Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XIII (1979) págs. 121 - 138

SOBRE LA DEFINICION DEL PRIMER GRUPO DE HOMOLOGIA EN LOS ABIERTOS DEL PLANO*

por

David MOND

§0. Introducción. En el prefacio de su "Complex Analysis", [1] L.V. Ahlfors menciona la idea de Emil Artin de basar la teoría elemental de la homología en el plano en el índice de curvas cerradas con respecto a puntos de su complemento. En el conjunto $C(\Omega)$ de las curvas cerradas contenidas en Ω (para $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ conexo por arcos), la relación de equivalencia definida por la identidad de índices con respecto a los puntos de $\mathbb{C} - \Omega$ puede usar

---

* Este trabajo forma parte de la tesis de grado del autor en el programa de Magister Scientiae de la Universidad Nacional de Colombia, y fué realizado bajo la dirección del Profesor Jairo Charris.

se de una manera obvia para definir un "grupo de homología" de Ω. En este artículo daremos los detalles de esta definición y demostraremos que el grupo así definido coincide con el primer grupo de homología singular (con coeficientes enteros) cuando $\Omega \subseteq C$ es abierto. Como corolario natural de esta demostración obtendremos una demostración sencilla del teorema homológico de Cauchy, a partir de la versión homotópica.

§1. <u>Definición</u>. Sea $\Omega \subseteq C$ conexo por arcos, y $C(\Omega) = \{\gamma: [0,1] \to \Omega \mid \gamma$ continua, $\gamma(0) = \gamma(1)\}$. Para $\gamma \in C(\Omega)$ diferenciable, el índice de γ con respecto a un punto z_o del complemento de Ω está definido por

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Ind}(\gamma, z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-z_o}$$

No hay ninguna dificultad en extender esta noción a los demás miembros de $C(\Omega)$ mediante aproximaciones diferenciables de las curvas cerradas meramente continuas (Ahlfors, p.117).

Se define una relación de equivalencia en $C(\Omega)$: $\gamma_1 \sim \gamma_2$ *en* Ω (γ_1 *es homóloga a* γ_2 *en* Ω) si $\operatorname{Ind}(\gamma_1, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_2, z)$ para todo $z \in \mathbb{C} - \Omega$.

Finalmente, en el conjunto cociente de $C(\Omega)$ por esta relación de equivalencia, se define una suma de la siguiente manera: para $\gamma_1, \gamma_2 \in C(\Omega)$, y $[\gamma_1]$, $[\gamma_2]$ sus clases de equivalencia, se toma una curva continua $\delta : [0,1] \to \Omega$ tal que $\delta(0) = \gamma_1(0)$ y $\delta(1) = \gamma_2(0)$, y se define

$$(2) \qquad [\gamma_1] + [\gamma_2] = [\gamma_1 \, \delta \, \gamma_2 \, \delta^{-1}].$$

Aquí, δ^{-1} es δ recorrida en sentido inverso, y $\gamma_1\delta\gamma_2\delta^{-1}$ es la juxtaposición usual de curvas.

Un momento de reflexión muestra que

$$\mathrm{Ind}(\gamma_1 \, \delta \, \gamma_2\delta^{-1}, z) = \mathrm{Ind}(\gamma_1, z) + \mathrm{Ind}(\gamma_2, z) ,$$

siempre que estos índices estén definidos de modo que la definición (2) no depende de la curva escogida. La última relación puede reescribirse en la forma

$$(3) \quad \mathrm{Ind}([\gamma_1]+[\gamma_2], z) = \mathrm{Ind}([\gamma_1], z) + \mathrm{Ind}([\gamma_2], z),$$

y a partir de esto es rutinario comprobar que $C(\Omega)/\sim$ provisto de la suma definida en (2) es un grupo abeliano cuyo elemento neutro es la clase de las curvas cerradas de índice 0 con respecto a los puntos de $\mathbb{C} - \Omega$. Además es claro que $-[\gamma] = [\gamma^{-1}]$. Denotaremos a este grupo por $\hat{H}_1(\Omega)$.

§2. Isomorfismo con el primer grupo de Homología. Para demostrar que $\hat{H}_1(\Omega) \cong H_1(\Omega)$ cuando Ω es abierto y conexo, nos valdremos del siguiente resultado (Greenberg [2], p.48), donde $\pi_1(\Omega)$ es el grupo fundamental y $\pi_1'(\Omega)$ es el subgrupo de sus conmutadores:

$$H_1(\Omega) \cong \pi_1(\Omega) / \pi_1'(\Omega)$$

cuando Ω es conexo por arcos. El homomorfismo $\pi_1(\Omega) \to H_1(\Omega)$ es natural, cada curva cerrada es un 1-ciclo.

Existe un homomorfismo $\phi: \pi_1(\Omega) \to \hat{H}_1(\Omega)$, igualmente natural, cuya definición depende de la versión homotópica del Teorema de Cauchy; ϕ manda $<\gamma>$ a $[\gamma]$ donde $<\gamma>$ denota la clase de homotopía de la aplicación $\gamma: [0,1] \to \Omega$. La aplicación ϕ está bien definida ya que dos curvas homótopas en Ω tienen el mismo índice con respecto a los puntos de $\mathbb{C} - \Omega$; y por la relación (3), ϕ es un homomorfismo. Para Ω conexo por arcos, ϕ es claramente sobreyectiva (dado $\gamma \in C(\Omega)$, sea δ una curva continua en Ω que une $\gamma(0)$ con z_0, el punto de base, entonces $\gamma \sim \delta^{-1}\gamma\delta$ en Ω, luego $[\gamma] = \phi(<\delta^{-1}\gamma\,\delta>)$. Como $\hat{H}_1(\Omega)$ es abeliano, es automático que $\mathrm{Ker}\,\phi \supseteq \pi_1'(\Omega)$. Para mostrar que $\hat{H}_1(\Omega) \cong H_1(\Omega)$, hay que mostrar que la inclusión opuesta es también válida. Primero necesitamos algunos resultados topológicos, $B(z,\varepsilon)$ denota el disco abierto de radio ε con centro z.

Lemma 1. *Si* $A = \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i,\varepsilon)$, *donde cada* $z_i \in \mathbb{C}$, *entonces* $\mathbb{C} - A$ *tiene un número finito de componentes conexas.*

Demostración. Es obvio que la intersección de dos círculos distintos en el plano consta de un número finito de puntos. Por lo tanto, el grafo plano cuyos nodos son los puntos de intersección de las fronteras de los discos $B(z_i,\varepsilon)$ y cuyas aristas son los arcos de estas circunferencias que unen los puntos de intersección, consta de un número finito de nodos y de un número finito de aristas. De ahí que el número de caras es finito (por ejemplo, por la fórmula de Euler). Las componentes conexas de $\mathbb{C} - A$ se encuentran entre las posibles uniones de estas caras con las aristas, y, por lo tanto, son finitas en número. ∎

Lemma 2. *Sea* $\gamma \in C(\Omega)$ *donde* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *es abierto Entonces existe* Ω' *abierto, conexo y acotado, tal que* $\Omega' \subseteq \Omega$, $\gamma \in C(\Omega')$, *y* $\mathbb{C} - \Omega'$ *tiene un número finito de componentes conexas. Si además* $\gamma \sim 0$ *en* Ω, *se puede escoger* Ω' *de tal manera que* $\gamma \sim 0$ *en* Ω'.

Demostración. Como $\mathbb{C} - \Omega$ es cerrado, y γ^* ($= \gamma([0,1])$) es compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < d(\gamma^*, \mathbb{C} - \Omega)$. Evidentemente $\gamma^* \subseteq \bigcup_{z\in\gamma^*} B(z,\varepsilon) \subseteq \Omega$, y extrayendo un subrecubrimiento finito $\bigcup_{i=1}^{n} B(z_i,\varepsilon)$, obtenemos Ω'. Si además $\gamma \sim 0$ en Ω, podemos definir

$$\Omega' = \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i,\varepsilon) \cup \{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Ind}(\gamma,z) \neq 0\} .$$

El conjunto $\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Ind}(\gamma,z) \neq 0\}$ esta contenido en Ω, y $\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Ind}(\gamma,z) \neq 0\} - \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i,\varepsilon)$ es simplemente una reunión de algunas de las componentes conexas del complemento de $\bigcup_{i=1}^{n} B(z_i,\varepsilon)$. ■

Lemma 3. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y acotado. Supongamos además que $\mathbb{C} - \Omega$ tiene un número finito de componentes, $B_1,\ldots,B_n$. Entonces dado cualquier punto z_o de Ω, existe una familia $\{\Omega_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de abiertos tal que*

(a) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$.

(b) *Cada Ω_i y cada $\Omega_i \cap \Omega_j$ son conexos.*

(c) $z_o \in \Omega_i$ *para cada* i.

(d) B_i *es la única componente conexa y acotada de* $\mathbb{C} - \Omega_i$.

Demostración: Usaremos repetidas veces el siguiente resultado (Newman [3] p.112):

(1) Si F_1 y F_2 son subconjuntos cerrados de $\mathbb{C}$, con uno al menos de ellos acotado, y si $\mathbb{C}-F_1$, $\mathbb{C}-F_2$ y $F_1 \cap F_2$ son conexos, entonces $\mathbb{C} - (F_1 \cup F_2)$ es cónexo.

Construiremos los abiertos Ω_i demostrando la existencia de aplicaciones $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{C}$ tales que

(2) $\gamma_i(0) \in B_i$, $\gamma_i(1) \in U$ (la componente no acotada de $\mathbb{C} - \Omega$), y $\gamma_i((0,1)) \subseteq \Omega$ para cada i ,

(3) γ_i es 1 - 1 para cada i ,

(4) $\gamma_i^* \cap \gamma_j^* = \phi$ para $i \neq j$,

(5) $z_o \notin \gamma_i^*$ para cada i .

El proceso de construír las γ_i es inductivo. Supongamos que se han construído $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ con las propiedades (2) a (5), $0 \leqslant k < n$. Sea $D_j = B_j \cup \gamma_j^*$, como γ_j es 1 - 1 , $\mathbb{C} - \gamma_j^*$ es conexo (Newman p.115). $\mathbb{C} - B_j$ es obviamente conexo , luego por (1) y (2), $\mathbb{C} - D_j$ es conexo, $1 \leqslant j \leqslant k$. Por (4), $D_i \cap D_j = \phi$ para $i \neq j$, y por (2), $D_i \cap B_j = \phi$ para $1 \leqslant i \leqslant k$, $k < j \leqslant n$. De (5), del hecho de que $z_o \in \Omega$, y de lo anterior, concluimos con la ayuda de (1) que si

$$E_k = \left(\bigcup_{j=1}^{k} D_j \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=k+2}^{n} B_j \right) \bigcup \{z_o\}$$

entonces $\mathbb{C} - E_k$ es conexo (y evidentemente abierto).

Sean ahora $b_{k+1} \in B_{k+1}$ y $u_{k+1} \in U - \{\gamma_1(1), \ldots, \gamma_k(1)\}$. Como $b_{k+1} \notin E_k$ y $u_{k+1} \in \mathbb{C} - E_k$, existe una aplicación continua

$$\tilde{\gamma}_{k+1} : [0,1] \to \mathbb{C} - E_k$$

tal que $\tilde{\gamma}_{k+1}(0) = b_{k+1}$ y $\tilde{\gamma}_{k+1}(1) = u_{k+1}$. Podemos suponer que $\tilde{\gamma}_{k+1}$ es 1 - 1 (en efecto, como $\mathbb{C} - E_k$ es abierto, $\tilde{\gamma}_{k+1}$ puede tomarse poligonal y es fácil comprobar que un camino poligonal siempre admite un subcamino simple con los mismos extremos). Sean $t_o = \sup \{t \mid \tilde{\gamma}_{k+1}(t) \in B_{k+1}\}$ y $t_1 = \inf \{t \in [t_o, 1] \mid \tilde{\gamma}_{k+1}(t) \in U\}$. Como B_{k+1} y U son cerrados, $\tilde{\gamma}_{k+1}(t_o) \in B_{k+1}$ y $\tilde{\gamma}_{k+1}(t_1) \in U$.

Definamos:

$$\gamma_{k+1} : [0,1] \to \mathbb{C}$$

$$\gamma_{k+1}(t) = \tilde{\gamma}_{k+1}(t_o + (t_1 - t_o)t)$$

Entonces, es fácil comprobar que γ_{k+1} tiene las propiedades (2) a (5). Esto completa la inducción

Definamos: $\Omega_i = \Omega - \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \gamma_j^*$.

Es claro que $z_o \in \Omega_i$, Ω_i es abierto y $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$.

Si $F_i = U \bigcup (\bigcup_{j\neq i} D_j)$, es evidente que F_i es conexo. Se ve que $\mathbb{C} - \Omega_i = B_i \bigcup F_i$, y como $B_i \bigcap F_i = \phi$ se tiene (d) para $i \neq j$,

$$\Omega_i \bigcap \Omega_j = \Omega - \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k^* = \mathbb{C} - (U \bigcup (\bigcup_{k=1}^{n} D_k)),$$

y es fácil ver aplicando n veces (1) que $U \bigcup (\bigcup_{k=1}^{n} D_k)$ no separa a $\mathbb{C}$, de modo que $\Omega_i \bigcap \Omega_j$ es conexo. Un razonamiento parecido muestra que Ω_i es conexo. ∎

Antes de continuar es necesario establecer unas pautas de notación:

$$C(\Omega,\ z_o) = \{\gamma\colon [0,1] \to \Omega \mid \gamma \text{ continua y } \gamma(0) = \gamma(1) = z_o\}$$

Para $\gamma_1, \gamma_2 \in C(\Omega,\ z_o)$, $\gamma_1 \approx \gamma_2$ quiere decir " γ_1 es homótopa a γ_2 en Ω, rel $\{0,1\}$ ". Denotaremos con z_o la aplicación constante de $C(\Omega, z_o)$. El siguiente lema determina Ker ϕ en un caso especial.

Lema 4. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ conexo abierto y acotado, y tal que $\mathbb{C} - \Omega$ tiene una sola componente conexa acotada. Si $\gamma \in C(\Omega, z_o)$ satisface $\gamma \sim 0$ en Ω, entonces $\gamma \approx z_o$.*

Demostración: Ω es homeomorfo a $D' = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$. Luego $\pi_1(\Omega, z_o) \simeq \pi_1(D') \simeq \mathbb{Z}$ (Greenberg [2], p.14). Sea b un punto cualquiera de la componente acotada de $\mathbb{C} - \Omega$. Existe $\omega \in C(\Omega, z_o)$ tal que $\mathrm{Ind}(\omega, b) \neq 0$; tal curva se puede construir utilizando una red cuadrada en el plano, aunque su existencia es intuitivamente obvia.

Ahora, si $\langle\sigma\rangle$ genera a $\pi_1(\Omega, z_o)$ entonces para algún $m \in \mathbb{Z}$, $\langle\omega\rangle = \langle\sigma\rangle^m$, y por lo tanto

$$\mathrm{Ind}(\omega, b) = m\,\mathrm{Ind}(\sigma, b).$$

Esto muestra que $\mathrm{Ind}(\sigma, b) \neq 0$. Finalmente, si $\gamma \in C(\Omega, z_o)$ satisface $\mathrm{Ind}(\gamma, b) = 0$, podemos concluír que $\langle\gamma\rangle = \langle\sigma\rangle^0$, y por lo tanto que $\gamma \approx z_o$. ∎

Lemma 5. *Sea $\Omega \subseteq C$ conexo y abierto, entonces* $\mathrm{Ker}\ \phi = \pi_1'(\Omega, z_o)$

Demostración. Esto se reduce a mostrar que si $\gamma \in C(\Omega, z_o)$ satisface $\gamma \sim 0$ en Ω, entonces $\langle\gamma\rangle \in \pi_1'(\Omega, z_o)$. Por el Lema 2, existe $\Omega' \subseteq \Omega$

abierto conexo y acotado, tal que $\mathbb{C} - \Omega'$ tiene un número finito de componentes conexas, y tal que $\gamma \sim 0$ en Ω'. Evidentemente podemos tomar z_o en Ω'. Sea $\{\Omega_i'\}_{i=1,\ldots,n}$ un recubrimiento abierto como el del Lema 3. Si $B_1,\ldots,B_n$ son las componentes acotadas de $\mathbb{C} - \Omega'$, B_i es la (única) componente acotada de $\mathbb{C} - \Omega_i'$. Sea ahora $\varepsilon > 0$ un número de Lebesgue del recubrimiento abierto de $[0,1]$ formado por los $\gamma^{-1}(\Omega_i')$. Entonces si $m \in \mathbb{N}$ es mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$, $\gamma([\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}]) \subset \Omega_{i_k}'$ para algún i_k $(k = 1,\ldots,m)$. Como z_o y $\gamma(k/m)$ pertenecen ambos a $\Omega_{i_k}' \cap \Omega_{i_{k+1}}'$ y este conjunto es conexo y abierto, existe una aplicación continua:

$$\delta_k : [0,1] \to \Omega_{i_k} \cap \Omega_{i_{k+1}}$$

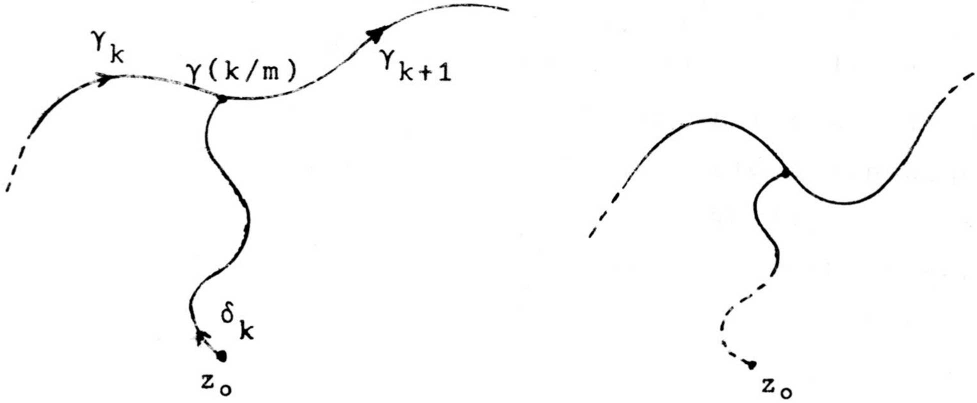
tal que $\delta_k(0) = z_o$ y $\delta_k(1) = \gamma(k/m)$, para $k = 1,\ldots,m-1$.

Definimos además δ_o y δ_m como aplicaciones constantes de valor z_o. Para $k = 1,\ldots,m$, definimos $\Gamma_k \in C(\Omega_{i_k}', z_o)$ por

$$\Gamma_k = \delta_{k-1}\, \gamma_k\, \delta_k^{-1}$$

donde γ_k es el arco de la curva γ entre $\gamma(\frac{k-1}{m})$ y $\gamma(k/m)$ recorrido en sentido positivo.

Afirmamos que $\gamma \simeq \Gamma_1 \cdots \Gamma_m$ en Ω'. La homotopía consiste esencialmente en "recoger" las curvas δ_k, como se muestra en la siguiente figura:



La importancia de la factorización $\gamma \approx \Gamma_1 \cdots \Gamma_m$ radica en el hecho de que $\Gamma_k \in C(\Omega'_{i_k}, z_o)$. Consideremos la aplicación al cociente:

$$\pi_1(\Omega'; z_o) \to \pi_1(\Omega', z_o) / \pi_1'(\Omega'; z_o)$$

$$\langle\gamma\rangle \mapsto \langle\gamma\rangle \; \pi_1'(\Omega'; z_o) \; .$$

Escribimos $\{\langle\gamma\rangle\}$ en lugar de $\langle\gamma\rangle \; \pi_1'(\Omega', z_o)$. Como esta aplicación es un homomorfismo, tenemos que

$$\{\langle\gamma\rangle\} = \{\langle\Gamma_1\rangle\} \ldots \{\langle\Gamma_m\rangle\} \; ;$$

y como π_1/π_1' es abeliano, podemos reordenar esta factorización de $\{\langle\gamma\rangle\}$ agrupando los términos $\{\langle\Gamma_k\rangle\}$ que corresponden a un mismo $C(\Omega'_i, z_o)$. Para mayor sencillez de la notación, supondremos que el producto $\{<\Gamma_1>\} \ldots \{<\Gamma_m>\}$ ya está ordenado de esta manera, o sea que existen enteros $i_1 = 1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{n+1}$ tales que si $i_j \leqslant k \leqslant i_{j+1}$ entonces $\Gamma_k \in C(\Omega_j', z_o)$. Por lo tanto

$$\{<\gamma>\} = \{<\Gamma_1 \ldots \Gamma_{i_2 - 1}>\} \ldots \{<\Gamma_{i_n} \ldots \Gamma_m>\}$$

con $\Gamma_{i_j} \ldots \Gamma_{i_{j+1}-1} \in C(\Omega_j', z_o)$. Puede haber varias maneras de hacer esta agrupación, puesto que $C(\Omega_i', z_o) \cap C(\Omega_j', z_o) \neq \emptyset$, pero ésto no tiene importancia, como veremos.

Ahora, por la definición de los Ω_i', todo miembro de $C(\Omega_i', z_o)$ tiene índice 0 con respecto a los puntos de B_j, para $j \neq i$, ya que en tal caso B_j está contenida en la componente no acotada de Ω_i'. Por la relación de homotopía $\gamma \approx \Gamma_1 \ldots \Gamma_m$, tenemos que para $b_j \in B_j$

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Ind}(\Gamma_k, b_j) = \operatorname{Ind}(\Gamma_1 \ldots \Gamma_m, b_j) = \operatorname{Ind}(\gamma, b_j) = 0$$

y, por lo que acabamos de observar, esto implica que

$$\sum_{k=i_j}^{i_{j+1}-1} \operatorname{Ind}(\Gamma_k, b_j) = 0$$

o lo que es lo mismo, que

$$\mathrm{Ind}(\Gamma_{i_j}\dots\Gamma_{i_{j+1}-1}, b_j) = 0$$

Como B_j es la única componente acotada de $\mathbb{C} - \Omega'_j$, concluimos que $\Gamma_{i_j}\dots\Gamma_{i_{j+1}-1} \sim 0$ en Ω'_j. Por el Lema 4, $\Gamma_{i_j}\dots\Gamma_{i_{j+1}} \simeq z_o$ en Ω'_j, y por lo tanto en Ω, ya que $\Omega'_j \subset \Omega$. Concluimos que

$$\begin{aligned}\{<\gamma>\} &= \{<\Gamma_1\dots\Gamma_{i_2-1}>\}\dots\{<\Gamma_{i_n}\dots\Gamma_m>\}\\ &= \{<z_o>\}\dots\{<z_o>\}\\ &= \{<z_o>\}\end{aligned}$$

o sea, que $<\gamma> \in \pi'_1(\Omega, z_o)$. Esto establece que

$$\ker\phi \subseteq \pi'_1(\Omega, z_o).$$

Combinando esta inclusión con la opuesta, que es obvia, terminamos la demostración. ■

<u>Teorema 1</u>. *Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y conexo entonces* $\hat{H}_1(\Omega) \simeq H_1(\Omega)$.

<u>Demostración</u>. Inmediata, del Lema 5 y del hecho de que $H_1(\Omega) \simeq \pi_1(\Omega)/\pi'_1(\Omega)$ ■

Es obvio por la construcción que el isomorfismo $\hat{H}_1(\Omega) \to H_1(\Omega)$ es natural.

Teorema de Cauchy. *Si* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *es holomorfa, donde* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *es abierto y conexo, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

para toda $\gamma \in C(\Omega)$ *con* $\gamma \sim 0$ *en* Ω.

Demostración: Si $z_o = \gamma(0)$, entonces el hecho que $\gamma \sim 0$ en Ω implica que γ es homótopa a un producto de conmutadores en $C(\Omega, z_o)$. Por la versión homotópica del teorema de Cauchy, la integral de f a lo largo de γ es igual a la integral de f a lo largo de este producto de conmutadores, y esta última es evidentemente 0 ■

Teorema 2. *Sean* Ω_1 *y* Ω_2 *abiertos conexos de* $\mathbb{C}$ *y sea* $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ *continua. Si* $\gamma_1 \sim \gamma_2$ *en* Ω_1 *entonces* $f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2$ *en* Ω_2.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ en Ω_1, entonces $\gamma_1 \gamma_2^{-1} \sim 0$ en Ω_1, y por el Lema 5 $<\gamma_1 \gamma_2^{-1}> \in \pi_1'(\Omega_1, z_1)$, donde $z_1 = \gamma_1(0)$. Luego, si f_* es el homomorfismo $\pi_1(\Omega_1, z_1) \to \pi_1(\Omega_2, f(z_1))$ inducido por f, se tiene que $f_*<\gamma_1\gamma_2^{-1}> \in \pi_1'(\Omega_2 , f(z_1))$. Pero como $f_*<\gamma_1\gamma_2^{-1}> = <(f\circ\gamma_1)(f\circ\gamma_2)^{-1}>$, es inmediato que $f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2$ en Ω_2.■

Lema 6. *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *abierto,* B *una componente conexa y acotada de* $\mathbb{C} - \Omega$ *, y supongamos que* $d(B,(\mathbb{C} - \Omega)-B) > 0$. *Entonces existe una curva* $\gamma_B \in C(\Omega)$ *tal que*

$$\mathrm{Ind}\,(\gamma_B,z) = \begin{cases} 1 & z \in B \\ 0 & z \in (\mathbb{C}-\Omega)-B \end{cases}$$

Demostración. Nuestra demostración es una modificación obvia de los resultados expuestos en 13.4 y 13.5, Rudin [4] p.287, y por brevedad la omitimos. ∎

Teorema 3. *Sea* $\Omega \subseteq C$ *abierto, conexo y tal que* $d(B,(\mathbb{C} - \Omega)-B) > 0$ *para toda componente conexa y acotada* B *de* $\mathbb{C} - \Omega$. *Entonces* $H_1(\Omega)$ *esta generado libremente por curvas* γ_B *(una para cada componente conexo acotada de* $\mathbb{C} - \Omega$ *) tales que*

$$\mathrm{Ind}\,(\gamma_B,z) = \begin{cases} 1 & z \in B \\ 0 & z \in (\mathbb{C}-\Omega)-B \end{cases}$$

Demostración. El Lema 6 asegura la existencia de las γ_B. Si $\gamma \in C(\Omega)$, entonces todas las componentes de $\mathbb{C} - \Omega$, salvo un número finito de ellas, están contenidas en la componente no acotada de $\mathbb{C} - \gamma^*$, si nó, se acumularán en las componentes acotadas de $\mathbb{C} - \gamma^*$, contradiciendo la hipótesis. Dada $\gamma \in C(\Omega)$, sean $B_1,\ldots,B_n$ las componentes acotadas de $\mathbb{C} - \Omega$ que están contenidas en componentes acotadas de $\mathbb{C} - \gamma^*$, y sea $m_i = \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ para $z \in B_i$. Entonces es trivial comprobar que

$$[\gamma] = \sum_{i=1}^{n} m_i [\gamma_{B_i}] \quad \text{en} \quad \Omega ,$$

lo cual muestra que las $[\gamma_B]$ generan a $\hat{H}_1(\Omega)$. Como las γ_B son obviamente independientes, concluimos que $\hat{H}_1(\Omega)$, y por lo tanto $H_1(\Omega)$, están generados libremente por las $[\gamma_B]$ ∎

***

BIBLIOGRAFIA

[1] L.V. Ahlfors, "Complex Analysis", Second Edition, McGraw-Hill, New York, (1966).

[2] M.J. Greenberg, "Lectures on Algebraic Topology" W.A. Benjamin, New York, (1967).

[3] M.H.A. Newman, "The Topology of Plane Sets", Cambridge, (1964).

[4] W. Rudin, "Real and Complex Analysis" . Second Edition, McGraw-Hill, New York (1974).

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E. COLOMBIA

(Recibido en febrero de 1979)