*Revista Colombiana de Matemáticas*
*Vol. XIII (1979) págs. 245 - 263*

# SOBRE CIERTOS ESPACIOS DE FUNCIONES HOLOMORFAS Y SUS APLICACIONES, II*

por

Jairo A. CHARRIS CASTAÑEDA

RESUMEN: Los espacios $H_m(D_r)$ introducidos en la sección 2 y diversas técnicas homológicas de aproximación permiten clasificar como operadores de Fredholm a una amplia clase de operadores diferenciales complejos y establecer, al mismo tiempo, una fórmula para el índice de tales operadores.

§ Introducción. Sean $\Omega$ un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $H(\Omega)$ el espacio de las funciones holomorfas en $\Omega$. Designemos con $H^1(\Omega,\mathbb{C})$ al primer grupo de cohomología de $\Omega$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ y con $b_1$ a su dimen

(*) Los resultados contenidos en este artículo forman parte del trabajo de disertación presentado por el autor en la U. de Chicago en el verano de 1969, con el fin de llenar requisitos parciales para obtener el título de M.S. en Matemáticas, y cuyo tema fué sugerido por el Profesor R. Narasimhan.

sión: $b_1=\dim_{\mathbb{C}} H^1(\Omega,\mathbb{C})$. Consideremos el polinomio diferencial

$$P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} a_k(z)\frac{\partial^k}{\partial z^k},$$

cuyos coeficientes $a_k(z)$ son funciones holomorfas en $\Omega$, y en donde

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Nos proponemos demostrar en este artículo que cuando $b_1 < \infty$ y el número $\eta(a_m,\Omega)$ de los ceros del coeficiente $a_m(z)$, contadas las multiplicidades, es finito, el operador diferencial P definido por $P(z,\partial/\partial z)$ sobre $H(\Omega)$ es un operador de Fredholm (en el sentido de que su núcleo y conúcleo son de dimensión finita y su imagen es cerrada) y, al mismo tiempo, establecer una fórmula para su índice.

La fórmula que obtendremos puede ser conocida, pero no hemos podido hallarla en la literatura usual. Para establecerla usaremos diversas técnicas del álgebra homológica, aplicándolas a sistemas de aproximación construídos con los espacios $H_m(D_r)$ que introduciremos en el numeral 2. La fórmula en cuestión, conjuntamente con las técnicas antes mencionadas, permiten obtener resultados generales en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias en el campo complejo, como mostraremos posteriormente.(*)

En el numeral 1 recordaremos algunas de las pro

(*) Véanse [6], [7] y [9].

piedades de los espacios $H^p(D_r)$. En el numeral 2 daremos las propiedades básicas de los espacios $H_m(D_r)$. En el 3 estableceremos la fórmula del índice en un disco. En el 4 la extenderemos a un abierto simplemente conexo arbitrario y, finalmente, en el 5, a un abierto de conexión finita (es decir, a un abierto conexo con $b_1 < \infty$).

§1. <u>Los espacios</u> $H^p(D_r)$. Si $r > 0$, $D_r$ denotará al disco abierto $|z| < r$ y, para $p=1,2$, $H^p(D_r)$ denotará al espacio de Hardy de las funciones holomorfas en $D_r$ para las cuales

$$|f|_{r,p}^p = \sup_{0\leq t<r} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(te^{i\theta})|^p d\theta < +\infty.$$

Con la norma $f \mapsto |f|_{r,p}$, $H^p(D_r)$ es un espacio de Banach. Si se dota a $H(D_r)$ de la topología de la convergencia compacta, la inclusión $\rho_r : H^2(D_r) \to H(D_r)$ es continua y tiene imagen densa en $H(D_r)$. Si $f \in H^p(D_r)$, el límite

$$(1.1) \qquad \bar{f}(re^{i\theta}) = \lim_{t\to r} f(te^{i\theta})$$

existe para casi todo $\theta \in [0,2\pi]$ y define una función $\bar{f}(re^{i\theta})$ en $L^p(T_r)$, donde $T_r = \{z : |z| = r\}$. Además,

$$(1.2) \qquad |f|_{r,p}^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\bar{f}(re^{i\theta})|^p d\theta,$$

y puesto que $L^2(T_r) \subseteq L^1(T_r)$, podemos definir, para $n \in \mathbb{Z}$ y $f \in H^p(D_r)$,

$$(1.3) \qquad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$$

Si $\gamma: H^p(D_r) \to L^p(T_r)$ es la aplicación $\gamma(f) = \bar{f}$, la imagen de $\gamma$ es el espacio de todas las funciones $g \in L^p(T_r)$ con $\hat{g}(n) = 0$ para todo $n < 0$. Más precisamente, si se da a $T_r$ la orientación positiva, toda función $f \in H^p(D_r)$ se escribe unívocamente en la forma

$$(1.4) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{T_r} \frac{g(t)}{t-z}dt, \quad |z| < r,$$

donde $g \in L^p(T_r)$ y $\hat{g}(n) = 0$ para todo $n < 0$. En tal caso, $\bar{f} = g$. De la fórmula (1.2) se sigue que $\gamma$ es una isometría.

Si $s > r$ entonces $\sigma_{s,r}: H(D_s) \to H^p(D_r)$ y $\sigma_r^s: H^p(D_s) \to H^p(D_r)$ designarán las restricciones naturales. Como los polinomios forman subespacios densos en todos estos espacios, $\sigma_{s,r}$ y $\sigma_r^s$ tienen imágenes densas. Son además continuas; en efecto, para $\sigma_{s,r}$ esto resulta de la desigualdad

$$|\sigma_{s,r}(f)|_{r,p} \leq \sup_{t\in T_r} |f(t)| \ ;$$

y para $\sigma_r^s$ del hecho de que la aplicación

$$t \mapsto \int_0^{2\pi} |f(te^{i\theta})|^p d\theta \ , \quad 0 \leq t < s$$

es creciente. Evidentemente $\sigma_{s,r}$ y $\sigma_r^s$ son inyectivas. Notemos, finalmente, que $H^2(D_r)$ es un espacio de Hilbert para el producto escalar

$$(1.5)\qquad \langle f,g\rangle_r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{f}(re^{i\theta})\overline{\bar{g}(re^{i\theta})}d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}.$$

§2. Los espacios $H_m(D_r)$. Para todo $m\in\mathbb{N}$ denotaremos con $H_m(D_r)$ al $\mathbb{C}$-espacio de las funciones holomorfas en $D_r$ tales que $f^{(k)}\in H^2(D_r)$ para $0\leqslant k\leqslant m$. Dotaremos a $H_m(D_r)$ de la topología definida por la norma

$$(2.1)\qquad \|f\|_{r,m} = \Big(\sum_{k=0}^{m}|f^{(k)}|_{r,2}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Con esta norma, $H_m(D_r)$ evidentemente es un espacio de Banach; lo que es más, un espacio de Hilbert para el producto escalar

$$(2.2)\qquad \langle f,g\rangle_{r,m} = \sum_{k=0}^{m}\langle f^{(k)},g^{(k)}\rangle_r \;.$$

Obviamente, $H_o(D_r) = H^2(D_r)$. Para $n\leqslant m$, $H_m(D_r)\subseteq H_n(D_r)$ y la inclusión es contínua. También son contínuas e inyectivas las restricciones naturales $\sigma_{s,r}:H(D_s)\to H_m(D_r)$ y $\sigma_r^s:H_m(D_s)\to H_m(D_r)$. Por otra parte, para todo $m\geqslant 0$ y $s,r<R$, las parejas $(H_m(D_r),\sigma_r^s)$ forman un sistema proyectivo de C-espacios tal que

$$(2.3)\qquad H(D_R) = \lim_{s\to R}\text{proy}.H_m(D_s)$$

y que

$$(2.4)\qquad \sigma_{R,s} = \lim_{s\to R}\text{proy}.\sigma_r^s \;.$$

Si $C^q(\bar{D}_r)$ denota al $\mathbb{C}$-espacio de las funciones f, holomorfas en $D_r$, para las cuales $f^{(k)}$ admite una extensión continua a $\bar{D}_r = \{z:|z| \leqslant r\}$ cuando $k \leqslant q$, tenemos que

TEOREMA 2.1. (Lema de Sobolev). *Para todo* $m \geqslant 1$, $H_m(D_r)$ *es un subespacio de* $C^{m-1}(\bar{D}_r)$. *Además*, $H_m(D_r)$ *es idéntico al espacio de las funciones holomorfas en* $D_r$ *para las cuales* $f^{(m)} \in H_o(D_r)$.

Demostración. Resulta inmediatamente del siguiente resultado, bien conocido ([2], pág. 42).

LEMA. *Una función holomorfa en* $|z| < r$ *es continua en* $|z| \leqslant r$ *y absolutamente continua en* $|z| = r$ *si, y sólo si* $f' \in H^1(D_r)$.

Sea ahora $Q:H_m(D_r) \to H(D_r)$ el operador lineal definido por el polinomio diferencial $Q(z,\partial/\partial z) = a_m(z)\partial^m/\partial z^m$, en donde $m \geqslant 0$ y $a_m \in H(D_r)$ es acotada. Es claro que $Q$ aplica a $H_m(D_r)$ en $H_o(D_r)$. Considerado como un operador de $H_m(D_r)$ en $H_o(D_r)$, $Q$ tiene la siguiente propiedad:

TEOREMA 2.2. *Si la función* $a_m \in H(D_r)$ *es acotada, y existen* $s < r$ *y* $M > 0$ *tales que* $\inf_{|z|\geqslant s}|a_m(z)|>M$, *entonces el operador diferencial* $Q:H_m(D_r) \to H_o(D_r)$ *definido por* $Q(z,\partial/\partial z) = a_m\partial^m/\partial z^m$, $m \geqslant 0$, *es un operador de Fredholm de índice*

$$\text{Ind } Q = m-\eta(a_m,D_r) \quad (2.5)$$

Demostración. Sea $\mathfrak{M}$ el ideal de $H(D_r)$ generado por $a_m$. Evidentemente $H(D_r)/\mathfrak{M}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión $\eta(a_m,D_r)$. Por otra parte,

$\mathfrak{M} \cap H_o(D_r) = a_m H_o(D_r)$. En efecto, como $a_m$ es acotada, si $f \in H_o(D_r)$ entonces $|a_m f|_{r,o} \leq \sup|a_m| |f|_{r,o}$, de lo cual resulta que $a_m f$ pertenece a $\mathfrak{M} \cap H_o(D_r)$. Recíprocamente, si $f \in H(D_r)$ y $a_m f \in H_o(D_r)$, entonces $|f|_{r,o} \leq |a_m f|_{r,o}/M$ ; por lo tanto, $a_m f \in a_m H_o(D_r)$. Sea ahora $\tilde{\rho}_r : H_o(D_r)/a_m H_o(D_r) \to H(D_r)/\mathfrak{M}$ la aplicación lineal obtenida de la inclusión $\rho_r : H_o(D_r) \to H(D_r)$ por paso a los cocientes. Entonces $\tilde{\rho}_r$ es inyectiva. Como $\operatorname{Im} \tilde{\rho}_r = (\operatorname{Im} \rho_r + \mathfrak{M})/\mathfrak{M}$ es de dimensión finita e $\operatorname{Im} \rho_r$ es densa, necesariamente $\operatorname{Im} \tilde{\rho}_r = H(D_r)/\mathfrak{M}$. En consecuencia, la dimensión de $H_o(D_r)/a_m H_o(D_r)$ es $\eta(a_m, D_r)$. Además, $a_m H_o(D_r) = \operatorname{Im} Q$ es cerrada en $H_o(D_r)$, y por ser $\ker Q = \mathbb{C}_{m-1}[z]$ (espacio de los polinomios de grado a los más m-1), se deduce que $\operatorname{Ind} Q = m - \eta(a_m, D_r)$. Esto completa la demostración del teorema. ∎

<u>Observación</u>. Nótese que Q, considerado como un operador de $H(D_r)$ en sí mismo, es también de Fredholm, y su índice es $m - \eta(a_m, D_r)$.

COROLARIO. *Supóngase que* $a_m$ *es holomorfa en una vecindad de* $\bar{D}_r$ *en la cual tiene un número finito de ceros, todos contenidos en* $D_r$. *Entonces* $Q : H_m(D_r) \to H_o(D_r)$ *es un operador de Fredholm de índice*

$$\operatorname{Ind} Q = m - \eta(a_m, D_r). \tag{2.6}$$

Los dos teoremas siguientes son fundamentales.

TEOREMA 2.3. *Sea* $P(z, \partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{n} a_k(z) \partial^k / \partial z^k$

*un polinomio diferencial en el cual los* $a_k$ *son holomorfas y acotadas en* $D_r$. *Entonces, para todo* $m > n$, *el operador diferencial* $P: H_m(D_r) \to H_o(D_r)$, *definido por* $P(z, \partial/\partial z)$, *es un operador compacto.*

Demostración. Sea $\{f_j\}$ una sucesión de funciones en $H_m(D_r)$ para lo cual $\|f_j\|_{r,m} \leq 1$. Como para todo compacto $K$ de $D_r$ existe una constante $C_K > 0$ tal que $\sup_K |f| \leq C_K \|f\|_{r,m}$, la sucesión $\{f_j\}$ es acotada en $H(D_r)$. Existen entonces $f \in H(D_r)$ y una subsucesión $\{f_{j_\ell}\}$ de $\{f_j\}$ tales que para todo $k \in \mathbb{N}$, $f_{j_\ell}^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformemente en compactos de $D_r$. Sea $0 < s < r$. Entonces, para todo $0 \leq k \leq m$,

$$\int_0^{2\pi} |f^{(k)}(se^{i\theta})|^2 d\theta = \lim_{\ell\to\infty} \int_0^{2\pi} |f_{j_\ell}^{(k)}(se^{i\theta})|^2 d\theta \leq 2\pi,$$

de lo cual $f \in H_m(D_r)$ y $\|f\|_{r,m} \leq 1$. Vamos a demostrar que $Pf_{j_\ell} \to Pf$ en $H_o(D_r)$ cuando $\ell\to\infty$. Nótese, en primer lugar, que si $k \leq n+1$ y $0 < s < r$, entonces

$$\begin{aligned}\int_s^r \int_0^{2\pi} |f_{j_\ell}^{(k)}(te^{i\theta})|^2 d\theta dt &\leq 2\pi(r-s)\|f_{j_\ell}^{(k)}\|_{r,o}^2 \\ &\leq 2\pi(r-s)\|f_{j_\ell}\|_{r,m}^2,\end{aligned}$$

de tal manera que $f_{j_\ell}^{(k)}(te^{i\theta}) \in L^2(s,r) \subseteq L^1(s,r)$. Por lo tanto,

$$\bar{f}_{j_\ell}^{(k)}(re^{i\theta}) - f_{j_\ell}^{(k)}(se^{i\theta}) = \int_s^r f_{j_\ell}^{(k+1)}(te^{i\theta}) e^{i\theta} dt.$$

De ésta y de la anterior relación se concluye que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\bar{f}_{j_\ell}^{(k)}(re^{i\theta}) - f_{j_\ell}^{(k)}(se^{i\theta})|^2 d\theta &\leq 2\pi(r-s)^2 \|f_{j_\ell}\|_{r,m}^2 \\ &< 2\pi(r-s)^2,\end{aligned}$$

la cual también vale al substituír a $f_{j_\ell}^{(k)}$ por $f^{(k)}$. Para $k \leqslant n$ resulta entonces que

$$\|f_{j_\ell}^{(k)}-f^{(k)}\|_{r,o}^2 \leqslant 2\pi(r-s)^2 + \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} |f^{(k)}(se^{i\theta})$$
$$-f_{j_\ell}^{(k)}(se^{i\theta})|^2 d\theta .$$

Como $f_{j_\ell}^{(k)} \to f^{(k)}$ en compactos de $D_r$, la última integral de la derecha converge a 0 cuando $\ell \to \infty$, obteniéndose que

$$\|f_{j_\ell}^{(k)}-f^{(k)}\|_{r,o}^2 \leqslant 2(r-s)^2 \ .$$

Esto implica que $f_{j_\ell}^{(k)} \to f^{(k)}$ en $H_o(D_r)$ para $k \leqslant n$. Finalmente, por existir $C > 0$ tal que $\sup_{D_r}|a_k(z)| < C$, $k = 0,1,2,\ldots,n$, resulta que

$$\|Pf-Pf_{j_\ell}\|_{r,o}^2 \leqslant C\sum_{k=o}^{n}\|f^{(k)}-f_{j_\ell}^{(k)}\|_{r,o}^2 \quad ,$$

y por lo tanto, que $Pf_{j_\ell} \to Pf$ en $H_o(D_r)$. Esto demuestra el teorema. ■

TEOREMA 2.4. *Sea* $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} a_k(z)\partial^k/\partial z^k$ *un polinomio diferencial con coeficientes* $a_k$ *holomorfos y acotados en* $D_r$. *Supóngase además que* $a_m$ *es holomorfo en una vecindad de* $D_r$ *y que todos sus ceros, en número finito, están contenidos en* $D_r$. *Sea* $P:H_m(D_r) \to H_o(D_r)$, *el operador diferencial sobre* $H_m(D_r)$ *definido por* $P(z,\partial/\partial z)$. *Entonces* $P$ *es un operador de Fredholm de índice*

(2.7) $$\text{Ind } P = m-\eta(a_m,D_r).$$

Demostración. Sean $Q = a_m\partial^m/\partial z^m$ y $S = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(z)\partial^k/\partial z^k$. Entonces $P = Q+S$, en donde $Q$ es de Fredholm de índice $m-\eta(a_m,D_r)$ y $S$ es compacto. Por lo tanto, $P$ es de Fredholm de índice $m-\eta(a_m,D_r)$, tal como queríamos demostrar. ∎

§3. La fórmula del índice en un disco. Sean $0 < R \leqslant +\infty$ y $D_R$ el disco $\{z:|z|<R\}$. Si $R = +\infty$, $D_R = \mathbb{C}$. En esta sección,

$$(3.1) \qquad P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=0}^{m} a_k(z)\partial^k/\partial z^k$$

será un polinomio diferencial con los $a_k \in H(D_R)$. Supondremos además que $\eta(a_m,D_R) < +\infty$ y consideraremos el sistema proyectivo $(H_m(D_R),\sigma_r^s)$, $0 < r \leqslant s \leqslant R$. El límite proyectivo de este sistema es $(H(D_R),\sigma_{R,r})$. Para simplificar la notación, escribiremos $\sigma_r = \sigma_{R,r}$, y denotaremos con $P_r$ al operador diferencial de $H_m(D_r)$ en $H_o(D_r)$ definido por $P(z,\partial/\partial z)$. Evidentemente,

$$(3.2) \qquad \lim_{r\to R} \text{proy.} P_r = P ,$$

donde $P:H(D_R) \to H(D_R)$ es el operador diferencial definido por $P(z,\partial/\partial z)$. Nos proponemos demostrar que $P$ es un operador de Fredholm cuyo índice es $m-\eta(a_m,D_R)$. En lo que sigue, si $E$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, $|E|$ denotará su dimensión. Debe notarse que los $a_k$ no se supone acotados en $D_R$ y que, para $k < m$, no hay restricción sobre el número de ceros de $a_k$ en $D_R$.

TEOREMA 3.1. *Con* P *y los* $P_r$ *dados como antes, existen* $0 < r_o < R$ y $p \geqslant 0$ *tales que si* $r \geqslant r_o$ *entonces*

(3.3) $$|\ker P_r| = p .$$

*Para* $s \geqslant r > r_o$, *las restricciones* $\sigma_r^s : \ker P_s \to \ker P_r$ *y* $\sigma_r : \ker P \to \ker P_r$ *son isomorfismos y*

(3.4) $$|\ker P| = p$$

*Finalmente, para* $r \geqslant r_o$, *toda solución de la ecuación homogénea* $P_r f = 0$ *es la restricción a* $D_r$ *de una solución de la ecuación homogénea* $Pf = 0$.

<u>Demostración</u>. Las aplicaciones $\sigma_r^s$ son evidentemente inyectivas. Esto es también cierto de las $\sigma_r$. Se deduce que $|\mathrm{Ker}\ P| \leqslant |\mathrm{Ker}\ P_s| \leqslant |\mathrm{Ker}\ P_r|$ si $s \leqslant r$. Por otra parte, $|\mathrm{Ker}\ P_r| < +\infty$ para todo r. Sea $p = \min |\mathrm{Ker}\ P_r|$. Como es claro, existe $0 < r_o < R$ tal que $|\mathrm{Ker}\ P_r| = p$ para todo $r \geqslant r_o$. Si $s \geqslant r \geqslant r_o$, entonces $\sigma_r^s$ es biyectiva. Se deduce que si f Ker $P_r$, existe $g \in \mathrm{Ker}\ P_s$ tal que $g|D_s = f$. Esto implica que $\sigma_r$ es sobreyectiva cuando $r \geqslant r_o$. El Teorema está demostrado. ■

Menos trivial es el teorema siguiente

TEOREMA 3.2. *Con la notación del Teorema anterior, sea*

$$\tilde{\sigma}_r^s : \mathrm{Coker}\ P_s \to \mathrm{Coker}\ P_r$$

*la aplicación obtenida de* $\sigma_r^s : H_o(D_s) \to H_o(D_r)$ *por paso a los cocientes. Entonces, si* $s \geqslant r \geqslant r_o$ , *las* $\tilde{\sigma}_r^s$ *son isomorfismos. Sea, a su vez,*

$$\tilde{\sigma}_r : \text{Coker } P \to \text{Coker } P_r$$

*la aplicación obtenida de* $\sigma_r : H(D_R) \to H_o(D_r)$ *por paso a los cocientes. Entonces, si* $r \geq r_o$, *también* $\tilde{\sigma}_r$ *es un isomorfismo. Finalmente, si* $q = p-(m-\eta(a_m, D_R))$, *entonces, cuando* $r \geq r_o$ *se tiene que*

$$(3.5) \qquad |\text{Coker } P| = |\text{Coker } P_r| = q.$$

<u>Demostración</u>. Claramente $|\text{Coker } P_r| = q_o$ cuando $r \geq r_o$. Para demostrar que $\sigma_r^s$ es un isomorfismo cuando $s \geq r \geq r_o$, basta entonces demostrar que es sobreyectiva. Pero

$$\text{Im } \tilde{\sigma}_r^s = \frac{\text{Im } \sigma_r^s + \text{Im } p_r}{\text{Im } p_r}$$

Como Coker $P_r$ es de dimensión finita, Im $\sigma_r^s$+Im $P_r$ es cerrado en $H_o(D_r)$. Como además Im $\tilde{\sigma}_r^s$ es denso en $H_o(D_r)$, necesariamente Im $\sigma_r^s$ = Coker $P_r$. Un argumento esencialmente idéntico muestra que $\tilde{\sigma}_r$:Coker $P \to$ Coker $P_r$ es sobreyectiva. Para ver que estas últimas aplicaciones son inyectivas, sea $\{r_n\}$ una sucesión de números reales, con $r_o < r_n < r_{n+1} < R$ y $\lim_{n\to\infty} r_n = R$. Sea $f \in H(D_R)$ tal que $f \in \text{Im } P_{r_1}$. Como cada $\tilde{\sigma}_{r_n}$ es sobreyectiva, para cada $n \geq 1$ existe $g_n' \in \text{Im } P_{r_n}$ tal que $f|D_{r_n} = Pg_n'$. Sea $g_1 = g_1'$, y supongamos que hemos definido $g_2, \ldots, g_m$ tales que $f|D_{r_n} = Pg_n$ y $g_{n+1}\ D_n = g_n$ para todo $n < m$. Como $(g_{m+1}' - g_m)|D_{r_m}$ pertenece a Ker $P_{r_m}$, existe

$h_{m+1} \in \operatorname{Ker} P_{r_{m+1}}$ tal que $g'_{m+1} - h_{m+1} = g_m$ en $D_{r_m}$. Definamos $g_{m+1} = g'_{m+1} - h_{m+1}$. Se obtiene asi una sucesión $(g_n)$, con $f = Pg_n$ y $g_{n+1} = g_n$, en $D_{r_n}$. Si definimos $g(z) = g_r(z)$ cuando $z \in D_{r_n}$, se obtiene $g \in H(D_R)$ tal que $Pg = f$, de lo cual, $\tilde{\sigma}_{r_1}$: Coker $P \to$ Coker $P_{r_1}$ es biyectivo. Como para cada $r_o < r < R$ podemos construir una sucesión $\{r_n\}$ como antes, con $r_1 = r$, concluimos que $\tilde{\sigma}_r$ es biyectiva para todo $r \geqslant r_o$. El teorema está demostrado. ■

Notando ahora que $\operatorname{Im} P = \sigma_r^{-1}(\operatorname{Im} P_r)$ para todo $r \geqslant r_o$ y, teniendo en cuenta que $\sigma_r$ es continua e $\operatorname{Im} P_r$ es cerrado, concluimos:

TEOREMA 3.3. *Si* $P: H(D_R) \to H(D_R)$ *es el operador diferencial definido por*

$$P(z, \frac{\partial}{\partial z}) = \sum_{k=o}^{m} a_k(z) \frac{\partial^k}{\partial z^k},$$

*donde* $a_k \in H(D_k)$ *para todo* $k = 0,1,2,\ldots,m$, *y donde* $\eta(a_m, D_k) < \infty$, $P$ *es un operador de Fredholm cuyo índice está dado por:*

$$\text{Ind } P = m - \eta(a_n, D_R) \tag{3.6}$$

<u>Observación</u> 3.1. Con la notación de los Teoremas 3.1 y 3.2, es claro que la sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Ker} P \to H(D_R) \xrightarrow{P} H(D_R) \to \operatorname{Coker} P \to 0$$

es la sucesión límite proyectivo de las sucesiones exactas

$$0 \to \operatorname{Ker} P_r \to H_n(D_r) \xrightarrow{P_r} H_o(D_r) \to \operatorname{Coker} P_r \to 0 .$$

§4. La fórmula del índice en un abierto simplemente conexo. Sean ahora $\Omega \neq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y

$$P(z,\frac{\partial}{\partial z}) = \sum_{k=o}^{m} a_k(z)\partial^k/\partial z^k$$

un polinomio diferencial con los $a_k$ holomorfos en $\Omega$ y con $\eta(a_m,\Omega) < \infty$. Sean D el disco unidad de $\mathbb{C}$ y $\varphi:\Omega\to D$ un isomorfismo holomorfo (Teorema de Conformidad de Riemann). Si $\tilde{\varphi}:H(D) \to H(\Omega)$ está dado por $\tilde{\varphi}(f) = f\circ\varphi$, entonces $\tilde{\varphi}$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios. Además, $\varphi'(\varphi^{-1}(z)) \neq 0$ para todo $z \in D$. Por lo tanto, si Q es el operador lineal que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H(D) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & H(\Omega) \\ {\scriptstyle Q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P} \\ H(D) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & H(\Omega) \end{array}$$

en el cual P es el operador sobre $H(\Omega)$ definido por $P(z,\partial/\partial z)$, entonces Q es un operador diferencial cuyo término de orden máximo es $b_m\partial^m/\partial z^m$, en donde

$$b_m(z) = a_m(\varphi^{-1}(z))\ (\varphi'(\varphi^{-1}(z)))^m, \qquad z \in D.$$

Por lo tanto, $\eta(b_m,D) = \eta(a_m,\Omega)$, y tenemos:

TEOREMA 4.1. *Si $\Omega$ es simplemente conexo, el operador* $P:H(\Omega) \to H(\Omega)$ *definido por el polinomio diferencial*

$$P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{m} a_k(z)\frac{\partial k}{\partial z^k},$$

*donde* $a_k \in H(\Omega)$ *para* $k = 0,1,2,\ldots,m$ *y* $\eta(a_m,\Omega) < \infty$ *es un operador de Fredholm, con índice dado por:*

$$\text{Ind } P = m-\eta(a_m,\Omega). \tag{4.1}$$

Observación 4.1. Nótese que el caso $\Omega = \mathbb{C}$ fué considerado en el §3.

Observación 4.2. Supóngase que $\Omega = \bigcup_{i=o}^{n} \Omega_i$, donde los $\Omega_i$ son abiertos simplemente conexos, disyuntos, y sea

$$P(z,\frac{\partial}{\partial z}) = \sum_{k=o}^{m} a_k(z)\frac{\partial^k}{\partial z^k}$$

un polinomio diferencial con los $a_k \in H(\Omega)$. Supóngase que $a_m$ no es idénticamente nulo sobre ningún $\Omega_i$ y que $\eta(a_m,\Omega_i) < \infty$ es el número de sus ceros en $\Omega_i$, contadas las multiplicidades. Claramente $H(\Omega) = \bigoplus_{i=1}^{n} H(\Omega_i)$ (suma directa algebraica), y si $P:H(\Omega) \to H(\Omega)$ es el operador diferencial definido por $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ entonces $P = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$, donde $P_i$ es su restricción a $H(\Omega_i)$. Por lo tanto,

$$\text{Ind } P = \sum_{i=1}^{n} \text{Ind } P_i = \sum_{i=1}^{n} (m-\eta(\Omega_i,a_m)).$$

y así

$$\text{Ind } P = nm-\eta(a_m,\Omega). \tag{4.2}$$

§5. La fórmula del índice en un abierto conexo de conexión finita. Sea ahora $\Omega$ un abierto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $|H^1(\Omega,\mathbb{C})| = b_1 < \infty$ y sea

$$P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=o}^{n} a_k(z)\frac{\partial^k}{\partial z^k}$$

un polinomio diferencial con las $a_k \in H(\Omega)$ y $\eta(a_m,\Omega) < \infty$. Sea P el operador diferencial de $H(\Omega)$ en sí mismo definido por $P(z,\partial/\partial z)$. Entonces:

TEOREMA 5.1. *El operador* $P:H(\Omega) \to H(\Omega)$ *definido por* $P(z,\partial/\partial z)$ *es un operador de Fredholm, cuyo índice está dado por*

(5.1) $$\text{Ind } P = m(1-b_1) - \eta(a_m,\Omega).$$

Demostración. Claramente $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ donde $\Omega_1$ y $\Omega_2$ son abiertos simplemente conexos tales que $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ es la reunión de $b_1+1$ abiertos simplemente conexos. Del teorema de Mittag-Leffler ([5] pág. 13, Teorema 1.4.5) se deduce que la sucesión

$$0 \to H(\Omega) \xrightarrow{\varphi_1} H(\Omega_1) \oplus H(\Omega_2) \xrightarrow{\varphi_2} H(\Omega_1 \cap \Omega_2) \to 0,$$

en la cual $\varphi_1(f) = (\sigma^{\Omega}_{\Omega_1}(f), -\sigma^{\Omega}_{\Omega_2}(f))$ y $\varphi_2(f+g) = \sigma^{\Omega_1}_{\Omega_{12}}(f) + \sigma^{\Omega_2}_{\Omega_{12}}(g)$ (si $\Omega' \subseteq \Omega$, $\sigma^{\Omega}_{\Omega'}: H(\Omega) \to H(\Omega')$ es la restricción natural) es exacta. Sean $\mathcal{E}$ el complejo $0 \to H(\Omega) \xrightarrow{P} H(\Omega) \to 0$, $\mathcal{F}$ el complejo $0 \to H(\Omega_1) \oplus H(\Omega_2) \xrightarrow{P_1 \oplus P_2} H(\Omega_1) \oplus H(\Omega_2) \to 0$, y $\mathcal{G}$ el complejo $0 \to H(\Omega_1 \cap \Omega_2) \xrightarrow{P_{12}} H(\Omega_1 \cap \Omega_2) \to 0$; $P_1$, $P_2$ y $P_{12}$ son las restricciones obvias del operador P. De la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathcal{E} & & \mathcal{F} & & \mathcal{G} & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & H(\Omega) & \xrightarrow{\varphi_1} & H(\Omega_1) \oplus H(\Omega_2) & \xrightarrow{\varphi_2} & H(\Omega_1 \cap \Omega_2) & \to & 0 \\
 & & \downarrow P & & \downarrow P_1 \oplus P_2 & & \downarrow P_{12} & & \\
0 & \to & H(\Omega) & \xrightarrow{\varphi_1} & H(\Omega_1) \oplus H(\Omega_2) & \xrightarrow{\varphi_2} & H(\Omega_1 \cap \Omega_2) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

se concluye que la sucesión inducida de complejos,

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

es exacta. La sucesión exacta de cohomología correspondiente es

$$0 \to \mathrm{Ker}P \to \mathrm{Ker}(P_1 \oplus P_2) \to \mathrm{Ker}P_{12} \to \mathrm{Coker}P$$

$$\to \mathrm{Coker}(P_1 \oplus P_2) \to \mathrm{Coker}P_{12} \to 0 \ ,$$

de la cual se deduce que

$$\mathrm{Ind}P = \mathrm{Ind}(P_1 \oplus P_2) - \mathrm{Ind}P_{12} \ .$$

La fórmula (5.1) resulta inmediatamente de esta relación. Como ImP es obviamente cerrada, el teorema está demostrado. ∎

<u>Observación</u> 5.1. Sea $a \in \mathbb{C}$ y sea $\mathcal{O}_a$ el haz de gérmenes de las funciones holomorfas en $a$. Para cada $r > 0$ sea $D_r$ el disco abierto de radio $r$ y centro en $a$. Sea $P(z,\partial/\partial z) = \sum_{k=0}^{m} a_k(z)\partial^k/\partial z^k$ un polinomio diferencial con los $a_k$ holomorfos en $D_r$

para todo $r < r_o$, y en donde $a_m$ tiene en $\underline{a}$ un cero de orden n. Denotemos con $\sigma^r : H_m(D_r) \to \mathcal{O}_a$ a la aplicación que a $f \in H_m(D_r)$ hace corresponder el germen $f_a$ de f en a. Es claro que, para todo $m \geq 0$,

$$\mathcal{O}_a = \lim_{r \to o} \operatorname{ind} H_m(D_r)$$

y

$$\sigma^r = \lim_{s \to o} \operatorname{ind} \sigma_s^r .$$

Es decir, el sistema $(\mathcal{O}_a, \sigma^r)$ es el límite directo del sistema inductivo $(H_m(D_r), \sigma_s^r)$. Sea $P_r : H_m(D_r) \to H_o(D_r)$ el operador diferencial definido por $P(z, \partial/\partial z)$ y sea $P = \lim_{r \to o} \operatorname{ind} P_r$

$$Pf_a = \left( \sum_{k=o}^{m} a_k(z) \partial^k f / \partial z^k \right)_a .$$

Claramente la sucesión

$$0 \to \operatorname{Ker}P \to \mathcal{O}_a \xrightarrow{P} \mathcal{O}_a \to \operatorname{Coker}P \to 0$$

es la sucesión límite inductivo de las sucesiones

$$0 \to \operatorname{Ker}P_r \to H_m(D_r) \xrightarrow{P_r} H_o(D_r) \to \operatorname{Coker}P_r \to 0 ,$$

$r \leq r_o$. Como $\operatorname{Ind} P_r = m-n$ para todo $r \leq r_o$, también

(5.2) $$\operatorname{Ind} P_a = m-n .$$

***

## BIBLIOGRAFIA


[1] Coddington E. and Levinson N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw Hill, New York, 1955.

[2] Duren P.L., *Theory of* $H^p$ *spaces*. Academic Press, New York and London, 1970.

[3] Goldberg S., *Unbounded Linear Operators*. Mc Graw Hill, New York, 1966.

[4] Hoffman K., *Banach Spaces of Analytic Functions*. Prentice Hall, N.J., 1965.

[5] Hörmander L., *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1967.

[6] Mond D., *Sobre la Cohomología Asociada a un Operador Lineal Diferencial Complejo*. Revista Colombiana de Matemáticas, Vol. XIII (1979) 171-192.

[7] Nova L., *Ciertas Propiedades de las Ecuaciones Diferenciales Complejas con Coeficientes Polinómicos*. Revista Colombiana de Matemáticas. Vol. XII (1978) 13-58.

[8] Palais R., *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem*. Annals of Math. Studies 57, 1965.

[9] Rodríguez J., *Ciertas propiedades de regularidad de las ecuaciones diferenciales complejas*. Por aparecer.

[10] Rotman J., *Lectures in Homological Algebra*. Van Nostrand, New York, 1970.

[11] Rudin W., *Function Theory in Polydiscs*. Benjamin, New York, 1967.

[12] Rudin W., *Real and Complex Analysis*. Mc Graw Hill, New York, 1966.


***


*Departamento de Matemáticas y Estadística*
*Universidad Nacional de Colombia*
*Bogotá, Colombia.*



(Recibido en julio de 1976)