Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XIII (1979) págs. 265 - 270

SOBRE LA MEDIDA ESPECTRAL DE OPERADORES ESPECTRALES DE TIPO FINITO*

por

Klaus Gero KALB

En esta nota demostraremos y discutiremos el siguiente resultado.

TEOREMA 1. *Sea* X *un espacio de Banach complejo, sea* $T = S+N$ *donde* $S,N \in \mathcal{L}(X)$, $S = \int_{\mathbb{C}} z\, dP(z)$ *es un operador escalar con la medida espectral* $P(\cdot)$, $N^{n+1} = 0$ *y* $SN = NS$ *(es decir* T *es un operador espectral de tipo a lo sumo* n *con la medida espectral* $P(\cdot)$*). Entonces vale para todo conjunto cerrado* $\alpha \subseteq \mathbb{C}$ *que:*

$$(1) \qquad P(\alpha)X = \bigcap_{z\in\mathbb{C}\setminus\alpha} (T-zI)^k X$$

con $k = n+2$, *y aún con* $k = n+1$ *si* X *es un espacio de Hilbert.*

---

* Esta obra fué terminada durante una estadía en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes en Bogotá (Febrero-Abril de 1979), parcialmente apoyada por COLCIENCIAS.

Para la definición y las propiedades fundamentales de los operadores espectrales véase [3] de donde también sacamos la terminología usada aquí. Nuestra demostración hará ver que (1) también vale con $k=n+2$ cuando S es solamente un operador pre-escalar de una clase $\Gamma \subset X'$, es decir $P(\circ)$ solamente es una medida espectral de clase Γ (véase [2] y [5]). En el caso $n = 0$ el Teorema 1 se especializa a afirmaciones conocidas de Johnson ([4], Theorem 3.2, X espacio de Hilbert, $T = S$ normal), de Putnam ([7], Theorem 1) y de Ptak Vrbova [8].

Es común (véase [3], [2]) describir los rasgos de las proyecciones espectrales de un operador espectral para subconjuntos cerrados $\alpha \subset \mathbb{C}$ mediante el espectro local $\sigma_T(X)$ de T en los puntos x de X:

$$(2) \qquad P(\alpha)X = \{x \in X : \sigma_T(x) \subset \alpha\}$$

Operadores espectrales de tipo finito son ejemplos especiales de operadores escalares generalizados (véase [1]). El Teorema 1 refina en este caso particular la siguiente afirmación más general de Vrbova [9]: *Para todo operador escalar generalizado* $T \in \mathcal{L}(X)$ *existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\{x \in X : \sigma_T(x) \subset \alpha\} = \bigcap_{z \in \mathbb{C} \setminus \alpha} (T-zI)^k X$ *para todo subconjunto cerrado* $\alpha \subset \mathbb{C}$. En este contexto, nótese que (por (2) y [1], Prop. 1.2) el Teorema 1 también puede formularse así:

TEOREMA 1'. *Sea* T *como en el* Teorema 1. *Entonces para todo* $x \in X$ *vale*

$$\sigma_T(x) = \mathrm{cl}(\{z \in \mathbb{C} : x \notin (T-zI)^k X\})$$

es decir, $\mathcal{S}_T(x) = \mathbb{C}\setminus\sigma_T(x) = \operatorname{int}(\{z\in\mathbb{C}: x\in(T-zI)^kX\})$.

<u>Demostración del Teorema 1</u>. Suponga primero que X es un espacio de Banach.

(i) Sea $x\in\bigcap_{z\in\mathbb{C}\setminus\alpha}(T-zI)^{n+2}X$. Demostramos que $<P(\mathbb{C}\setminus\alpha)x,x'> = 0$ para todo $x'\in X'$. Sea x' fijo y $\mu := <P(\cdot)x,x'>$. Basta mostrar que $\mu(J) = 0$ para toda célula $J = (\alpha,\beta]\times(\gamma,\delta]$ con $\overline{J}\subset\mathbb{C}\setminus\alpha$. Sea J tal célula. Escoja (mediante una descuartización sucesiva) una sucesión decreciente $J_o\supset J_1\supset\ldots$ de células tal que $J_o = J$, $\operatorname{diam}(J_k)\leqslant 2^{-k}\cdot\operatorname{diam}(J)$ y $|\mu(J)| \leqslant 4^k\,|\mu(J_k)|$ para $k = 1,2,\ldots$ Entonces existe $z_o\in\mathbb{C}\setminus\alpha$ tal que $\bigcap_{k=o}^{\infty}\overline{J}_k = \{z_o\}$. Por la hipótesis sobre x existe $x_o\in X$ tal que $x = (T-z_oI)^{n+2}x_o$. Puesto que $N^{n+1} = 0$, para todo conjunto de Borel $\beta\subset\mathbb{C}$ vale:

$$\mu(\beta) = <P(\beta)x,x'> = <P(\beta)(T-z_oI)^{n+2}x_o,x'>$$
$$= <P(\beta)(S-z_oI+N)^{n+2}x_o,x'>$$
$$= <P(\beta)\sum_{i=2}^{n+2}\binom{n+2}{i}(S-z_oI)^iN^{n+2}x_o,x'>$$
$$= \sum_{i=2}^{n+2}\binom{n+2}{i}\int_{\beta\setminus\{z_o\}}(z-z_o)^i<P(dz)N^{n+2-i}x_o,x'>.$$

Poniendo $v_i := \operatorname{var}<P(\cdot)N^{n+2-i}x_o,x'>$, $i = 2,\ldots,n+2$, se obtiene para $k = 1,2,\ldots$:

$$|\mu(J)| \leqslant 4^k|\mu(J^k)|$$
$$\leqslant 4^k\sum_{i=2}^{n+2}\binom{n+2}{i}\operatorname{diam}(J_k)^i v_i(J_k\setminus\{z_o\})$$
$$\leqslant \sum_{i=2}^{n+2}\binom{n+2}{i}2^{2k-ki}v_i(J_k\setminus\{z_o\}).\operatorname{diam}(J)^i$$
$$\leqslant \sum_{i=2}^{n+2}\binom{n+2}{i}v_i(J_k\setminus\{z_o\}).\operatorname{diam}(J)^i\ .$$

Puesto que $\lim_{k\to\infty} v_i(J_k \setminus \{z_o\}) = 0$ para $i = 2,\ldots,n+2$, se concluye $\mu(J) = 0$.

(ii) Sea $x \in P(\alpha)X$ y $z \in \mathbb{C}\setminus\alpha$. Puesto que $\sigma(T|_{P(\alpha)X}) \subset \overline{\alpha} = \alpha$ (véase [3]), $(T-zI)|_{P(\alpha)X}$ es particularmente un isomorfismo algebráico de $P(\alpha)X$ sobre si mismo; luego $x \in (T-zI)^{n+2}X$.

Sea X ahora un espacio de Hilbert. Entonces con el mismo argumento de (ii) se concluye que $P(\alpha)X \subset \bigcap_{z\in\mathbb{C}\setminus\alpha}(T-zI)^{n+1}X$. Para la demostración de la inclusión conversa se puede proceder como sigue: Primero, el producto escalar de X se puede substituír por un producto escalar equivalente con respecto al cual S es un operador normal (véase [2], Th. 8.3); N y T no son afectados por este cambio. Entonces $P(\cdot)$ es la medida espectral autoadjunta de S. Sea ahora $x \in \bigcap_{z\in\mathbb{C}\setminus\alpha}(T-zI)^{n+1}X$. Hay que ver que $\|P(J)x\| = 0$ para toda célula J con $\overline{J} \in \mathbb{C}\setminus\alpha$. Esto se concluye como arriba usando una sucesión de células $J_o \supset J_1 \supset \ldots$ con $J_o = J$, $\operatorname{diam}(J_k) \leqslant 2^{-k}\operatorname{diam}(J)$ y $\|P(J)x\| \leqslant 2^k\|P(J_k)\|$ para $k = 1,2,\ldots$ Tal sucesión existe puesto que $\|P(\cdot)x\|^2$ es ahora una medida de Borel positiva sobre $\mathbb{C}$. ∎

NOTA 2. *Si* X *es un espacio de Banach, la potencia* $k = n+2$ *en la fórmula* (1) *generalmente no se puede mejorar.*

<u>Demostración</u>. Con este fin, considérese el siguiente ejemplo. Sea $D = \{z : |z| \leqslant 1\}$, $X = L^1(D)$, $T = S : x(z) \mapsto z.x(z)$, $N = 0$. Entonces T es un operador escalar con la medida espectral $P(\beta):x(z) \mapsto \chi_\beta(z).x(z)$ ($\beta \subset \mathbb{C}$ conjunto de Borel). Ponga $\alpha := \{z : |z| \geqslant \frac{1}{2}\}$. Sea 1 la función constante $z \mapsto 1$.

Entonces se tiene $1 \notin P(\alpha)X$, sin embargo $1 \in \bigcap\limits_{|\lambda|<\frac{1}{2}} (\lambda-\lambda I)X$, puesto que para todo $|\lambda| < \frac{1}{2}$ la función $z \mapsto 1/(z-\lambda)$ es integrable sobre D. ■

NOTA 3. *La fórmula (1) generalmente no vale para operadores espectrales de tipo infinito.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach abstracto, sea $N \in \mathcal{L}(X)$ quasinilpotente pero no nilpotente. Ponga $T = N$, es decir $S = 0$. Entonces se tiene para todo conjunto de Borel $\beta \subset \mathbb{C}$;

$$P(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } 0 \notin \beta \\ I & \text{cuando } 0 \notin \beta . \end{cases}$$

Supongamos que la fórmula (1) valga para un subconjunto cerrado $\alpha \subset \mathbb{C}$ con $0 \notin \alpha$. Entonces se cumple (puesto que $\sigma(T) = \{0\}$):

$$N^k X = N^k X \cap X = \bigcap_{z \in \mathbb{C} \setminus \alpha} (N-zI)^k X = P(\alpha)X = \{0\},$$

es decir $N^k = 0$. Contradicción. ■

Para finalizar, queremos anotar que la teoría de los operadores espectrales T de tipo finito (lo mismo que la teoría de operadores normales en un espacio de Hilbert) se puede fundamentar en los métodos de la teoría de medida e integración si se usa la fórmula (1) (en vez de la fórmula (2) como en [3]); particularmente el Teorema de soporte, el Teorema de comutatividad (Fuglede's theorem), la unicidad de la descomposición de Jordan de T y las afirmaciones $\sigma_P(T) = \{\lambda : P(\{\lambda\}) \neq 0\}$, $\sigma_R(T) = \Phi$ pueden ser reducidos a (1) (véase [5] y [6]).

BIBLIOGRAFIA

[1] I.Colojoara and C. Foiaş, *Theory of generalized spectral operators*. New York: Gordon and Breach 1968.

[2] H.R.Dowson, *Spectral theory of linear operators*. London: Academic Press 1978.

[3] N.Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators III*. New York: Wiley-Interscience 1971.

[4] B.E. Johnson, *Continuity of linear operators commuting with continuous linear operators*. Trans. Amer. Math. Soc. 128 (1967), 88-102.

[5] K.G.Kalb, *Selbstadjungierte Opetatoren als "Dual rein atomare" Skalaroperatoren*. Math. Ann. 232 (1978), 121-130.

[6] K.G.Kalb, *Teoría espectral en espacios de Banach*. Conferencias de un seminario. Universidad de los Andes, Bogotá, 1979.

[7] C.R. Putman, *Ranges of normal and subnormal operators*. Michigan Math. J. 18 (1971), 33-36.

[8] V.Ptak and P.Vrbová, *On the spectral function of a normal operator*. Cz. Math. J. 23 (1973), 615-616.

[9] P.Vrbová, *Structure of the maximal spectral spaces of generalized scalar opetarors*. Cz. Math. J. 23 (1973), 493-496.

***

Fachbereich Mathematik
der Universität
D 6500 Mainz
República Federal de Alemania.

(Recibido en Mayo de 1979).