Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XIII (1979) págs. 155 - 170

CONVERGENCIA DE SUCESIONES EN ESPACIOS DE BANACH *

por

Guillermo RESTREPO S.

§1. Introducción. Existen varias nociones de convergencia de sucesiones en un espacio de Banach X (real o complejo). Las más conocidas son la convergencia en la norma y la convergencia débil. La sucesión (x_n) *converge en la norma a* x (simbólicamente, $x_n \to x(N)$) si $\|x - x_n\| \to 0$; y la misma sucesión *converge débilmente a* x si $u.x_n \to u.x$ para todo $u \in X'$, donde X' es el dual de X. Aunque estas son las nociones de convergencia más útiles y las utilizadas con mayor frecuencia, no son las

* Artículo presentado en el VIII Coloquio Colombiano de Matemáticas celebrado en la Universidad Tecnológica de Pereira, del 17 de Julio al 19 de Agosto de 1978.

únicas que aparecen en la literatura matemática. Por ejemplo, A. Pelczynski utiliza en [1] las siguientes nociones de convergencia. Sea $0 \leq x < 1$ y (ε_i) una sucesión donde ε_i es 1 ó -1. Entonces (x_n) es τ_s-*convergente a* $0 \in X$ si existe una constante C tal que para toda secuencia finita de índices $n_1, n_2, \ldots, n_k$ y para cualquier sucesión (ε_i) se cumple

$$\|\varepsilon_1 x_{n_1} + \varepsilon_2 x_{n_2} + \ldots + \varepsilon_n x_{n_k}\| \leq C k^s .$$

Además, (x_n) es τ_s-*convergente a* x (símbólicamente $x_n \to x$ (τ_s)) si $(x_n - x)$ es τ_s-convergente a cero.

Todas las nociones de convergencia que hemos mencionado son compatibles con la estructura de espacio vectorial en X y por consiguiente $x_n \to x$ si y sólo si $(x - x_n) \to 0$. Además, existe una jerarquía entre estas nociones de convergencia en el sentido siguiente:

$$x_n \to 0 \text{ (N)} \Rightarrow x_n \to 0 \ (\tau_s) \Rightarrow x_n \to 0 \text{ (D)}$$

Es decir, la noción de convergencia más fuerte es la convergencia en la norma.

Una *topología secuencial* τ en un conjunto X se caracteriza por la propiedad siguiente: para todo espacio topológico Y, una función $f: X \to Y$ es continua si y sólo si es secuencialmente continua. Una función $f: X \to Y$ es *secuencialmente continua* si para toda sucesión (x_n) tal que $x_n \to x$, entonces $f(x_n) \to f(x)$.

Este artículo pretende, en primer lugar, caracterizar las topologías secuenciales como extremos inferiores de topologías 1-enumerables, con lo cual complementamos y simplificamos la exposición de C. Ruíz en [2]. Es lo que haremos, precisamente, en la sección 2. En segundo lugar, utilizaremos los resultados obtenidos para indagar sobre la menor topología secuencial σ tal que $\tau_D < \sigma \leqslant \tau_N$. Demostraremos que $\sigma = J(\tau_D)$ y, además, en algunos casos particulares, en los espacios c_0 y ℓ_1, diremos exactamente qué es $J(\tau_D)$. Es lo que haremos en la sección 3. Aclaramos que τ_D es la topología débil y τ_N es la topología de la norma en un espacio de Banach E. Respecto a $J(\tau)$, véase la Definición 2.2.

§2. Topologías secuenciales. Una función $f:X \to Y$ entre espacio topológicos es *secuencialmente continua* si cada vez que una sucesión (x_n) converge a un $x \in X$, la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x)$. Por supuesto, toda función continua es secuencialmente continua.

Definición 2.1. Una topología τ en un conjunto X es *secuencial* si, para todo espacio topológico Y, una función $f:X \to Y$ que es secuencialmente continua es continua.

Si τ es una topología en X que tiene una base a lo más enumerable de vecindades en cada punto $x \in X$, entonces τ es una topología secuencial. Las topologías de este tipo se suelen llamar topologías del tipo E_1 (*1-enumerables*).

TEOREMA 2.1. *Si* τ *es una topología secuencial en* X, *entonces* $\tau = \inf \Gamma$, *donde* Γ *es un conjunto de topologías del tipo* E_1.

DEMOSTRACION. Para todo $a \in X$ y toda sucesión (x_n) en X tal que $x_n \to a\ (\tau)$ definimos la topología $\gamma = \gamma(a,(x_n))$ de la manera siguiente. El conjunto $\gamma(a)$ de vecindades de a es generado por la base:

$$V_n(a) = \{a\} \cup \{x_j : j \geq n\}, \qquad n = 1,2,\ldots;$$

y si $x \neq a$ entonces una base de vecindades en x la constituye la única vecindad $V = \{x\}$. Es fácil ver que γ es la menor topología de tipo E_1 para la cual la sucesión (x_n) converge a a. Vamos a demostrar que τ es igual al extremo inferior de las topologías γ, el cual denotamos por $\tau' = \inf\{\gamma\}$.

Sea $B \subset X$ un subconjunto τ- abierto y demostremos que B es γ-abierto, donde $\gamma = \gamma(a,(x_n))$. Sea $b \in B$. Si $b = a$ entonces, dado que $x_n \to a\ (\tau)$, existe un entero positivo N tal que $x_j \in B$ si $j \geq N$. Por consiguiente $V_N(a) \subset B$. Si $b \neq a$, entonces $V = \{b\} \subset B$. Hemos así demostrado que B es γ-abierto para toda γ, y por tanto B es τ'-abierto. Sea ahora B τ'-abierto. Entonces B es γ-abierto para todo γ. Demostremos que B es τ-abierto. Sea $j:(X,\tau) \to (X,\tau')$ la función $j(x) = x$ para todo x. Entonces j es secuencialmente continua ya que si $x_n \to a\ (\tau)$ entonces $x_n \to a\ (\gamma)$, $\gamma = \gamma(a,(x_n))$.

Como τ es, por hipótesis, una topología secuencial, se concluye que j es contínua. Luego $B = j^{-1}(B)$ es τ-abierto. ■

TEOREMA 2.2. *Si Σ es un conjunto de topologías secuenciales en X, entonces $\tau = \inf\Sigma$ es una topología secuencial.*

DEMOSTRACION. Sea $\sigma \in \Sigma$ y consideremos el esquema

$$\begin{tikzcd} (X,\sigma) \arrow[r, "j"] \arrow[dr, dashed, "h_\sigma"'] & (X,\tau) \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

$h_\sigma = f \circ j$

j la identidad de X.

Como $\sigma \geq \tau$ entonces j es contínua. Tenemos que demostrar que si f es secuencialmente contínua entonces f es contínua. Como j es secuencialmente contínua, entonces h_σ es secuencialmente contínua para toda $\sigma \in \Sigma$. Luego h_σ es contínua ya que, por hipótesis, σ es una topología secuencial. Sea $A \subset Y$ abierto. Entonces $h_\sigma^{-1}(A) = f^{-1}(A)$ es σ-abierto para toda $\sigma \in \Sigma$. En consecuencia, $f^{-1}(A)$ es τ abierto ya que $\tau = \inf\Sigma$. ■

De los teoremas uno y dos se deduce:

TEOREMA 2.3. *Una topología τ en X es secuencial si y sólo si τ es el estremo inferior de topologías* *del tipo* E_1 *(1-enumerables)*.

Observación. C. Ruíz define en [2] las topologías de tipo E_o (o-enumerables); τ es o-*enumerable* si es el extremo inferior de topologías del tipo E_1. Por tanto las topologías secuenciales coinciden con las topologías o-enumerables.

Definición 2.2. Sean τ una topología en X. Podemos asociar a τ la topología $J(\tau) = \tau'$. Un conjunto $A \subset X$ es $J(\tau)$-abierto si para todo $a \in A$ y toda sucesión (x_n) tal que $x_n \to a$, se tiene $x_n \in A$ para todo n, salvo un número finito de índices.

TEOREMA 2.4. *Sea* $J(\tau)$ *la topología definida arriba. Entonces:*

(i) $J(\tau) \geqslant \tau$.

(ii) $J(\tau)$ *es una topología secuencial.*

(iii) $x_n \to x$ (τ) *sí y sólo si* $x_n \to x$ $(J(\tau))$.

(iv) $J(\tau)$ *es el extremo inferior de todas las topologías secuenciales que son mayores o iguales a* τ.

DEMOSTRACION.

(i) Si A es τ-abierto, $a \in A$ y $x_n \to a$, claramente $x_n \in A$ salvo para un número finito de índices

(ii) Sea $f:(X,J(\tau)) \to Y$ secuencialmente continua y sean $A \subseteq Y$ abierto, $B = f^{-1}(A)$. Si $b \in B$ y $x_n \to b$ (τ), entonces $f(x_n) \to f(b)$, así que $f(x_n) \in A$ salvo para un número finito de índices y B es

$J(\tau)$-abierto.

(iii) Si $x_n \to a\ (J(\tau))$, entonces $x_n \to a(\tau)$ ya que $j : (X,J(\tau)) \to (X,\tau)$ es continua. Supongamos ahora que $x_n \to a\ (\tau)$ y sea V una vecindad abierta de a en la topología $J(\tau)$. Entonces, por definición de conjuntos $J(\tau)$-abiertos, $x_n \in V$ salvo para un número finito de índices, esto es, $x_n \to x\ (J(\tau))$.

(iv) Sea $\sigma = \inf \Gamma$ donde Γ es el conjunto de las topologías secuenciales $\geq \tau$. Entonces $\tau \leq \sigma \leq J(\tau)$. Basta comprobar que $j : (X,\sigma) \to (X,J(\tau))$ es secuencialmente continua puesto que σ es una topología secuencial en virtud del teorema 2.2. Supongamos que $x_n \to x(\sigma)$. Entonces $x_n \to x(\tau)$ y por (iii) $x_n \to x(J(\tau))$. ■

Si $Top(X)$ es el conjunto de todas las topologías en un conjunto X, entonces $\tau \mapsto J(\tau)$ es una función de $Top(X)$ en $Top(X)$. Como corolario del teorema 2.4 obtenemos:

TEOREMA 2.5. (C. Ruíz [2]) *Sea* J *el operador definido arriba. Entonces:*

(i) τ *es una topología secuencial si y sólo si* $J(\tau) = \tau$.(*)

(ii) $J(J(\tau)) = J(\tau)$, *esto es* $J^2 = J$.

DEMOSTRACION. (i) Si τ es una topología secuencial entonces por (iv) del teorema 2.4 $J(\tau) = \tau$.

(*) En [2], pag. 121, se definen las topologías secuenciales precisamente como puntos fijos de J.

(ii) Como $J(\tau)$ es secuencial, entonces $J(J(\tau)) = J(\tau)$. ∎

§3. La Topología débil τ_D y la Topología $J(\tau_D)$.

Sea E un espacio de Banach sobre K (el cuerpo de los reales, $\mathbb{R}$, o los complejos, $\mathbb{C}$). Recordemos la topología débil τ_D en E. Sea E' el espacio dual de E, esto es, el espacio de todas las formas lineales contínuas $u : E \to K$. Una base de vecindades débiles de cero en E se determina así. Para todo $\varepsilon > 0$ y todo conjunto finito ϕ de E', $V = V(0) = \{x \in E: |u.x| < \varepsilon;\ u \in \phi\}$ es una vecindad débil. La topología débil es menor o igual que la topología τ_N (topología de la norma), $\tau_D \leq \tau_N$. Solamente en espacios de dimensión finita se dá $\tau_D = \tau_N$.

Es usual definir en un espacio de Banach E dos criterios de convergencia. Una sucesión (x_n) en E converge débilmente a x, $x_n \to x$ (D), si $u.x_n \to u.x$ para todo $u \in E'$. Es fácil ver que la noción de convergencia débil es precisamente la noción de convergencia inducida por la topología débil. Una sucesión (x_n) en E converge en la norma (o fuertemente) a x, $x_n \to x$ (N), si $\|x - x_n\| \to 0$. Esta noción de convergencia es precisamente la noción inducida por la topología de la norma τ_N. Es claro que si $x_n \to 0(N)$ entonces $x_n \to 0$ (D), pero la recíproca no es cierta en espacios de dimensión infinita.

En esta sección nos proponemos determinar la topología $J(\tau_D)$ en algunos espacios de Banach particulares. En espacios de dimensión finita $\tau_D =$

$\tau_N = J(\tau_D)$. En consecuencia, supondremos que los espacios de Banach a los cuales nos referiremos son de dimensión infinita.

TEOREMA 3.1. *Sea* τ_D *la topología débil en el espacio de Banach* E . *Entonces:*

(i) $\tau_D < J(\tau_D) \leqslant \tau_N$.

(ii) $J(\tau_D)$ *es la menor topología secuencial entre* τ_D *y* τ_N.

(iii) $x_n \to x(D)$ *implica* $x_n \to x(J(\tau_D))$.

(iv) $J(\tau_D)$ *es la mayor topología que contiene a* τ_D *para la cual* $x_n \to x\ (D)$ *implica* $x_n \to x\ (J(\tau_D))$.

(v) $J(\tau_D) = \tau_N$ *si y sólo si* $x_n \to x\ (D)$ *implica* $x_n \to x\ (N)$.

DEMOSTRACION.

(i) Como τ_N es secuencial, entonces $J(\tau_D) \leqslant J(\tau_N) = \tau_N$ (teorema 2.5). Por otra parte $J(\tau_D) \geqslant \tau_D$.

(ii) Sea σ una topología secuencial tal que $\tau_D < \sigma \leqslant \tau_N$. Entonces $J(\tau_D) \leqslant J(\sigma) = \sigma$ (teorema 2.5).

(iii) De teorema 2.4.

(iv) Supongamos que $\sigma > J(\tau_D)$ y que $x_n \to x\ (D)$ implica $x_n \to x\ (\sigma)$. Entonces $j : (X, J(\tau_D)) \to (X,\sigma)$, $j(x) = x$ para todo x, es secuencialmente continua. En efecto, si $x_n \to x\ (J(\tau_D))$ entonces $x_n \to x(D)$ y por hipótesis $x_n \to x\ (\sigma)$. Por tanto j es continua ya que $J(\tau_D)$ es una topología secuencial, así que $\sigma = J(\tau_D)$.

(v) Es consecuencia de (i) y (iv). ∎

Recordemos que si $N = \{1,2,3,..\}$ entonces $\ell^1(N) = \ell^1$ es el conjunto de las sucesiones reales (x_n) tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. Además, ℓ^1 es un espacio de Banach con la norma $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Es bien sabido (Banach [3; p.137]) que $u_n \to u(D)$ implica $u_n \to u(N)$. Un resultado similar es válido en el espacio $\ell^1(S)$ de las funciones $x : S \to R$ tales que $\sum_{s\in S} |x(s)| < \infty$, donde la sumatoria debe entenderse adecuadamente como un límite de las sumas sobre las partes finitas de S. Combinando estas observaciones con el teorema 3.1 se obtiene:

TEOREMA 3.2. *En el espacio de Banach* $\ell^1(S)$, $J(\tau_D) = \tau_N$ *y por tanto ninguna topología* σ *entre* τ_D *y* τ_N *es secuencial.*

Definición 3.1. Definiremos la topología τ_{DA} o *topología débil sobre acotados*. Sea E un espacio de Banach. Diremos que B es τ_{DA}-*abierto* si para todo conjunto acotado $F \subset E$ existe un conjunto τ_D-abierto V (que depende de A) tal que $F \cap B = F \cap V$.

Podemos describir de otra manera la topología τ_{DA}. La topología débil sobre acotados es el extremo superior del conjunto de las topologías γ tales que, para todo acotado $F \subset E$, $(F,\gamma) = (F,\tau_D)$, donde (F,γ) y (F,τ_D) son, respectivamente, las restricciones de γ y τ_D al conjunto F.

Es fácil ver que B es τ_{DA}-abierto si y sólo si para todo conjunto acotado F_k $(k = 1,2,...)$ donde

$F_k = \{x : \|x\| \leqslant k\}$ existe un conjunto τ_D-abierto V tal que $F_k \cap B = F_k \cap V$.

TEOREMA 3.3. *Entre las topologías* $\tau_D, \tau_{DA}, J(\tau_D)$ *y* τ_N *se dan las inclusiones:*

$$\tau_D < \tau_{DA} \leqslant J(\tau_D) \leqslant \tau_N .$$

DEMOSTRACION. La primera relación $\tau_D < \tau_{DA}$ es estricta. En efecto, sean $V_1, V_2, V_3, \ldots$ conjuntos τ_D-abiertos distintos. Entonces $B = \bigcup_i (V_i \cap F_i)$ es τ_{DA}-abierto pero no es τ_D-abierto.

Demostremos la relación $\tau_{DA} \leqslant J(\tau_D)$. Sea B τ_{DA}-abierto.

Para demostrar que B es $J(\tau_D)$-abierto hay que demostrar que si (x_n) es una sucesión tal que $x_n \to x(D)$ y $x \in B$, entonces $x_n \in B$ salvo un número finito. Como toda sucesión débilmente convergente en un espacio de Banach es acotada, podemos suponer que x_n y x están en un conjunto acotado F para todo n. Sean V un conjunto τ_D-abierto tal que $F \cap V = F \cap B$. Como $x \in F \cap B$, entonces $x \in F \cap V$ y $x \in V$. Ahora, como $x_n \to x$ (D), entonces existe p tal que $x_n \in V$ si $n \geqslant p$. Pero ello significa que $x_n \in F \cap V = F \cap B$ si $n \geqslant p$. Por lo tanto $x_n \in B$ si $n \geqslant p$. Hemos así concluído la demostración. ∎

Vamos a describir a τ_{DA} como el extremo inferior de un conjunto de topologías.

Definición 3.2. Para todo conjunto acotado $F \subset E$ definimos la topología σ_F así: si $x \in F$, las vecindades de x son las determinadas por la restricción de la topología τ_D a F; si $x \notin F$ una base de vecindades de x es $\{x\}$. En otras palabras, σ_F es la menor topología cuya restricción a F coincide con la topología débil (F, τ_D).

LEMA 3.4. *La topología débil sobre acotados* τ_{DA} *es el extremo inferior del conjunto* $\{\sigma_n\}$ *de topologías, donde* $\sigma_n = \sigma_{F_n}$ *y* $F_n = \{x : \|x\| \leqslant n\}$.

DEMOSTRACION. En primer lugar $\sigma_n \geqslant \tau_{DA}$ para todo n puesto que la restricción a F_n de τ_{DA} coincide con la topología (F_n, τ_D). Por tanto $\inf\{\sigma_n\} \geqslant \tau_{DA}$. Sea ahora B σ-abierto, donde $\sigma = \inf\{\sigma_n\}$. Entonces B es σ_n-abierto para todo n. Por tanto la topología σ coincide con la topología débil en todo F_k (las restricciones), lo que implica que $\sigma \leqslant \tau_{DA}$. Hemos así demostrado que $\sigma = \tau_{DA}$. ∎

LEMA 3.5. *Sea* E *un espacio de Banach cuyo dual* E' *es separable. Sea* $B = \{x \in E : \|x\| \leqslant h\}$. *Entonces la topología* σ_B *es 1-enumerable.*

DEMOSTRACION. Sea $H \subset E'$ un subconjunto denso y enumerable, digamos $H = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ y sea $a \in B$. Consideremos las vecindades de la forma

$$V_{q,r}(a) = B \cap \{x \in E : |u_q(x-a)| < \frac{1}{r}\}$$

donde q y r recorren al conjunto $J = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

El conjunto de las intersecciones finitas de vecindades de este tipo es numerable y constituye una base de vecindades de a como demostraremos a continuación. Basta demostrar que toda vecindad

$$W(a) = B \cap \{x \in E : |u(x-a)| < \varepsilon\}$$

contiene una $V_{q,r}(a)$, pues, en tal caso, toda intersección finita de W-es estaría contenida en una intersección finita de $V_{q,r}$-es. Sea u_q tal que $\|u - u_q\| < \lambda$, donde λ será especificada después. Sea $x \in V_{q,r}(a)$ y escribamos

$$\begin{aligned} |u(x-a)| &\leq |(u-u_q)(x-a)| + |u_q(x-a)| \\ &\leq \|u-u_q\| \|x-a\| + |u_q(x-a)| . \end{aligned}$$

Como $x \in B$ entonces $\|x-a\| \leq 2h$. Sea $u_q \in H$ tal que $\|u-u_q\|$ es menor que $\varepsilon/4h$. Esto hace que $\|u-u_q\| \times \|x-a\|$ sea menor que $\varepsilon/2$. Ahora escogemos r de modo que $1/r$ sea menor $\varepsilon/2$. En tal caso $|u_q(x-a)|$ es menor que $\varepsilon/2$. Por tanto, $x \in V_{q,r}(a)$ implica que

$$|u(x-a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y, por consiguiente, $x \in W(a)$. Si $a \notin B$ entonces $\{a\}$ es una base de vecindades de a. Hemos así concluído la demostración. ∎

De los lemas 3.4 y 3.5 se deduce el teorema siguiente:

TEOREMA 3.6. *Sea* E *un espacio de Banach cuyo dual* E' *es separable. Entonces* $J(\tau_D) = \tau_{DA}$.

DEMOSTRACION. $\tau_{DA} \leqslant J(\tau_D)$ y por los Lemas anteriores τ_{DA} es una topología secuencial. Luego $\tau_{DA} = J(\tau_D)$ por (ii) del Teorema 3.1. ∎

<u>Observaciones</u>. Estas observaciones van encaminadas a preguntarse por condiciones que hagan de τ_{DA} una topología secuencial. Es de notar que τ_{DA} es secuencial sí y sólo si $\tau_{DA} = J(\tau_D)$, en virtud de los teoremas 3.3 y 3.1 parte (ii).

(1) τ_{DA} es una topología secuencial si E' es tal que σ_B es una topología secuencial para todo conjunto acotado B de la forma $\{x : \|x\| \leqslant r\}$. Pregunta: ¿Existen espacios de Banach cuyo dual E' no es separable para los cuales τ_{DA} es una topología secuencial?

(2) Como $(C_o)' = \ell^1$ es separable, entonces $J(\tau_D) = \tau_{DA}$ es una topología secuencial.

(3) $\tau_{DA} < \tau_N$ (estrictamente) en todos los casos. Por tanto, en aquellos espacios en que τ_{DA} es una topología secuencial siempre se tendrá $J(\tau_D) < \tau_N$. Por ejemplo en ℓ^1 la topología τ_{DA} no es una topología secuencial. En ℓ^1 se tiene $\tau_{DA} < J(\tau_D) = \tau_N$ (estrictamente).

***

<u>BIBLIOGRAFIA</u>.

[1] Pelczyñski, A.: "A property of multilinear operations", Studia Math. 16 (1957), 173-182.

[2] Ruíz, Carlos: *Topología o Convergencia*, Univer

sidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja (1975).

[3] Banach, S.: *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa (1932).

***

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
Apartado Aéreo 2188
Cali, Valle, COLOMBIA.

(Recibido en abril de 1979).