DE LEURS SOUS-GROUPES.

par

Khalid BENABDALLAH* et Robert BRADLEY

Un groupe abélien G est dit quasi-pur-projectif (quasi-pur-injectif) si pour tout sous-groupe H de G et pour tout homomorphisme $f: G \to G/H$ ($f: H \to G$), il existe un endomorphisme φ de G tel que $\nu_H \cdot \varphi = f$ ($\varphi . i_H = f$) où ν_H est l'épimorphisme canonique de G sur G/H et i_H est l'inclusion de H dans G. L. Fuchs [7], dans son problème 17 a demandé de caractériser de tels groupes.

De nombreux résultats ont été obtenus, autant

* subventionné par fond C.N.R.,nº A-5591.

pour les groupes quasi-purs-projectifs [1], [2], [3] et [4] que pour les groupes quasi-purs-injectifs [1], [2], [5] et [6]. Nous avons été amenés dans [3], à définir une notion plus générale que la quasi-pure-projectivité: Un p-groupe abélien réduit G possède la propriété P si pour tout sous-groupe de base B de G et pour tout endomorphisme idempotent f de G/H, il existe un endomorphisme φ de G tel que $\nu_H \circ \varphi = f . \nu_H$. Le choix des endomorphismes idempotents n'a pas été abitraire. On connaît en effet l'importance des décompositions en théorie des groupes abéliens.

Ceci nous amène à définir: Un groupe abélien G est dit quasi-idempotent-projectif (injectif) si pour tout sous-groupe H de G et pour tout endomorphisme idempotent f de G/H (de H), il existe un endomorphisme φ de G tel que $\nu_H \circ \varphi = f . \nu_H$ $(\varphi . i_H = i_H . f)$ où ν_H: G $\to$ G/H est l'épimorphisme canonique et i_H: H $\to$ G est l'inclusion.

Quelle est la structure d'un tel groupe? De façon équivalente, quels sont les groupes reflétant les décompositions de leurs quotients (sous-groupes)? C'est ce que nous trouverons dans cet article.

La notation utilisée est de Fuchs [7] et tous les groupes considérés sont abéliens. De plus, si H est un sous-groupe de G, ν_H désigne l'épimorphisme canonique de G sur G/H et i_H l'inclusion de H dans G.

Section 1.

Définitions et propriétés générales. Un groupe G est dit quasi-idempotent-projectif (respectivement quasi-idempotent-injectif) si pour tout sous-groupe H de G et pour tout endomorphisme idempotent f de G/H (respectivement de H), il existe un endomorphisme φ de G tel que $\nu_H . \varphi = f \circ \nu_H$ (respectivement $\varphi . i_H = i_H . f$).

Nous cherchons à caractériser les groupes quasi-idempotents-projectifs, qu'on notera q.i.p. et les groupes quasi-idempotents-injectifs, notés q.i.i., par un théorème de structure. Il est bien évident que les groupes quasi-injectifs et quasi-projectifs sont respectivement q.i.i. et q.i.p. . Nous énonçons d'abord la proposition suivante, dont la preuve est facile.

Proposition 1.1. a) Un groupe torsion G est q.i.p. (q.i.i.) si et seulement si G_p est q.i.p. (q.i.i.) et ce, pour tout p premier.

b) Tout facteur direct d'un groupe q.i.p. (q.i.i.) l'est aussi.

c) Si G est q.i.p. (q.i.i.) et si H est un sous-groupe totalement invariant de G, alors G/H est q.i.p. (H est q.i.i.)

Section 2.

Les groupes quasi-idempotents-injectifs. Nous étudierons d'abord les groupes q.i.i. Nous nous restreignons en premier lieu au cas torsion. La proposition 1.1. nous permet de nous réduire au cas primaire. Le lemme suivant nous sera fort utile.

Lemme 2.1. Si $G = \langle x \rangle \oplus K$ où $O(x) = p^n$ et $p^{n+1}K[p] \neq 0$, alors G n'est pas q.i.i.

Preuve: Soit $y \neq 0$, $y \in p^{n+1}K[p]$. Alors $y = p^{n+1}z$, $z \in K$, $py = 0$. Soit $H = \langle pz \rangle \oplus \langle x \rangle$ et soit $f : H \to H$ défini par $f(pz) = f(x) = x$, Alors $f^2 = f$. Supposons que G soit q.i.i. Il existe alors $\varphi: G \to G$ tel que $\varphi(pz) = x$ d'où $x = p\,\varphi(z)$ ce qui est une contradiction.■

On en conclut la caractérisation des groupes q.i.i. torsions:

Théorème 2.2. Un groupe torsion G est q.i.i. si et seulement si G_p est somme directe de groupes cocycliques isomorphes et ce, pour tout p premier.

Preuve: Si G_p est tel qu'indiqué pour tout p premier, alors G est quasi-injectif et donc q.i.i. . Si G est q.i.i., on écrit $G_p = D \oplus R$ où D est divisible et R est réduit. Comme $\mathbb{Z}(p^n) \oplus \mathbb{Z}(p^m)$, $n < m$ et $\mathbb{Z}(p^n) \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)$ ne sont pas q.i.i. par le lemme 2.1. G_p est somme directe de groupes cocycliques isomorphes. ∎

Considérons maintenant le cas sans torsion.

Théorème 2.3. Un groupe sans torsion G est q.i.i. si et seulement si il est soit de rang un, soit divisible.

Preuve: Si G est de rang un, tous ses sous-groupes sont indécomposables et donc G est q.i.i. . Inversement, si G est q.i.i. de rang $n \geqslant 2$ et si G n'est pas divisible, il existe deux éléments linéairement indépendants x et y de G tels que $h_p(x) = 0$.

On définit alors $H = \langle x\rangle \oplus \langle py\rangle$ et $f: H \to H$ par $f(py) = f(x) = x$. Alors $f^2 = f$. Donc il existe $\varphi: G \to G$ tel que $x = \varphi(py) = p\varphi(y)$ ce qui est une contradiction. ∎

On étudie enfin le cas mixte.

Lemme 2.4. Si $G = A \oplus \langle x\rangle$ où $O(x) = p^n$ et $A \neq A_t$, alors G n'est pas q.i.i. .

Preuve: Soit $y \in A\backslash A_t$ et soit $H = \langle py\rangle \oplus \langle x\rangle$. Soit $f: H \to H$ défini par $f(x) = f(py) = x$. Alors $f^2 = f$. Si G est q.i.i. il existe $\varphi: G \to G$ tel que $x = \varphi(py) = p\varphi(y)$ ce qui est une contradiction. ∎

On peut donc en conclure que la partie torsion d'un groupe mixte q.i.i. est divisible.

Lemme 2.5. Si $G = A \oplus D$ où A est sans torsion de rang un et D est torsion divisible, alors G est q.i.i. .

Preuve: Soit $H \leqslant G$ et soit $f : H \to H$ tel que $f^2 = f$. On considère $(H+D)/D \leqslant G/D \simeq A$. Comme $H \cap D = H_t$, $f(H \cap D) \leqslant G_t = D$. On peut donc défi- nir $\overline{f}: (H+D)/D \to (H+D/D$ par $\overline{f}(h+D) = f(h) + D$. Alors $\overline{f}^2 = \overline{f} = 0$ d'où $\overline{f} = 0$ où 1.

Si $\overline{f} = 0$, $f : H \to D$ et on prolonge f à $\varphi: G \to D$ par injectivé de D. Alors $\varphi_o = i_D.\varphi$ est un endomorphisme de G tel que $\varphi_o|_H = f$. Si $\overline{f} = 1$, alors pour tout $h \in H$, $f(h) - h \in D$ et donc peut définir $(f-1):H \to D$. On prolonge $f - 1$ à $\varphi: G \to D$. Alors $\varphi_o: G \to G$ défini par $\varphi_o = i_D \varphi + 1_G$ est tel que $\varphi_o|_H = f$.■

On peut alors énoncer le théorème de structure.

Théorème 2.6. Un gruope G est q.i.i. si et seule- ment si G est d'une des trois formes suivantes.

(1) $G = A \oplus D_t$

(2) $G = D$

(3) $G = \bigoplus_{p \in P} G_p$, $G_p = \bigoplus_{i \in I_p} C_{p_i}$

où A est sans torsion de rang un, D_t est divisible torsion, D est divisible, C_{p_i} est concyclique tel que $C_{p_i} \simeq C_{p_j}$ pour tout $i,j \in I_p$.

Section 3.

Les groupes q.i.p. On se restreint d'abord au cas torsion. Comme précédemment, on peut se réduire au cas p-primaire. Il est évident que $\mathbb{Z}(p^\infty)$ est q.i.p. . Le lemme suivant nous permet de dire plus.

Lemme. 3.1. Un groupe divisible G est q.i.p. si et seulement si $G \simeq \mathbb{Z}(p^\infty)$.

Preuve: Si $G \not\simeq Z(p^\infty)$ on peut poser sans perte de généralité que $G = A \oplus B$ où $A \simeq B \simeq \mathbb{Z}(p^\infty)$. Donc $A = \langle x_0, x_1, x_2, \ldots, \rangle$, $B = \langle y_0, y_1, \ldots \rangle$ avec $px_0 = py_0 = 0$. $px_i = x_{i-1}$, $py_i = y_{i-1}$, $i \geq 1$. Soit $H = \langle x_0 \rangle$. Alors $G/H = (A/H) \oplus (B \oplus H/H)$.

Soit $f: G/H \to G/H$ défini par $f(\overline{x}_i) = \overline{x}_i$, $f(\overline{y}_i) = \overline{x}_{i+1}$. Alors $f^2 = f$. Si G est q.i.p. , il existe $\varphi: G \to G$ tel que $\nu_H . \varphi = f . \nu_H$ d'où $\varphi(y_0) - x_1 \in H = \langle x_0 \rangle$, $\varphi(y_0) = x_1 + ax_0$, $a \in \mathbb{Z}$ et $0 = \varphi(py_0) = x_0$ ce qui est une contradiction.■

Lemme 3.2. Soit $G = \langle x \rangle \oplus A$ où A est un p-groupe tel que $p^n A \neq 0$ et $O(x) = p^n$. Alors G n'est pas q.i.p.

Preuve: Soit $0 \neq y \in p^n A[p]$ et soit $H = \langle y \rangle$. Alors $G/H = \langle \overline{x} \rangle \oplus A/(y)$. Soit $f: G/H \to G/H$ défini par $f(\overline{x}) = \overline{z}$ et $f_{A/\langle y \rangle} = 1_{A/\langle y \rangle}$ où $p^n z = y$. Alors $f^2 = f$.

Supposons que G soit q.i.p.. Il existe donc $\varphi: G \to G$ tel que $\nu_H \circ \varphi = f \circ \nu_H$ d'où $\varphi(x) - z =$ $= ay \in \langle y \rangle$, $a \in \mathbb{Z}$. Par conséquent $0 = p^n(x) =$ $= p^n z = y$ ce qui est une contradiction.∎

Théorème 3.3. Un groupe torsion G est q.i.p. si et seulement si G_p est soit quasi-projectif, soit isomorphe à $\mathbb{Z}(p^\infty)$ et ce pour tout p premier.

Preuve: Il suffit de considérer le cas p-primaire. On écrit $G = D \oplus R$ où D est divisible et R est réduit. Si $D \neq 0$, alors $D \simeq \mathbb{Z}(p^\infty)$ par le lemme 3.1. De plus, $R = 0$ par le lemme 3.2. Si $D = 0$, R est quasi-projectif par le lemme 3.2.∎

On s'intéresse maintenant au cas sans torsion. On procède par étapes, considérant d'abord les groupes de rang un, ensuite les groupes de rang fini et enfin les groupes de rang infini.

Lemme 3.4. Si $G \simeq \mathbb{Q}$, alors G n'est pas q.i.p..

Preuve: Il existe $\langle x \rangle = H \leqslant G$ tel que $G/H \simeq \bigoplus_p \mathbb{Z}(p^\infty)$. Soit f un endomorphisme idempotent non trivial de G/H et supposons que G soit q.i.p.. Il existe $\varphi: G \to G$ tel que $\nu_H \circ \varphi = f \circ \nu_H$.

Donc $(\varphi^2-\varphi) \leqslant H$ et $(\varphi^2-\varphi)(G) = 0$ car H est cyclique et G divisible. De plus f non trivial implique φ est non trivial, ce qui contredit que $\mathbb{Q}$ soit indécomposable.

Théorème 3.5. Un groupe sans torsion de rang un G est q.i.p. si et seulement si G est libre.

Preuve: Supposons que G soit q.i.p. . Par le lemme précédent, on peut supposer que G n'est pas p-divisible pour un p premier fixé. Soit H un sous-groupe p-basique de G. Alors $H \cong \mathbb{Z}$. Soient $q \neq r$ deux nombres premiers différents de p. Alors qrH est p-basique dans G.

Comme $(H/qrH)_q \neq 0 \neq (H/qrH)_r$, il existe un endomorphisme idempotent non trivial f de G/qrH. Soit $\varphi: G \to G$ tel que $\nu_{qrH}.\varphi = f.\nu_{qrH}$. Alors $(\varphi^2-\varphi)(G) \leqslant qrH \leqslant H$. Donc $(\varphi^2-\varphi)(H) \leqslant H$ d'où $(\varphi^2-\varphi)|_H = n|_H$ où n est la fonction multiplication par $n \in \mathbb{Z}$. Donc $\varphi^2 - \varphi = n$ car G est p-réduit et comme $n \neq 0$ car G est indécomposable $G \cong nG \leqslant H$ libre et $G \cong Z$.∎

Théorème 3.6. Si G est un groupe sans torsion de rang fini, alors G est q.i.p. si et seulment si G est libre.

Preuve: On precède par induction sur n, le rang de G. Le cas $n = 1$ suit du théorème précédent. Supposons que tout groupe sans torsion q.i.p. de rang inférieur à n soit libre. Soit p premier tel que G ne soit pas p-divisible. Alors il exis te un sous-groupe p-basique H de G tel que G/H possède un endomorphisme idempotent non trivial f. Soit $\varphi: G \to G$ tel que $\nu_H.\varphi = f.\nu_H$. Alors $(\varphi^2 - \varphi)(G) \leq H$ libre.

Si $\varphi^2 - \varphi$ est injectif alors $G \simeq (\varphi^2-\varphi)G \leq H$ d'où G est libre. Si $\varphi^2 - \varphi = 0$ alors $G \simeq \ker \varphi \oplus \operatorname{Im} \varphi$ et si $\ker \varphi^2 - \varphi \neq 0, G$, alors $G \simeq \ker (\varphi^2 - \varphi) \oplus \operatorname{Im} (\varphi^2 - \varphi)$. L'hypothèse d'induction nous permet de conclure.∎

Théorème 3.7. Si G est sans torsion de rang infini alors G est q.i.p. si et seulement si G est libre.

Preuve. Supposons que G est q.i.p. . Soit L un sous-groupe libre de G de même rang α que G. Soit $H \leq L$ tel que $L/H \simeq \bigoplus_{\alpha} \mathbb{Q}$. Alors $G/H = (L/H) \oplus (S/H)$ où $S \leq G$. Considérons $f: G/H \to G/H$ la projection de G/H sur $L/H \leq G/H$. Si $G \neq L$, f est non trivial.

Soit $\varphi: G \to G$ tel que $\nu_H.\varphi = f.\nu_H$. Alors $\varphi(G) = L$ d'où $G = K \oplus J$ où $K \simeq L$. Soit $H_1 \leq K$ tel que $(K/H_1) \simeq \bigoplus_{\alpha} \mathbb{Q}$. Alors $(G/H_1) = (K/H_1) \oplus$ $\oplus ((J \oplus H_1)/H_1)$. Soit $f_1: G/H_1 \to G/H_1$ défini par $f_1|_{(J \oplus H_1)/H_1}$ est l'inclusion canonique de

$(J \oplus H_1)H_1 \simeq J$ dans son enveloppe injective K/H_1 et $f_1|_{(K/H_1)} = 1_{(K/H_1)}$.

Alors $f_1^2 = f_1$ et il existe $\varphi: G \to G$ tel que $\nu_{H_1} \circ \varphi = f_1 . \nu_{H_1}$. De plus $\varphi|_J$ est un monomorphisme et $\varphi(J) \leqslant K$ libre. Donc G est libre.∎

On obtient donc qu'un groupe sans torsion est q.i.p. si et seulement si il est libre. Ce résultat et la proposition 1.1 c) nous permet de dire que:

Proposition 3.8. Si G est q.i.p., alors $G = A \oplus T$ où T est la partie porsion de G.∎

Lemme 3.9. Si $G = A \oplus B$ où $A = \langle x \rangle$, $O(x) = \infty$ et $B = \langle y \rangle$, $O(y) = p^n$ alors G n'est pas q.i.p.

Preuve: Supposons que G soit q.i.p. et soit $H = \langle px \rangle$. On définit $f: G/H \to G/H$ par $f(\overline{y})=\overline{x}$, $f(\overline{x})=\overline{x}$. Alors $f^2 = f$ et donc il existe $\varphi: G \to G$ tel que $\nu_H . \varphi = f . \nu_H$. Par conséquent, $\varphi(y) - x = \alpha p x$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\varphi(y) = (1-\alpha p)x$ d'où $p^n = \alpha p^{n+1}$ ce qui est une contradiction.∎

Proposition 3.10. Si $G = A \oplus B$ où A est libre et $B \simeq Z(p^\infty)$ et si G est q.i.p. alors A est de rang fini.

Preuve: Sinon, il existe $H \leqslant A$ tel que $A/H \simeq Z(p^{\infty})$. On définit $f: G/H \to G/H$ par $f_{|A/H} = 1_{A/H}$ et $f_{|(B \oplus H/H)}$ est l'isomorphisme de $(B \oplus H)/H$ dans A/H. Alors $f^2 = f$ et il existe $\varphi: G \to G$ tel que $\nu_H \circ \varphi = f \circ \nu_H$. Donc $\varphi(B) \leqslant A$ et $\varphi|_B = 0$. Mais $\varphi|_B$ est un monomorphisme, ce qui est une contradiction. ∎

Théorème 3.11. Si $G = A \oplus B$ où A est libre et B est torsion divisible non nul tel que $r_p(B) \leqslant 1$, alors G est q.i.p. si et seulement si A est de rang fini.

Preuve: La proposition précédente nous dit que A est de rang fini si G est q.i.p.. Inversement, supposons que A soit de rang fini. Soit $H \leqslant G$. Si $\pi_A: G \to A$ est la projection de G sur A, alors $\pi_A(H) \leqslant A$ est libre. Donc $H = ((\ker \pi_A) \cap H) \oplus A_1$ où $A_1 \simeq \pi_A(H)$ libre. Comme $\ker \pi_A = B = G_t$, $H = A_1 \oplus B_1$ où $B_1 \leqslant B$ et A_1 libre.

Comme $A_1 \cap B = 0$, sans perte de généralité, on peut supposer $A_1 \leqslant A$. Par conséquent $G/H \simeq (A/A_1) \oplus (B/B_1)$. Soit f un endomorphisme idempotent de G/H. Alors $f(B/B_1) \leqslant B/B_1$ car B/B_1 est divisible et A/A_1 est réduit.

Soit $\varphi_1: B \to B$ tel que $\nu_{B_1} \circ \varphi_1 = f|_{B/B_1} \circ \nu_{B_1}$.

Soit $\varphi_2 : A \to G$ tel que $\nu_H \circ \varphi_2 = f \circ \nu_{H|A}$ (ce φ_2 existe car A est projectif). Soit $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ Alors $\nu_H \cdot \varphi = f \cdot \nu_H$. ■

Voici donc la caractérisation générale:

<u>Théorème 3.12</u>. Un groupe G est q.i.p. si et seulement si G est d'une des trois formes suivantes:

1) G est libre

2) $G = L \oplus D$, L libre de rang fini, D divisible torsion tel que $r_q(D) \leq 1$.

3) G est torsion tel que G_p est soit $Z(p^\infty)$, soit quasi-projectif.

***

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arnold, D.M., O'Brien, B. and Reid, J.D., Torsion Free Abelian q.p.i. and q.p.p. Groups, à paraître.

[2] Arnold, D.M., Vinsonhaler, C.I. and Wickless, W.J., Quasi-Pure-Projective and Injective Torsion Free Abelian Groups of Rank 2,

Rocky Mountain Journal of Mathematics, volume 6, Nº 1, 1976, pp.61 à 70.

[3] Benabdallah, K. et Bradley, R., Sur les groupes quasi-purs-projectifs torsion, Can.J. Math., Vol. XXIX, Nº 1, 1977 pp.107-110.

[4] Benabdallah, K. et Bradley, R., Sur les groupes quasi-purs-projectifs sans torsion, Comm.Math.Univ.Carolinae, à paraître.

[5] Benabdallah, K. et Laroche, A., Sur le problème 17 de L. Fuchs, Annales des Mathématiques du Québec, vol. 1, Nº 1, 1976.

[6] Benabdallah, K. et Laroche, A., Sur les groupes quasi-purs-injectifs sans torsion, Rendiconti di Mathematica, Rome, à paraîtres.

[7] Fuchs, L., Infinite Abelian Groups, Vol. I et II, Academic Press, New York, 1970, 1973.

Université de Montréal
Département de Mathématiques
Montréal, Canada.

(Recibido en julio de 1977).