

SOBRE UM TEOREMA DE LAGRANGE PARA  
QUASE GRUPOS DE WARD

por

Clóvis Pereira da SILVA

O objetivo desta nota é mostrar que vale para quase grupos de Ward finitos um teorema equivalente ao teorema de Lagrange para grupos finitos, mas que tal teorema não é válido para quase grupos de Cardoso finitos.

Definição 1. Chama-se quase grupo de Cardoso a todo quase grupo  $(G, \cdot)$  que contém um elemento  $i$  tal que:

$$(C1) \quad a \cdot x = b \leftrightarrow x = (i \cdot b) \cdot (i \cdot a), \text{ para todos } a, b \in G,$$

$$(C2) \quad y \cdot a = b \leftrightarrow y = b \cdot (i \cdot a), \text{ para todos } a, b \in G.$$

Exemplo: Seja  $G = \{i, a, b, c, d, e\}$  com a composição definida pela tabela de Cayley:

$\circ$	i	a	b	c	d	e
i	i	c	b	a	d	e
a	a	i	e	c	b	d
b	b	e	i	d	a	c
c	c	a	d	i	e	b
d	d	b	c	e	i	a
e	e	d	a	b	c	i

Os axiomas da Definição 1 são independentes. O conjunto dos números inteiros com a composição definida por  $a \cdot b = b - a$  verifica (C2), mas não verifica (C1). Ao passo que o quase grupo definido pela tabela:

$\circ$	i	a	b	c
i	a	i	c	b
a	b	a	i	c
b	c	b	a	i
c	i	c	b	a

verifica (C1), mas não verifica (C2).

Definição 2. Chama-se quase grupo de Ward a qualquer quase grupo  $(G, \circ)$  que satisfaz os seguintes axiomas:

(W1) Existe um elemento  $i \in G$  tal que  $a \cdot a = i$ ,

para todo  $a \in G$ ,

(W2) Para todos  $a, b, c$  em  $G$  tem-se:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (i \cdot b) \text{ ).}$$

Exemplo: Seja  $G = \{i, a, b\}$  com a composição definida pela tabela:

$\cdot$	$i$	$a$	$b$
$i$	$i$	$b$	$a$
$a$	$a$	$i$	$b$
$b$	$b$	$a$	$i$

Um quase grupo de Ward é um quase grupo de Cardoso. Em consequência,  $i$  é uma unidade à direita.

Os axiomas de Definição 2 são independentes. De fato, o conjunto dos números inteiros com a composição definida por:  $a \cdot b = b - a$  verifica (W1) mas não verifica (W2). Enquanto que o conjunto dos números inteiros com a adição usual verifica (W2), mas não verifica (W1).

Lema 1. Em um quase grupo de Ward  $(G, \cdot)$ , para todos  $a, h, h' \in G$ , tem-se:  $a \cdot h = (a \cdot h') \cdot (h \cdot h')$ .

Demonstração: Com efeito,  $(a \cdot h') \cdot (h \cdot h') = a \cdot ((h \cdot h') \cdot (i \cdot h')) = a \cdot (h \cdot ((i \cdot h') \cdot (i \cdot h'))) = a \cdot (h \cdot i) = a \cdot h$

Lema 2. Se  $(H, \cdot)$  é um subquase grupo de um quase

grupo de Ward finito  $(G, \cdot)$  então toda classe lateral à esquerda de  $H$  tem o mesmo número de elementos que  $H$ .

Demonstração: De fato, a aplicação que leva um elemento  $h \in H$  ao elemento  $a.h \in a.H$  é injetiva. Logo, cada elemento  $j = a.h \in a.H$  é a imagem de um único elemento  $h = a.j \in H$ . ■

Teorema 3. Seja  $(H, \cdot)$  um subquase grupo de um quase grupo de Ward  $(G, \cdot)$ , então duas classes laterais à esquerda de  $H$  em relação a  $G$  ou são distintas ou coincidem.

Demonstração: Suponha que as classes laterais  $a.H$  e  $b.H$  têm um elemento comum:  $d = a.h' = b.h''$ , onde  $h', h'' \in H$ . Então  $b.H$  contém todos os elementos da forma:

$$\begin{aligned} a.h &= (a.h') \cdot (h.h') = (b.h'') \cdot (h.h') = \\ &= b \cdot ((h.h') \cdot (i.h'')) , \end{aligned}$$

pertencentes a  $a.H$ . De modo semelhante, a classe lateral à esquerda  $a.H$  contém todos os elementos de  $b.H$ . Logo,  $a.H = b.H$ . ■

Como o elemento  $i$  do quase grupo de Ward  $(G, \cdot)$  pertence a todos seus subquase grupos, cada classe lateral à esquerda  $a.H$  contém sempre o elemento  $a = a.i$ . Logo,  $G$  se esgota em suas

classes laterais à esquerda. Em consequência concluimos

Teorema 4. A ordem de um quase de Ward finito  $(G,.)$  é um múltiplo da ordem de qualquer de seus subquase grupos.

O teorema 4, que é o equivalente do teorema de Lagrange para grupo finitos, não vale para os quase grupos de Cardoso finitos  $(G,.)$ .

Para tal exibiremos um exemplo. Seja  $G = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  com a composição definida pela tabela:

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	3	2	7	9	8	4	6	5
2	2	3	0	1	9	8	7	6	5	4
3	3	2	1	0	8	7	9	5	4	6
4	4	7	9	8	0	6	5	1	3	2
5	5	9	8	7	6	0	4	3	2	1
6	6	8	7	9	5	4	0	2	1	3
7	7	4	6	5	1	3	2	0	9	8
8	8	6	5	4	3	2	1	9	0	7
9	9	5	4	6	2	1	3	8	7	0

$(G,.)$  é quase grupo de Cardoso de ordem 10 e tem um subquase grupo de orden 4.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Cardoso, J.M. & Silva, C.P., On Ward quasigroups, A aparecer.
- [2] Sade, A., Quasigroupes de Cardoso et Pseudo-groupes de Zelmer, Anal. St. Univ. A. I. Cuza, 13(1967), 5-15.

\*\*\*

Departamento de Matemáticas  
Universidade Federal do Paraná  
Caixa Postal 1963  
80.000-Curitiba-PR. BRASIL.

(Recibido en diciembre de 1977).