Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XIII (1979), págs. 171 - 192

SOBRE LA COHOMOLOGIA ASOCIADA A UN OPERADOR LINEAL DIFERENCIAL COMPLEJO*

por

David MOND

Resumen. Asociada a un operador lineal diferencial de la forma

$$P(y) = y^{(n)}+a_1(z)y^{(n-1)}+\dots+a_n(z)y$$

$$(a_k \in \mathcal{O}(\Omega)),$$

donde $\mathcal{O}(\Omega)$ es el espacio de las funciones holomorfas definidas en el abierto $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, existe siempre una sucesión exacta de haces sobre Ω:

$$0 \to \mathrm{Ker}P \to \mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O} \to 0$$

donde $\mathcal{O}$ es el haz de gérmenes holomorfos sobre Ω y KerP es el haz de soluciones de $P(y) = 0$. Esta dá lugar a la sucesión exacta de cohomologías de haces:

---

* Este trabajo forma parte de la tesis de grado del autor en el programa de Magister Scientiae de la Universidad Nacional de Colombia, y fué realizado bajo la dirección del Profesor Jairo Charris.

$$0 \to H(\Omega,\mathrm{Ker}P) \to H^{\circ}(\Omega,\mathcal{O}) \to H^{\circ}(\Omega,\mathcal{O}) \to$$
$$\to H^{1}(\Omega,\mathrm{Ker}P) \to H^{1}(\Omega,\mathcal{O}) \to \ldots$$

Como $H^1(\Omega,\mathcal{O}) = 0$, por la sobreyectividad de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)$, y $H^{\circ}(\Omega,\mathcal{S}) = \Gamma(\Omega,\mathcal{S})$ para toda haz $\mathcal{S}$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}\ P \to \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{P} \mathcal{O}(\Omega) \to H^{1}(\Omega,\mathrm{Ker}\ P) \to 0.$$

En este trabajo trataremos de reconstruír esta sucesión exacta utilizando técnicas elementales; en un caso particular (cuando KerP es el haz trivial $\Omega\times\mathrm{Ker}P$) y reemplazando el grupo de cohomología de haces por $\mathrm{Hom}(H_1(\Omega,\mathbb{Z}), \mathbb{C}^n)$, se obtiene entonces un criterio efectivo de existencia de soluciones de ecuaciones lineales no homogéneas, y una demostración muy sencilla del isomorfismo del primer grupo de cohomología de Čech con coeficientes en $\mathbb{C}^n$ y $\mathrm{Hom}(H_1(\Omega,\mathbb{Z}),\mathbb{C}^n)$, para $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ abierto.

§1. Introducción. El Teorema de Morera del análisis complejo elemental puede formularse en términos de una sucesión exacta

$$(1) \quad 0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{inc.}} \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{\frac{d}{dz}} \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{I} \mathrm{HOM}(H_1(\Omega),\mathbb{C}),$$

en la cual Ω es un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $\mathcal{O}(\Omega)$ es el espacio vectorial de las funciones holomorfas en Ω, inc. es la inclusión de $\mathbb{C}$ en $\mathcal{O}(\Omega)$ (considerando a los números complejos como funciones constantes), $H_1(\Omega)$ denota $H_1(\Omega,\mathbb{Z})$ e I esta definido por

$$I(f)([\gamma]) = \int_{\gamma} f(z)dz.$$

En este artículo se generaliza este resultado, reemplazando $\frac{d}{dz}$ por un operador diferencial lineal de la forma

$$P = \frac{d^n}{dz^n} + a_1(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(z)\frac{d}{dz} + a_n(z),$$

con $a_k \in O(\Omega)$, $k = 1,\ldots,n$, para obtener la sucesión exacta

$$(2) \qquad 0 \to \mathrm{Ker}P \to O(\Omega) \overset{P}{\to} O(\Omega) \overset{I}{\to} \mathrm{Hom}(H_1(\Omega), \mathrm{Ker}P) \to 0,$$

donde KerP es el haz de solución de $P(y) = 0$. Observamos que cuando P es el operador $\frac{d}{dz}$, la sucesión (2) se reduce a (1), salvo por la presencia de 0 a la derecha.

§2. <u>El operador I, exactitud en $O(\Omega)$</u>. Empezaremos haciendo la siguiente suposición, necesaria para asegurar la existencia de un sistema fundamental de n soluciones, holomorfas en Ω, de la ecuación $P(y) = 0$:

(3) *Las funciones* $a_1,\ldots,a_n$ *son holomorfas en* $\hat{\Omega}$, *la envolvente simplemente conexa de* Ω.

Como consecuencia de (3), existen funciones $\phi_1,\ldots,\phi_n \in O(\hat{\Omega})$ que forman un sistema fundamental de soluciones de $P(y) = 0$. Es bien conocido que el wronskiano $W(\phi_1,\ldots,\phi_n)$ (o simplemente W) nunca se anula en $\hat{\Omega}$. Ver [4], pp 116,284.

La definición del operador I de la sucesión (2) se basa en el método de variación de parámetros pa ra la solución de ecuaciones lineales no homogéneas en el campo real. Según este método, para encontrar una solución de la ecuación $P(y) = f$, se busca funciones $c_1, \ldots, c_n$ que satisfagan

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&c_1'(x)\phi_1(x) + \ldots + c_n'(x)\phi_n(x) = 0\\
&\ldots \qquad\qquad \ldots\\
&c_1'(x)\phi_1^{(n-2)}(x) + \ldots + c_n'(x)\phi_n^{(n-2)}(x) = 0\\
&c_1'(x)\phi_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x)\phi_n^{(n-1)}(x) = f\,,
\end{aligned}
$$

puesto que de existir tales funciones c_k, se tendrá que $P(c_1\phi_1 + \ldots + c_n\phi_n) = f$. Resolviendo (4) con la regla de Cramer se obtiene

$$
c_k' = \frac{(-1)^{k+n} f}{W(\phi_1, \ldots, \phi_n)}
\begin{vmatrix}
\phi_1 & \cdots & \phi_{k-1} & \hat{\phi}_k & \phi_k & \cdots & \phi_n\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\phi_1^{(n-2)} & \cdots & \phi_{k-1}^{(n-2)} & \hat{\phi}_k^{(n-2)} & \phi_{k+1}^{(n-2)} & \cdots & \phi_n^{(n-2)}
\end{vmatrix}
$$

donde el signo "^" significa omítase, y como en el caso real toda función continua es una derivada, se pueden encontrar las c_k. En el caso complejo, la situación es algo más complicada, ya que no todo miembro de $O(\Omega)$ es la derivada de un miembro de $O(\Omega)$, cuando Ω no es simplemente conexo. Esto motiva la definición del operador I.

<u>Definición 1</u>. Sea $\phi_1, \ldots, \phi_n \in O(\Omega)$ un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $P(y) = 0$. Se define $I: O(\Omega) \to \mathrm{Hom}(H_1(\Omega), \mathrm{Ker}P)$, un operador que manda f a I_f, por

$$I_f([\gamma])(z) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_\gamma \frac{(-1)^{k+n} W_k(\xi) f(\xi)}{W(\xi)} d\xi \right\} \phi_k(z) ,$$

donde $W = W(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ y $W_k(\xi)$ es:

$$\begin{vmatrix} \phi_1(\xi) & \cdots & \hat{\phi}_k(\xi) & \cdots & \phi_n(\xi) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-2)}(\xi) & \cdots & \hat{\phi}_k^{(n-2)}(\xi) & \cdots & \phi_n^{(n-2)}(\xi) \end{vmatrix}$$

De nuevo, I esta bien definido por el Teorema de Cauchy, y es evidentemente lineal, ya que f figura linealmente bajo el signo integral.

Ahora, si I_f es el homomorfismo nulo de $H_1(\Omega)$ en Ker P, entonces, por la independencia lineal de las ϕ_k:

$$\int_\gamma \frac{W_k(\xi) f(\xi)}{W(\xi)} d\xi = 0$$

para toda curva cerrada γ en Ω y para $k = 1, \ldots, n$. Esto implica, por el Teorema de Morera, que $\frac{W_k f}{W}$ es la derivada de alguna función $c_k \in O(\Omega)$, y entonces exactamente como en el caso real, se comprueba fácilmente que $P(c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n) = f$. Hemos demostrado que Ker $I \subseteq P(O(\Omega))$, la mitad del

LEMA 1. *La sucesión* (2) *es exacta en la segunda instancia de* $O(\Omega)$.

DEMOSTRACION. Queda solo por ver que Ker $I \supseteq P(O(\Omega))$, o, en otras palabras, que si $f = P(g)$, paga algún $g \in O(\Omega)$, entonces $I_f = 0$. Ahora, I_f

es 0 si y sólo si $\frac{W_k f}{W}$ es una derivada en Ω. Afirmamos que si $f = P(g)$, entonces $\frac{W_k f}{W}$ es la derivada de

$$(5) \qquad (-1)^{k+n} \frac{W(\phi_1,\ldots,\phi_{k-1}, g, \phi_{k+1},\ldots,\phi_n)}{W}.$$

Para demostrar esto, notamos que $P(g)$ se puede expresar en la forma siguiente, donde el numerador es de orden $(n+1)\times(n+1)$,

$$P(g) = \frac{W(\phi_1,\ldots,\phi_n,g)}{W}.$$

Esto se debe al hecho de que la ecuación diferencial

$$P(y) - \frac{1}{W} \begin{vmatrix} \phi_1 & \ldots & \phi_n & y \\ \vdots & & \vdots & \\ \phi_1^{(n)} & \ldots & \phi_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

tiene orden n-1 pero tiene n soluciones linealmente independientes (las ϕ_1), de manera que todos sus coeficientes deben ser idénticamente 0. Por lo tanto

$$(6) \qquad \frac{W_k f}{W} = W_k \frac{W(\phi_1,\ldots,\phi_n,g)}{W^2}$$

Es claro que será suficiente demostrar que al derivar (5) obtenemos (6) para el caso $k = n$, ya que los demás casos resultan de éste mediante un intercambio de columnas en W_k y en el numerador de (5) que producen el mismo cambio de signo en

(5) y (6). Suponiendo entonces que $k = n$, y derivando (5), obtenemos

$$(7)\qquad \frac{1}{W^2}\left\{\begin{vmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_{n-1} & g \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{(n-2)} & \cdots & \phi_{n-1}^{(n-2)} & g^{(n-2)} \\ \phi_1^{(n)} & \cdots & \phi_{n-1}^{(n)} & g^{(n)} \end{vmatrix} W \right.$$

$$\left. -W(\phi_1,\ldots,\phi_{n-1},g)\begin{vmatrix} \phi & \cdots & \phi \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-2)} & \cdots & \phi^{(n-2)} \\ \phi_1^{(n)} & \cdots & \phi_n^{(n)} \end{vmatrix}\right\}$$

donde el cuarto determinante del numerador es W'. Como (6) y (7) tienen ambos a W^2 en el denominador, es suficiente mostrar que sus numeradores coinciden. Esto se hace mostrando que se trata de una identidad algebráica, la que se establece en el siguiente

TEOREMA. *Para* $n \geq 2$ *es válida la siguiente igualdad, donde* $A = (a_j^i)$ *es una matriz* $(n+1)\times(n+1)$ *de números complejos y* A_j^i *es el codeterminante menor del elemento* a_j^i ,

$$(8)\qquad A_{n+1}^{n+1}\det A = A_n^n\, A_{n+1}^{n+1} - A_{n+1}^n\, A_n^{n+1} .$$

La demostración resultará del lema siguiente *

---

* Agradezco al Profesor Yu Takeuchi de la Universidad Nacional por esta demostración.

LEMA. *Sea* A *una matriz cuadrada* n×n *no singular y* B *su inversa. Si expresamos* A *y* B *en la siguiente forma:*

$$A = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)}_{\text{k columnas}} \begin{array}{l} \}\text{k filas} \\ \\ \end{array}$$

$$B = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)}_{\text{k columnas}} \begin{array}{l} \}\text{k filas} \\ \\ \end{array}$$

entonces

(9) $\det A_{11} = (\det B_{22})\ (\det A).$

DEMOSTRACION. Para mayor sencillez, supongamos que $\det A_{11} \neq 0$. Como

$$A.B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tenemos que

(10) $A_{11}\ B_{12} + A_{12}\ B_{22} = 0$ (matriz k×(n-k))

(11) $A_{21}\ B_{12} + A_{22}\ B_{22} = 1$ (matriz (n-k)×(n-k))

De (10),

$$B_{12} + A_{11}^{-1}\ A_{12}\ B_{22} = 0.$$

Multiplicando por A_{21},

(12) $$A_{21}\ B_{12} = -A_{21}\ A_{11}^{-1}\ A_{12}\ B_{22}$$

Reemplazando (12) en (11), tenemos

(13) $$(A_{22} - A_{21}\ A_{11}^{-1}\ A_{12})\ B_{22} = 1 \ .$$

Por lo tanto,

(14) $$\det(A_{22} - A_{21}\ A_{11}^{-1}\ A_{12})\ \det B_{22} = 1 \ .$$

De (14) se observa que B_{22} es no singular. Por otra parte parte, se puede verificar inmediatamente la siguiente igualdad:

(15)
$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

(16) $$(\det A_{11}) \cdot (\det(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}))$$
$$= \det A \det A_{11}^{-1} \det A_{11} = \det A.$$

De (14) y (16) tenemos la igualdad deseada. De la misma manera se demuestra la identidad (9) en caso de que $\det B_{22} \neq 0$. Así, si $\det A_{11} = 0$ entonces se debe tener que $\det B_{22} = 0$; por lo tanto, se tiene la igualdad (9), en el sentido de $0 = 0$.

DEMOSTRACION del TEOREMA. Sea A la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_1^1 & & \ldots & a_n^1 & a_{n+1}^1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \hline a_1^n & & \ldots & a_n^n & a_{n+1}^n \\ a_1^{n+1} & & \ldots & a_n^{n+1} & a_{n+1}^{n+1} \end{array}\right)$$

(I) Supongamos primero que $\det A \neq 0$. Sea $B = A^{-1} = (b_j^i)$. Si A_j^i es el co-determinante menor correspondiente al elemento a_j^i, entonces es bien conocida la relación

$$A_j^i = (-1)^{i+j}\, b_j^i . \det A .$$

Aplicando el Lema, tenemos

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_{n-1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_n^n & b_{n+1}^n \\ b_n^{n+1} & b_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix} \det A,$$

o sea, que

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_{n-1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \det A = \begin{vmatrix} b_n^n \det A & b_{n+1}^n \det A \\ b_n^{n+1} \det A & b_{n+1}^{n+1} \det A \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_n^n & -A_{n+1}^n \\ -A_n^{n+1} & A_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix} = A_n^n . A_{n+1}^{n+1} - A_{n+1}^n . A_n^{n+1} .$$

Esta es la igualdad (8).

(II) Supongamos ahora que $\det A = 0$. Sean

$$\vec{a}_k = (a_1^k, a_2^k, \ldots, a_{n+1}^k) , \qquad k = 1,2,\ldots,n+1.$$

Tales $n+1$ vectores son dependientes, o sea, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{n+1} \vec{a}_{n+1} = 0.$$

Por la definición de los co-determinantes menores, se tiene que

$$\lambda_{n+1} A_i^n = \lambda_n A_i^{n+1} , \quad \text{para todo} \quad i = 1,2,\ldots,n+1,$$

ya que (tomando el caso $i = n+1$ para mayor sencillez)

$$\lambda_{n+1} A_{n+1}^n + \lambda_n A_{n+1}^{n+1} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \\ \lambda_{n+1} a_1^{n+1} & \ldots & \lambda_{n+1} a^{n+1} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \\ \lambda_n a_1^n & \ldots & \lambda_n a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_1^n + \lambda_{n+1} a_1^{n+1} & \ldots & \lambda_n a_n^n + \lambda_{n+1} a_n^{n+1} \end{vmatrix}$$

y este determinante es cero ($\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\text{fila } j) + \text{fila } n = \vec{0}$). De ahí se deduce que el segundo miembro de la igualdad (8) es 0. Si $\lambda_n \lambda_{n+1} \neq 0$ entonces

$\lambda_n\lambda_{n+1}(A_n^n\, A_{n+1}^{n+1}-A_{n+1}^n A_n^{n+1}) = \lambda_n\, A_{n+1}^{n+1}\, \lambda_{n+1}A_n^n$

$-\ \lambda_n A_n^{n+1}\lambda_{n+1}\, A_{n+1}^n = 0$; si $\lambda_n = 0$ ó $\lambda_{n+1} = 0$ entonces $A_i^n = 0$ para $i = 1,\dots,n+1$, ó $A_i^{n+1} = 0$ para $i = 1,\dots,n+1$, y en cualquier caso $A_n^n A_{n+1}^{n+1} - A_{n+1}^n\, A_n^{n+1} = 0$. Luego (8) se cumple en el sentido de que $0 = 0$. ■

El teorema anterior establece inmediatamente que si $f = P(g)$ para algún $g \in O(\Omega)$, entonces $I_f([\gamma]) = 0$ para todo $[\gamma] \in H_1(\Omega)$; o sea, que I_f es el homomorfismo nulo de $H_1(\Omega)$ en Ker P. Por lo tanto,

$$P(O(\Omega)) \subseteq \text{Ker } P.$$

Esto concluye la demostración del Lema 1. Se puede observar que si denotamos con c_k a la función en (5), entonces es fácil comprobar, mediante el manejo de los determinantes, que $\sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k = g$. ■

§3. <u>Sobreyectividad de I</u>. Para demostrar la sobreyectividad de I en la sucesión (2), hacemos una restricción sobre la naturaleza de Ω:

<u>Definición 2</u>. Diremos que $\Omega \subseteq C$, abierto y conexo, es un *abierto libre*, si siempre que se escoge de cada componente acotada de $\mathbb{C} - \Omega$ un solo punto, el conjunto así formado no contiene ninguno de sus puntos de acumulación.

Este es el caso si $\mathbb{C}-\Omega$ tiene un número finito de componentes. Evidentemente, que Ω sea libre equivale a decir que para cada componente conexa y acotada B de $\mathbb{C}-\Omega$, $d(B,(\mathbb{C}-\Omega)-B)>0$. En estas circunstancias, $H_1(\Omega)$ es el grupo abeliano libre generado por las curvas cerradas γ_B (una para cada componente conexa y acotada B de $\mathbb{C}-\Omega$) tales que

$$\operatorname{Ind}(\gamma_B,z)=\begin{cases}1 & \text{si } z\in B\\ 0 & \text{si } z\in(\mathbb{C}-\Omega)-B\end{cases}$$

(Ref. [1], Teorema 3).

En lo que sigue, denotaremos con $\tilde{\Omega}$ el abierto obtenido reemplazando cada componente conexa y acotada B de $\mathbb{C}-\Omega$ por uno (cualquiera) de sus puntos. Si Q es el conjunto de estos puntos, tenemos que $\tilde{\Omega}=\hat{\Omega}-Q$. Para cada $q\in Q$, denotaremos con γ_q a la curva dada por

$$\gamma_q(t)=q+\varepsilon_q\, e^{2\pi it},$$

donde $0<\varepsilon_q<d(q,(\mathbb{C}-\tilde{\Omega})-q)$. $H_1(\tilde{\Omega})$ está generado libremente por las clases de homología de las γ_q, $q\in Q$, y se tiene que $H_1(\tilde{\Omega})\simeq H_1(\Omega)$, con el isomorfismo determinado por

$$[\gamma_q]\mapsto[\gamma_B]$$

donde B es la componente de $\mathbb{C}-\Omega$ que contiene a q (Ref. [1]). Como Ω está contenido en $\tilde{\Omega}$, γ_B es una curva en $\tilde{\Omega}$, y $\gamma_B\sim\gamma_q$ en $\tilde{\Omega}$.

La idea central de la demostración de la sobreyectividad de I es la siguiente: dado un homomorfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}(H_1(\Omega), \mathrm{Ker}\ P)$, hay que encontrar $f \subset O(\Omega)$ tal que $I_f = \varphi$. Como Ω es un abierto libre, será suficiente demostrar que para toda curva γ_B,

$$I_f([\gamma_B]) = \varphi([\gamma_B]). \tag{17}$$

Si $\varphi([\gamma_B]) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k$ (recordemos que las ϕ_k forman una base de Ker P), entonces (17) equivale a decir que

$$\int_{\gamma_B} \frac{(-1)^{k+n} W_k(\xi) f(\xi)}{W(\xi)} d\xi = \alpha_k, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{18}$$

En efecto, vamos a encontrar a $f \in O(\tilde{\Omega})$. Podemos reemplazar a γ_B en (18) por γ_q, ya que $\gamma_q \sim \gamma_B$ en $\tilde{\Omega}$. La integral en (18) depende solamente de la parte principal de $\frac{W_k f}{W}$ en q, y ésta, a su vez, depende de la parte principal de f en q. Mostraremos, utilizando el Teorema de Mittag-Leffler, ([2], p. 291), que existe $f \in O(\tilde{\Omega})$ cuya parte principal en cada $q \in Q$ es tal que se cumple (18). Para esto, necesitamos primero

LEMA 2. *Con las mismas condiciones* (3), *las* n *funciones* $\frac{W_k}{W}$, $k = 1,\ldots,n$, *son linealmente independiente sobre* $\mathbb{C}$ *en cualquier abierto* $V \subseteq \hat{\Omega}$.

DEMOSTRACION. Supongamos que existen constantes $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_k W_k(z) = 0$ para todo $z \in V$. Esto se reescribe en la forma

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ \phi_1 & \cdots & \phi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_1^{(n-2)} & \cdots & \phi_n^{(n-2)} \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \text{en} \quad V ,$$

lo cual implica, por la independencia de las filas de W, que existen funciones $f_{1,0},\ldots,f_{1,n-2}$ definidas en V tales que

$$(20)\qquad \vec{\alpha} = f_{1,0}(z)\,\vec{\phi}(z)+\ldots+f_{1,n-2}(z)\,\vec{\phi}^{(n-2)}(z)$$

para todo $z \in V$ (los vectores en (20) son las filas del determinante en (19)). La derivada del determinante en (19) es también 0 en V:

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_n & \cdots & \alpha_n \\ \phi_1 & \cdots & \phi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_n^{(n-3)} & \cdots & \phi_n^{(n-3)} \\ \phi_1^{(n-1)} & \cdots & \phi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \text{en} \quad V.$$

Esto implica que existen funciones $f_{2,0},\ldots,f_{2,n-3}$, $f_{2,n-1}$ definidas en V tales que

$$(22)\qquad \vec{\alpha} = f_{2,0}(z)\vec{\phi}(z)+\ldots+f_{2,n-3}(z)\vec{\phi}^{(n-3)}(z) + f_{2,n-1}(z)\vec{\phi}^{(n-1)}(z)$$

para todo z en V. Restando (22) de (20), obtenemos

$$0 = (f_{1,0}(z)-f_{2,0}(z))\vec{\phi}(z)+\ldots+(f_{1,n-3}(z) -$$

$$- f_{2,n-3}(z))\vec{\phi}^{(n-3)}(z) + f_{1,n-2}(z)\vec{\phi}^{(n-2)}(z)$$
$$- f_{2,n-1}(z)\vec{\phi}^{(n-1)}(z).$$

Esto contradice la independencia de las filas de W, a menos que todos los coeficientes sean 0; en particular, $f_{1,n-2}$. Por lo tanto,

(23) $\vec{\alpha} \in \mathrm{Sp}\{\overline{\phi}(z),\ldots,\overline{\phi}^{(n-3)}(z)\}$ para todo z en V.

Ahora, la segunda derivada de (19) es también 0:

$$(24)\quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \ldots\alpha_n \\ \phi_1 & \ldots\phi_n \\ \cdot & \cdot \\ \phi_1^{(n-4)} & \ldots\phi_n^{(n-4)} \\ \phi_1^{(n-2)} & \ldots\phi_n^{(n-2)} \\ \phi_1^{(n-1)} & \ldots\phi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \ldots\alpha_n \\ \phi_1 & \ldots\phi_n \\ \cdot & \cdot \\ \phi_1^{(n-3)} & \ldots\phi^{(n-3)} \\ \phi_1^{(n)} & \ldots\phi_n^{(n)} \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \text{en } V.$$

Como el segundo de estos determinantes es 0, por (23), se deduce que lo mismo es cierto del primero. Se puede concluír, de la misma forma que antes, que $\alpha \in \mathrm{Sp}\{\vec{\phi},\ldots,\vec{\phi}^{(n-4)}\}$ en V. De manera inductiva obtenemos que $\vec{\alpha} \in \mathrm{Sp}\{\vec{\phi},\ldots,\vec{\phi}^{(n-k)}\}$ y $\alpha \in \mathrm{Sp}\{\overline{\phi}\}$ en V. Pero esto es absurdo, ya que las ϕ_i son independientes (sobre $\mathbb{C}$) en V. ∎

LEMA 3. *Cuando Ω es un abierto libre, el operador* I *es sobreyectivo.*

DEMOSTRACION. Recordemos primero que las $\frac{W_k}{W}$ son holomorfas en todo $\hat{\Omega}$.

Sean
$$\frac{W_k(z)}{W(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^k (z-q)^m$$

los desarrollos en serie alrededor de $q \in Q$ de las $\frac{W_k}{W}$. Si $f \in O(\tilde{\Omega})$ tiene en q la parte principal
$$\sum_{j=1}^{m} c_j (z-q)^{-j}$$

entonces el coeficiente de $(z-q)^{-1}$ en la parte principal en q de $\frac{W_k f}{W}$ es
$$b_o^k\ c_1 + b_1^k\ c_2 + \ldots + b_{m-1}^k\ c_m ,$$

y por lo tanto, por el teorema de los residuos,
$$\int_{\gamma_q} \frac{W_k(\xi) f(\xi)}{W(\xi)}\, d\xi = 2\pi i\ \{b_o^k c_1 + \ldots + b_{m-1}^k\} ,$$

Para que se cumpla (18) es necesario y suficiente:

$$(25) \qquad (-1)^{k+n}\{b_o^k c_1 + \ldots + b_{m-1}^k c_m\} = \frac{\alpha_k}{2\pi i} \qquad k=1,\ldots,n$$

Interpretemos las ecuaciones (25) como ecuaciones lineales con incógnitas $c_1,\ldots,c_m$. Ahora, m no es fijo; para que las ecuaciones (25) tengan solución, cualesquiera que sean los α_k, es necesario y suficiente que para algún m los n vectores de $\mathbb{C}^m$,

$$(26) \qquad \underline{v}_m^k = (b_o^k,\ldots,b_{m-1}^k) \qquad k=1,\ldots,n ,$$

sean linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$. Supongamos que no; entonces, para todo m, $m = 1,2,\ldots$, existen constantes $\beta_m^k \in \mathbb{C}$, tales que

$$(27) \qquad \beta_m^1 \underline{v}_1^1 + \ldots + \beta_m^n \underline{v}_m^n = 0$$

Dividiendo (27) por el coeficiente de máxima magnitud, podemos suponer que uno de ellos es igual a 1, y que los demás tienen magnitud menor o igual a 1. Notemos que para $m' \geqslant m$, se cumple que

$$(27') \qquad \beta_{m'}^1 \underline{v}_m^1 + \ldots + \beta_{m'}^n \underline{v}_m^n = 0.$$

Sea ahora $\underline{\beta}_m = (\beta_m^1, \ldots, \beta_m^n)$. Por lo anterior $\underline{\beta}_m$ está contenido en la frontera topológica del polidisco

$$\Delta(0,1) = \{(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_k| < 1 \text{ para } k=1,\ldots,n\},$$

la que es un conjunto compacto. Por lo tanto, la sucesión $\{\underline{\beta}_m\}$ tiene una subsucesión convergente a algún punto $\underline{\beta} = (\beta^1,\ldots,\beta^n)$, también en la frontera de $\Delta(0,1)$. Por (27'), podemos reemplazar $\underline{\beta}_m$ por esta subsucesión, sin que se deje de cumplir (27). Afirmamos que esto implica que los n vectores de $\mathbb{C}^\infty$

$$\underline{v}^k = (b_o^k, b_1^k, \ldots, b_m^k, \ldots) \qquad k=1,\ldots,n$$

satisfacen

$$(28) \qquad \beta^1 \underline{v}^1 + \ldots + \beta^n \underline{v}^n = 0.$$

Si (28) no fuera cierto, habría una primera coordenada de la suma a la izquierda distinta de 0. Si ésta fuera la m-ésima, entonces

(29) $$\beta^1 \underline{v}_m^1 + \ldots + \beta^n \underline{v}_m^n \neq 0.$$

Sinembargo, (27) implica que esta suma es igual a 0 , ya que para todo k, $k=1,\ldots,n$, $\beta_m^k \to \beta^k$, y para $m' \geqslant m$, (29) sí se cumple al reemplazar a los β^k por $\beta_{m'}^k$.

Luego (28) se cumple, y esto implica precisamente que

$$\beta^1 \sum_{m=o}^{\infty} b_m^1 (z-q)^m + \ldots + \beta^n \sum_{m=o}^{\infty} b_m^n (z-q)^m = 0$$

para todo z para el que estas sumas convergen, contradiciendo el Lema 2. Recordemos que como $\underline{\beta}$ pertenece a la frontera de (0,1), no todos sus componentes son 0. Concluimos que para algún $m = m(q)$, los n vectores $\underline{v}_m^k$, $k=1,\ldots,n$, son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$, y, por lo tanto, para $m = m(q)$ las ecuaciones (25) tienen solución.

Consideremos la función racional

$$P_q(z) = \sum_{j=1}^{m(q)} c_j^q (z-q)^{-j} ,$$

donde los coeficientes c_j^q son las soluciones de (25) para $m = m(q)$. Por el Teorema de Mittag Leffler [2] existe $f \in O(\tilde{\Omega})$ cuya parte principal en cada punto $q \in Q$ es P_q. (El teorema de Mittag Leffler es aplicable ya que Q no tiene puntos de acumulación en $\hat{\Omega}$). Entonces es claro que $f \in O(\tilde{\Omega})$, ya que $\Omega \subseteq \tilde{\Omega}$, y que

$$\int_{\gamma_B} \frac{(-1)^{k+n} f(\xi) W_k(\xi)}{W(\xi)} d\xi = \int_{\gamma_q} \frac{(-1)^{k+n} f(\xi) W_k(\xi)}{W(\xi)} d\xi = \alpha_k$$

para $k=1,\ldots,n$ y para toda componente conexa y acotada B de $\mathbb{C} - \Omega$. Por lo tanto $I_f = \varphi$. ∎

TEOREMA. *Con la condición* (3) *y cuando* Ω *es un abierto libre, la sucesión* (2) *es exacta, y el índice del operador* P, *definido por* $\chi(P) = \dim(\mathrm{Ker}P) - \dim(\mathrm{Coker}P)$, *es igual a* $n(1 - b_1)$, *donde* b_1 *es el rango del grupo libre abeliano* $H_1(\Omega)$.

DEMOSTRACION. La exactitud está demostrada en los Lemas 1 y 2. De la exactitud resulta que $\mathrm{Coker}\ P \simeq \mathrm{Hom}\ (H_1(\Omega), \mathrm{Ker}\ P) \simeq \mathrm{Hom}(z^{b_1}, \mathbb{C}^n) \simeq \mathbb{C}^{nb_1}$ ∎

<u>Nota</u>. El Lema 1 nos proporciona lo que es esencialmente una generalización del Teorema de Morera, y un criterio efectivo para determinar la existencia de soluciones de ecuaciones lineales no homogénas, lo cual podemos ilustrar con un pequeño ejemplo:

Sea $P(y) = y'' - 3y' + 2y$, y consideremos P actuando en $O(D')$, $D' = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$. Las funciones e^z, e^{2z} forman un sistema fundamental de soluciones de $P(y) = 0$, en D'. Entonces

$$W(z) = e^{3z}\ ,\quad W_1(z) = e^{2z}\ ,\quad W_2(z) = e^{z}\ ,$$

y por lo tanto,

$$\frac{W_1}{W}(z) = e^{-z} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m z^m}{m!}\ ,$$

$$\frac{W_2}{W}(z) = e^{-2z} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-2)^m z^m}{m!}\ .$$

En el caso de la función $f(z) = \frac{1}{z}$ tenemos que $\mathrm{Res.}(\frac{W_1 f}{W},0) \neq 0$, de manera que $f \notin P(O(D'))$, por el Lema 1. Para $f(z) = 2z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3}$, $\mathrm{Res.}(\frac{W_1 f}{W},0) = \mathrm{Res.}(\frac{W_2 f}{W},0) = 0$, y entonces, por el Lema 1, existe en $O(D')$ una solución de la ecuación $P(y) = f$.

TEOREMA. *Para $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto libre,* $\check{H}^1(\Omega,\mathbb{C}^n) \approx \mathrm{Hom}(H_1(\Omega),\mathbb{C}^n)$ *(Donde $\check{H}^1$ es el grupo de cohomología de Čech).*

DEMOSTRACION. Comencemos observando que si $P: O(\Omega) \to O(\Omega)$ es $\frac{d^n}{dz^n}$, entonces ciertamente se cumple la condición (3), y Ker P se puede identificar con $\mathbb{C}^n$. El haz Ker P es el haz trivial Ω, Ker $P = \Omega\times\mathbb{C}^n$, y el grupo $H^1(\Omega, \mathrm{Ker}\ p)$ de cohomología de haces se reduce al grupo de Čech $H^1(\Omega,\mathbb{C}^n)$. Comparando la sucesión exacta (2) con la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}\ P \to O(\Omega) \xrightarrow{P} O(\Omega) \to H^1(\Omega,\mathrm{Ker}\ P) \to 0,$$

de cohomología de haces (ver Resumen), obtenemos el isomorfismo deseado. ∎

Lo que es más interesante es que se puede dar el isomorfismo del teorema anterior en una forma casi explícita; aunque el grupo de cohomología de Čech es un límite inductivo, es bien conocido un teorema de Leray ([3] p.44) que da condiciones sobre un recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de Ω que garantizan que $H^1(\mathcal{U},\mathbb{C}^n)$ es isomorfo a $H^1(\Omega,\mathbb{C}^n)$ por la aplicación al límite. En nuestro caso estas condiciones son satisfechas cuando $\mathcal{U}$ es, por ejemplo, un recubrimiento por abiertos convexos, y con un tal recubrimiento $\mathcal{U}$, la sucesión

$$0 \to H^{0}(\mathcal{U},\mathrm{Ker}P) \to H^{0}(\mathcal{U},\mathcal{O}) \to H^{0}(\mathcal{U},\mathcal{O}) \xrightarrow{\delta} H^{1}(\mathcal{U},\mathrm{Ker}P) \to 0,$$

o sea $0 \to \mathrm{Ker}P \to \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{\delta} H^{1}(\mathcal{U},\mathrm{Ker}P) \to 0$,

sí es exacta (en general la sucesión de cohomología solo es exacta en el límite inductivo). Comparando esta última sucesión con la sucesión (2), y analizando la forma de los homomorfismos de conexión δ e I, se puede obtener una idea bastante explícita del isomorfismo del grupo de Čech con $\mathrm{Hom}(H_1(\Omega),\mathbb{C}^n)$.

***

BIBLIOGRAFIA

[1] Mond, David: "Sobre la Definición del Primer Grupo de Homología de los Abiertos del Plano", Revista Colombiana de Matemáticas, Vol. XIII (1979), 121-138.

[2] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*, 2a. edición, McGraw-Hill, 1974.

[3] Gunning, R.C.: *Lectures on Riemann Surfaces*, Princeton, 1966.

[4] Ince, E.L.: *Ordinary Differential Equations*, Dover, 1956.

***

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E., COLOMBIA.

(Recibido en Febrero de 1979).