Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XIII (1979) págs. 75 - 92

SUBDIVISIONES RELATIVAS

por

Roberto RUIZ S.

§0. **Introducción**. Kan [6] y otros autores [7] han dado caracterizaciones de funtores $\Delta^{\circ}S \to \Delta^{\circ}S$ ($\Delta^{\circ}S$ denota la categoría de los conjuntos simpliciales) que han dado en llamarse "functores de subdivisión" los cuales se distinguen, entre otras cosas, por que el siguiente diagrama conmuta salvo por una equivalencia de homotopía:

$$\begin{tikzcd} \Delta^{\circ}S \arrow[r] \arrow[dr, "| \, |"'] & \Delta^{\circ}S \arrow[d, "| \, |"] \\ & \mathrm{Top} \end{tikzcd}$$

en donde Top denota la categoría de los espacios topológicos y $| \, | : \Delta^{\circ}S \to \mathrm{Top}$ denota la *realización geométrica* de Milnor definida en [4].

En este artículo expongo una técnica para construír funtores de subdivisión pero dentro de un contexto más general que el estudiado hasta el momento. En efecto en cambio del funtor *realización geométrica* uso el definido por un modelo (funtor covariante) $M : \Delta \to Top$, y en cambio de la homotopía corriente uso la de un sistema homotópico r como se definió en [1]. Si $Sd : \Delta^{\circ}S \to \Delta^{\circ}S$ denota el funtor subdivisión que definimos en §3, $R_M : \Delta^{\circ}S \to Top$ la realización inducida por M, y "$\underline{\underline{r}}$" denota la equivalencia de homotopía inducida por r, entonces se desea tener el siguiente teorema: *para cada conjunto simplicial* X, $R_M(Sd(X)) \underline{\underline{r}} R_M(X)$.

Las condiciones que impongo sobre Sd, y en general el desarrollo de la teoría que propongo, son funtoriales en carácter y pueden ser consideradas dentro del contexto de "cambio de modelos" desarrollado en [3]. Si $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son categorías, un funtor $R : \underline{A} \to \underline{B}$ puede admitir un adjunto a derecha digamos $S : \underline{B} \to \underline{A}$. En tal caso diré que (R,S) es un *par adjunto*. En cuanto a notación para conjuntos simpliciales y cosimpliciales de una categoría $\underline{B}$, $\Delta\underline{B}$ denota la categoría de los objetos cosimpliciales de $\underline{B}$ y $\Delta^{\circ}\underline{B}$ la de los simpliciales. Además, si X es un objeto simplicial de $\underline{B}$ denotamos $X[n] = X_n$, y si $w : [n] \to [n]$ es una flecha de A, entonces $X(w) = w_*$. Para el caso cosimplicial la notación será X^n y w^* respectivamente. Finalmente, si A es un objeto de $\underline{B}$ entonces el funtor constante de valor A será denotado por $\ddot{A}$ cuando se considere como objeto cosimplicial de $\underline{B}$ y $\underset{''}{A}$ cuando se considere como objeto simplicial.

§1. Funtores singulares y realizaciones. Según la teoría de pares adjuntos, dado un funtor $Y:\Delta \to \underline{B}$, éste define un funtor $S_Y: \underline{B} \to \Delta^\circ S$ dado sobre los objetos por $(S_Y(A))_n = \underline{B}(Y^n, A)$ y si $w: [n] \to [n]$ entonces $(S_Y(A))(w)$ está dada por composición con $Y(w)$. Ahora, si f es un morfismo de $\underline{B}$ entonces $S_Y(f)$ está dado, nivel por nivel, por composición con f.

Cuando $\underline{B}$ es una categoría co-completa entonces S_Y admite un adjunto a izquierda denotado $R_Y: \Delta^\circ S \to \underline{B}$. Las categorías S (conjuntos), $\Delta^\circ S$ y Top son co-completas y por tanto los funtores singulares sobre ellas admiten realizaciones. Damos a continuación su caracterización.

1.1. Proposición. *Dado un modelo* $Y: \Delta \to S$ *(resp.* $Z: \Delta \to \text{Top}$*) entonces la realización inducida está dada por* $R_Y(X) = (\coprod_n X_n \times Y^n)/t$ *(resp.* $R_Z(X) = (\coprod_n X_n \times Z^n)/t$*), en donde* $\coprod$ *denota la reunión (resp. la suma topológica),* $X_n \times Y^n$ *el producto conjuntista (resp.* $X_n \times Z^n$ *denota el produc* *ducto topológico considerando a* X^n *como un espacio discreto), y el cociente es cociente conjuntista (resp. topológico) por la relación de equivalencia* t *que identifica para cada* $w\colon [n] \to [n]$, x *en* X_n, y *en* Y^n *(resp.* z *en* Z^n) *a las parejas* $(w_*(x),y)$ *y* $(x,w^*(y))$ *(resp.* $(w_*(x),z)$ *y* $(x,w^*(z))$. *Además, si* $f\colon X \to K$, *entonces* $R_Y(f)([x,y]) = [f_n(x),y]$ *(resp.* $R_Z(f)([x,z]) = [f_n(x),z]$), *en donde* $[x,y]$ *denota la clase de equivalencia de la pareja* (x,y).

Uno demuestra que R_Y(resp. R_Z) es un funtor covariante y que es adjunto de S_Y(resp. S_Z).

En el caso $Y\colon \Delta \to \Delta^o S$ denotamos, para cada Y^n en $\Delta^o S$, $Y^n(m) = Y^n_m$. Es decir que en la notación Y^n_m, n varía contravariantemente y m covariantemente. Es fácil ver que, para cada m, Y define un modelo conjuntista $Y_m\colon\Delta \to S$ dado por $Y_m\,[n] = Y^n_m$ y para $w\colon [n] \to [m]$, $Y_m(w) = (Y(w))_m$.

1.2. <u>Proposición.</u> *Para cada* $Y\colon\Delta \to \Delta^o S$ *un funtor adjunto de* S_Y, *digamos* R_Y, *está dado así: sobre los objetos* $(R_Y(X))_m = R_{Y_m}(X)$, *y si* $r\colon [n] \to [m]$ *entonces* $(R_Y(X))(r) = R_{Y_m}(X)$, *en donde para el* r *dado* $Y_r\colon Y_n \to Y_m$ *es la función cosimplicial* $(Y_r)^p = Y^p(r)$ *y* $R_{Y_r}\colon R_{Y_n} \to R_{Y_m}$ *es* *la transformación natural inducida por* Y_r *sobre los funtores realización conjuntistas.* *Sobre los morfismos, si* $f\colon X \to K$ *entonces* $(R_Y(f))_m = R_{Y_m}(f)$.

La demostración es fácil pero larga. Un hecho que se usa y que vale la pena aclarar es el siguiente: dados dos pares adjuntos $\underline{A} \overset{R}{\to} \underline{B} \overset{S}{\to} \underline{A}$ y $\underline{A} \overset{R'}{\to} \underline{B} \overset{S'}{\to} A$, entonces existe una función uno a uno y sobre, $G : \mathrm{Trans}(S,S') \to \mathrm{Trans}(R',R)$, donde Trans denota la clase de las transformaciones naturales del primer funtor en el segundo. Por otro lado si $Y, Y'\colon \Delta \to \underline{B}$ son dos modelos de $\underline{B}$ y $a\colon Y \to Y'$ es un morfismo cosimplicial entonces a induce una transformación natural $S_a\colon S_{Y'} \to S_Y$, dada sobre un objeto A de $\underline{B}$ por $(S_a(A))_n(T) = T\circ a^n$ para cada T en $(S_{Y'}(A))_n$. Aquí hemos denotado $G(a) = R_a$. En la proposición anterior, este mecanismo entrega la igualdad $R_{Y_r} = G(S_{Y_r})$. Note que en los casos conjuntistas y topológicos R_a está dado por $R_a(X)[x,y] = [x,a(y)]$, mientras en el simplicial está dado por $(R_a(X))_p = R_{a_p}(X)$.

El siguiente resultado será muy útil en lo que sigue:

1.3. <u>Proposición</u>. *Sea* $\underline{B}$ *una categoría co-completa,* $Y\colon \Delta \to \underline{B}$ *un modelo sobre* $\underline{B}$ *y* $\underline{B} \overset{I}{\to} \underline{B} \overset{J}{\to} \underline{B}$ *un par adjunto (note que* $\Delta \overset{Y}{\to} \underline{B} \overset{I}{\to} \underline{B}$ *es un modelo* *sobre* $\underline{B}$). *Entonces existe un isomorfismo natural* $P : R_{IoJ} \cong IoR_Y$.

La demostración sigue del hecho que $\Delta^o S \xrightarrow{IoR_Y} \underline{B} \xrightarrow{S_Y{}^oJ} \Delta^o S$ es un par adjunto y S_{IoY} es naturalmente isomorfo a $S_Y{}^oJ$. En particular cuando $\underline{B}$ es S, $\Delta^o S$ ó Top, y si $I: B \to B$ denota el funtor producto por A, para un A fijo de $\underline{B}$, entonces I admite un adjunto en el caso S y $\Delta^o S$, y en algunos casos para Top. En tal caso, para un modelo $Y: \Delta \to \underline{B}$ se tendrá que $\Delta \overset{Y}{\to} \underline{B} \overset{I}{\to} \underline{B}$ es precisamente $Y \times \overset{''}{A}$. La proposición afirma entonces que $R_{Y\times \overset{''}{A}}(X) \overset{P}{\cong} R_Y(X)\times A$ naturalmente.

§2. Homotopías. Recordemos de [1] que dado un sistema homotópico sobre una categoría $\underline{B}$ entonces, por definición, dos morfismos $f,g: C \to D$ son *homótopos* (denotado $f \overset{r}{\simeq} g$), *relativamente al sistema* (denotado aquí por r), si existe un morfismo $h: I(C) \to D$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ d^o(C)\downarrow & \searrow f & \\ I(C) & \longrightarrow & D \\ d^1(C)\uparrow & \nearrow g & \\ C & & \end{array}$$

con $r = (I, d^o, d^1, s)$. Nosotros agregamos el concepto de r-equivalencia de homotopía así: $f:C \to D$

se dice una *r-equivalencia de homotopía*, y entonces C es *r-homotópicamente equivalente a* D (denotado $C \overset{r}{\simeq} D$), si existe un morfismo $g: D \to C$ tal que $f \circ g \overset{r}{\simeq} 1_D$ y $g \circ f \overset{r}{\simeq} 1_C$. Esta relación es reflexiva y simétrica pero en general no es transitiva. Sin embargo lo único que usaremos aquí es el siguiente hecho: si f es una r-equivalencica de homotopía entonces también lo es el resultado de componer f con cualquier isomorfismo.

Un sistema homotópico sobre una categoría se extiende a un sistema sobre la categoría de sus modelos. En efecto si $r = (I, d^\circ, d^1, s)$ es un sistema homotópico en una categoría $\underline{B}$ entonces r induce sobre $\Delta\underline{B}$ el sistema $\Delta r = (\Delta I, \Delta d^\circ, \Delta d^1, \Delta s)$ así: $\Delta I: \Delta\underline{B} \to \Delta\underline{B}$ es el funtor I extendido sobre $\Delta\underline{B}$. Es decir que si Y pertenece a $\Delta\underline{B}$ entonces $\Delta I(Y)^n = I(Y^n)$ y $\Delta I(Y)(w) = I(w)$. Las transformaciones naturales están dadas por las fórmulas $(\Delta d^i(Y))^n = d^i(Y^n)$ y $(\Delta s(Y))^n = s(Y^n)$, $i = 0,1$.

Dados dos modelos Y,Z sobre $\underline{B}$ y dos morfismos cosimpliciales $F,G: Y \to Z$ entonces es claro que $F \overset{\Delta r}{\simeq} G$ si, y solo si, para cada n existe una r-homotopía h^n de F^n en G^n y para cada $w: [n] \to [m]$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} I(Y^n) \arrow[r, "h^n"] \arrow[d, "I(Y(w))"'] & Z^n \arrow[d, "Z(w)"] \\ I(Y^m) \arrow[r, "h^m"'] & Z^m \end{tikzcd}$$

Veamos ahora que homotopías entre modelos inducen homotopías entre las realizaciones, y lo mismo para equivalencias de homotopía. Estos hechos están resumidos en la Proposición 2.2 para cuya preparación adelantaremos algunas observaciones.

Dado un sistema homotópico r sobre $\underline{B}$, a la transformación natural $d^i: 1_{\underline{B}} \to I$ corresponde, en forma biunívoca, una transformación natural $D^i: J \to 1_{\underline{B}}$, cuando (I,J) es un par adjunto. Similarmente, si denotamos por $d^i_{R_Y}: R_Y \to I\circ R_Y$ a la transformación que en X tiene como morfismo a $d^i_{R_Y}(X): R_Y(X) \to I(R_Y(X))$, entonces la transformación correspondiente entre los funtores singulares está dada para cada A en $\underline{B}$ por $S_Y(D^i(A)): S_Y(J(A)) \to S_Y(A)$ y la denotaremos por $S_Y D^i$. Otras dos transformaciones naturales correspondientes (isomorfismos naturales) que usaremos son $p': S_{I\circ Y} \to S_Y\circ J$ con $p: I\circ R_Y \to R_{Y\circ I}$. Finalmente como se tiene un compuesto $\Delta \xrightarrow{Y} \underline{B} \xrightarrow{I} \underline{B}$ entonces existe un morfismo cosimplicial $Y \to Y\circ I$ que en el nivel n es $d^i_Y n$ y que denotaremos por d^i_Y. Se tienen pues las correspondientes transformaciones naturales $R_{d^i_Y}: R_Y \to R_{I\circ Y}$ y

$S_{d^i_Y} : S_{I\circ Y} \to S_Y.$

La siguiente proposición será de gran ayuda en lo que sigue:

2.1. Proposición. *Para* $i = 0,1$ *el siguiente diagrama de transformaciones naturales conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & R_Y \arrow[dl, "d^i_{R_Y}"'] \arrow[d, "R_{d^i_Y}"] \\ I\circ R_Y \arrow[r, "p"'] & R_{I\circ Y} \end{tikzcd}$$

Se puede ver que la demostración se reduce a mostrar que para cada $a: I(Y^n) \to A$, $D^i(A)\circ a = a\circ d^i(Y^n)$. Esto último se desprende del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y^n \arrow[r, "q(Y^n)"] \arrow[dr, "d^i_{Y^n}"'] & J(I(Y^n)) \arrow[r, "J(a)"] \arrow[d] & J(A) \arrow[d, "D^i(A)"] \\ & I(Y^n) \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical del centro es $D^i(I(Y^n))$ y $q: 1_{\underline{B}} \to J\circ I$ es una de las transformaciones de adjunción del par (I,J).

2.2. Proposición. *Sea* $\underline{B}$ *una categoría y* r *un sistema homotópico cuyo cilindro* I *admite un adjunto a derecha* J. *Sea* Y,Z *modelos sobre* $\underline{B}$. *Entonces:*

(i) Para cada par de morfismos simpliciales $F, G : Y \to Z$, *si* $F \overset{\Delta r}{\simeq} G$ *entonces para cada conjunto simplicial* X *se tiene que* $R_F(X) \overset{r}{\simeq} R_G(X)$, *naturalmente sobre* X.

(ii) Si Y *es* Δr*-homotópicamente equivalente a* Z, *entonces para cada* X, *conjunto simplicial,* $R_Y(X)$ *es* r*-homotópicamente equivalente a* $R_Z(X)$, *naturalmente sobre* X.

Para la demostración se nota que si H es una homotopía de F en G (según Δr) entonces para cada X el siguiente diagrama conmuta, la parte izquierda por la proposición 2.1,

$$\begin{tikzcd}
 & R_Y(X) \arrow[dl, "d^0(R_Y(X))"'] \arrow[d, "R_{d^0_Y}(X)"] \arrow[dr, "R_F(X)"] & \\
I(R_Y(X)) \arrow[r, "p(X)"] & R_{I\circ Y}(X) \arrow[r, "R_H(X)"] & R_Z(X) \\
 & R_Y(X) \arrow[ul, "d^1(R_Y(X))"] \arrow[u, "R_{d^1_Y}(X)"'] \arrow[ur, "R_G(X)"'] &
\end{tikzcd}$$

Claramente, $R_H(X) \circ p(X) : R_F(X) \overset{r}{\simeq} R_G(X)$ es natural en X, lo que completa la parte (i). La parte (ii) es una consecuencia inmediata de la anterior.

2.3. __Nota__. La proposición anterior asegura que si se fija un sistema homotópico r en $\underline{B}$ cuyo cilindro I tiene un adjunto a derecha J, entonces el sistema homotópico inducido por r sobre los modelos, el cual hemos denotado Δr, tiene una función directa sobre el funcionamiento de las realizaciones definidas por los modelos. En efecto la proposición asegura que si los modelos son homotópicamente equivalentes entonces las realizaciones que ellos definen producen imagenes homotópicamente equivalentes por el sistema original sobre $\underline{B}$. En particular si consideramos sobre Top la homotopía corriente y si tomamos como Y el espacio cosimplicial de los simplejos topológicos Δ^n entonces $R_Y = ||$, la realización geométrica de Milnor. Si Z es otro modelo sobre Top que sea homotópicamente equivalente al primero, entonces para cada conjunto simplicial X se tiene que $|X| \simeq R_Z(X)$, en donde $\simeq$ denota la equivalencia de homotopía corriente en Top.

Note que aunque cada Δ^n es homotópicamente equivalente a un punto no toda realización de conjuntos simpliciales lo es. Esto sucede por que la equivalencia de homotopía en cuestión no es simplicial y por tanto no es una equivalencia de homotopía extendida. Naturalmente, si un modelo es nivel a nivel homotópicamente equivalente a un punto, para una homotopía dada, de modo que el modelo dado y el punto cosimplicial sean homotópicamente equivalentes, entonces la relación inducida por el modelo es homotópicamente trivial.

En el caso de categorías con objeto final, un objeto es homotópicamente trivial si es homotópicamente equivalente al objeto final. Si además existe el concepto de subobjeto y estos se preservan por morfismos, entonces se tiene que si un modelo es homotópicamente trivial entonces el objeto (modelo) final es un subobjeto del modelo dado. Dicho de otra manera, si el modelo final no es un subojeto del modelo dado entonces este último no puede ser homotópicamente trivial. En el caso de S, $\Delta^o S$ y Top esto significa que si un modelo no tiene puntos cosimpliciales entonces no es homotópicamente trivial. Esta ventaja, junto con la de tener representaciones del tipo Eilenberg-Zilber, hacen que los modelo sin punto cosimplicial sean especialmente aptos para buenas teorías de homotopía (Ver por ejemplo: "Conditions on a model in order for its realization to commute with finite products", que es básico en el desarrollo de la teoría de "Categorías Completamente Simpliciales", desarrolladas por el autor y Carlos J. Ruíz S.)

§3. <u>Subdivisiones</u> <u>Relativas</u>. Hasta ahora hemos estudiado condiciones para que dos modelos $Y, Z:\Delta \to \underline{B}$ tengan realizaciones con imágenes homotópicamente equivalentes para un sistema homotópico r sobre $\underline{B}$. Ahora consideramos funtores $\Delta^o S \to \Delta^o S$ que transforman todo conjunto simplicial en otro con el mismo tipo de homotopía del original, a nivel de realizaciones.

Sea $Y: \Delta \to \Delta^{o}S$ un modelo de $\Delta^{o}S$ y $M:\Delta \to \underline{B}$ un modelo de $\underline{B}$. Consideramos un sistema homotópico $r = (I, d^{o}, d^{1}, s)$ sobre $\underline{B}$ para el cual I admite un adjunto a derecha, digamos J. En general el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{Y} & \Delta^{o}S \\ & {\scriptstyle M}\searrow & \downarrow R_M \\ & & \underline{B} \end{array}$$

no es un diagrama conmutativo, pero sí lo es cuando Y es el modelo de los simplejos simpliciales $\Delta[n]$. Sin embargo, cuando el diagrama conmuta salvo por una Δr-equivalencia de homotopía, entonces $R_M(S_Y(X))$ y $R_M(X)$ están conectados por la r-equivalencia de homotopía de $\underline{B}$. Aquí desarrollamos este punto.

3.1. <u>Definición</u>. $R_Y : \Delta^{o}S \to \Delta^{o}S$ se llama *subdivisión* (o una *subdivisión de la identidad*) *relativa a la pareja* (r,M) si $R_M \circ Y \overset{\Delta r}{\equiv} M$.

Note que 3.1 se puede expresar diciendo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{Y} & \Delta^{o}S \\ {\scriptstyle \mathbf{\Delta}}\downarrow & & \downarrow R_M \\ \Delta^{o}S & \xrightarrow[R_M]{} & \underline{B} \end{array}$$

(en donde $\mathbf{\Delta}$ denota el modelo de los simplejos $\Delta[n]$) conmuta salvo por una Δr-equivalencia de ho motopía. Como R_Δ es, salvo isomorfismo, la identidad de $\Delta^o S$ entonces lo que estamos haciendo es comparar a nivel homotópico R_Y con $1_{\Delta^o S}$, para establecer una noción que nos permita asimilar $R_Y(X)$ como una "subdivisión" de X. Por ejemplo podemos iniciar esta asimilación con el caso en que r sea el sistema homotópico inducido por $M^o \xrightarrow{d_i} M^1 \xrightarrow{s} M^o$ ($i=0,1$), por medio del producto, considerando que si $Y \overset{\Delta r}{=} \Delta$ entonces el modelo Y es una "subdivisión" de Δ. Esto implica que, como se verá, $R_M(X) \overset{r}{=} R_M(R_Y(X))$, o sea que a nivel de realizaciones (vía R_M), X y $R_Y(X)$ tienen el mismo tipo de r-homotopía. Por consistencia asimilamos $R_Y(X)$ como una subdivisión de X, lograda en base a la subdivisión Y de Δ limitada solo por homotopía. Ahora complicamos un poco más el proceso usando una homotopía r cualquiera, e imponemos condiciones sobre Y de modo que la relación que imponíamos sobre las realizaciones todavía se mantega para la homotopía r. Esta es la dada en la definición 3.1. Como se vé, las condiciones sobre Y y Δ llegan a lo más a una equivalencia débil de homotopía. Es por eso que usamos el nombre de subdivisiones *relativas*.

3.2. <u>Teorema</u>. *Sea* r *un sistema homotópico sobre* $\underline{B}$ *cuyo cilindro admite un adjunto a derecha. Sea* M *un modelo sobre* $\underline{B}$ *y* Y *un modelo sobre* $\Delta^o S$. *Si* R_Y *es una subdivisión relativa a* (r,M) *entonces existe una transformación natural* $a: R_M \to R_M \circ R_Y$

tal que para cada X *en* Δ^oS a_X: $R_M(X) \to R_M(R_Y(X))$ *es una equivalencia de r-homotopía*.

Para la demostración, recordemos que, puesto que $R_M \circ Y \overset{\Delta r}{=} M$, por 2.2 existe una transformación natural $e: R_{R_M \circ Y} \to R_M$ tal que para cada X, e_X es una equivalencia de r-homotopía. El teorema quedará demostrado si exhibimos un isomorfismo natural $R_M \circ R_Y \to R_{R_M \circ Y}$. Para ello es suficiente un isomorfismo natural $S_{R_M \circ Y} \to S_Y \circ S_M$, el cual se obtiene por medio de la siguiente cadena de isomorfismo naturales

$$(S_{R_M \circ Y}(A))_n = \underline{B}((R_M \circ Y)^n, A) = \underline{B}(R_M(Y^n), A)$$

$$\simeq \Delta^oS(Y^n, S_M(A)) = (S_Y(S_M(A)))_n.$$

3.3. <u>Definición</u>. Una pareja (Y,M), donde Y es un modelo de Δ^oS y M es un modelo de $\underline{B}$, se dice un *par singular* si salvo isomorfismo el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "M"'] & \Delta^oS \arrow[d, "R"] \\ & \underline{B} \end{tikzcd}$$

Es claro que si (Y,M) es un par singular entonces existe un isomorfismo natural $R_M \circ R_Y \to R_M$. Por tanto Y es una subdivisión relativa a (r,M) para cualquier sistema homotópico r sobre $\underline{B}$. El converso también es cierto puesto que la igualdad es la homotopía de sistemas homotópicos sobre cualquier categoría. Este es el caso para cualquier sistema homotópico en el cual $d^o = d^1$.

Hasta ahora hemos definido subdivisiones *de la identidad* relativas a parejas (r,M). Ahora consideramos subdivisiones de modelos cualesquiera.

3.4. <u>Definición</u>. Sean r un sistema homotópico sobre $\underline{B}$ cuyo cilindro admite un adjunto a derecha y M un modelo de $\underline{B}$. Si Y y Z son modelos de $\Delta^o S$ decimos que Y es una subdivisión de Z relativa a (r,M), denotado $Y \overset{(r,M)}{\equiv} Z$, si $R_M \circ Y \overset{\Delta r}{\equiv} R_M \circ Z$.

Se nota que si la homotopía de r es transitiva entonces la relación $\overset{(r,M)}{\equiv}$ *es una relación de equivalencia sobre la clase de los modelos de* $\Delta^o S$.

La relación anterior compara los modelos a través de sus realizaciones de manera débil, vía la equivalencia de homotopía inducida por r sobre los modelos de $\underline{B}$. Además, también lo estan sus realizaciones, a través de R_M, vía la equivalencia de homotopía de r en $\underline{B}$:

3.5. <u>Proposición</u>. *Para* Y, Z, r, *y* M *como en* 3.4, *si* $Y \overset{(r,M)}{\equiv} Z$ *entonces existe una transformación natural* $a: R_M \circ R_Y \to R_M \circ R_Z$ *tal que para cada* X *en* $\Delta^o S$ *el morfismo* $a_X: R_M(X)) \to R_M(R_Z(M))$

es una r-equivalencia de homotopía.

La demostración es básicamente la misma de 3.2.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Kan, D.M.:"Abstract Homotopy".

[2] Quillen, D.G.:"Homotopical Algebra",Springer Verlag Lecture Notes 43 (1967).

[3] Ruíz, R.: "Change of Models in Top and $\Delta^{\circ}S$", Tesis de Doctorado, Temple University (1977).

[4] Milnor, J.: "The Geometric Realization of a Semi-simplicial Complex", Ann. of Math., Vol. 65 # 2 (1975), 357-362.

[5] Ruíz S., Carlos y Ruíz S.,Roberto: "Conditions on a realizacion functor in order for it to commute with finite products" (Por aparecer).

[6] Kan, D.M.: "On C.C.S Complexes", Am. Jour. of Math., Vol. 79.

[7] Fritsch, R.:"On subdivisions of semi-simplicial sets".

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
Apartado Aéreo 2188
Cali, COLOMBIA.

(recibido en marzo de 1979)