Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XIII (1979), pág. 271 - 310

CONTINUIDAD DE POLINOMIOS EN ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS*

por

Guillermo RESTREPO S.

§1. INTRODUCCION. El estudio de polinomios en espacios de Banach fué iniciado en 1935 por S. Mazur y N. Orlicz en [1] y continuado luego por A. Alexiewicz y Orlicz en [2] en 1953. El tema cobra interés a raíz de los problemas que surgen en relación con el estudio de las funciones analíticas en espacios de Banach y la aproximación de funciones continuas por polinomios. En relación con el problema de aproximación, J. Kurzweil demuestra que $x \mapsto \|x\|$ no es el límite uniforme de polinomios so

---

* Este artículo es la versión escrita de una conferencia dictada en la Universidad de los Andes, en un Seminario de Análisis Funcional en conmemoración del trigésimo aniversario de su fundación (Octubre de 1978).

bre acotados en ciertos espacios, lo que demuestra que el teorema de Stone-Weierstrass no es válido en dimensión infinita [3]. En un libro reciente, J. B. Prolla [4] da cuenta de los avances realizados hasta el momento en la teoría de aproximación de funciones con valores vectoriales.

Nuestro propósito fundamental en este artículo es analizar la continuidad de los polinomios abstractos en la topología inicial τ_{in} y en la topología débil τ_{db}. Este estudio tiene interés en problemas de aproximación de funciones por polinomios de tipo finito introducidos por el autor en [5].

§2. POLINOMIOS ABSTRACTOS.

A. <u>Polinomios y formas multilineales.</u> Sean E_1, $E_2,\ldots,E_n$ y F espacios vectoriales sobre K. Una función

$$F\colon E_1\times E_2\times\ldots\times E_n \to F$$

es *multilineal* si es lineal en cada variable separadamente. Es decir, si

$$x \mapsto f(a_1,a_2,\ldots,x,\ldots a_n)$$

de E_k en F es lineal para todo $a_i \in E_i$, $i \neq k$.

Nos interesa solamente el caso $E_i = X$ para todo i. Denotaremos por $\mathcal{L}^n(X,Y)$ al conjunto de todas las formas multilineales de orden n. Un *polinomio homogéneo de grado* n de X en Y es una función

$$p : X \to Y,\quad p(x) = \underbrace{f(x,x,\ldots,x)}_{n\ \text{veces}}$$

donde f es una forma multilineal de grado n. Si definimos

$$\gamma : X \to X^n, \quad \gamma(x) = \underbrace{(x,x,\ldots,x)}_{n \text{ veces}}$$

entonces $p = f\gamma$. Los polinomios de grado cero de X en Y son las funciones constantes $p(x) = a$ para todo $x \in X$. Los polinomios de grado uno son las funciones lineales de X en Y.

Un *polinomio de grado* n de X en Y es una función $p : X \to Y$ de la forma

$$(1) \qquad p = p_o+p_1+p_2+\ldots+p_n \qquad (p_n \neq 0)$$

donde p_k $(k = 0,1,\ldots,n)$ es un polinomio homogéneo de grado k. He aquí unos ejemplos:

1. *Polinomios en* $X = \mathbb{R}$ (reales). Si f es una forma multilineal de grado h entonces,

$$\begin{aligned}\underbrace{f(x,x,\ldots,x)}_{h \text{ veces}} &= f(x\cdot 1,x\cdot 1,\ldots,x\cdot 1)\\ &= x^h \underbrace{f(1,1,\ldots,1)}_{h \text{ veces}} = a_h\ x^h\end{aligned}$$

donde $a_h = f(1,1,\ldots,1)$. Por tanto un polinomio p se podría escribir como

$$p(x) = a_o+a_1x+\ldots+a_nx^n \qquad (a_n \neq 0).$$

2. *Polinomios en* K^n (K es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Los polinomios usuales de grado h en K^n son de la forma

$$p(x) = p(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{|\alpha|\leq h} a_\alpha x^\alpha$$

donde $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ es una sucesión finita de enteros, $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ y

$$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n; \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} .$$

Demostremos, en primer lugar, que todo polinomio usual es un polinomio abstracto. Si escribimos

$$p_r(x) = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha x^\alpha$$

entonces $P(x) = p_o(x)+p_1(x)+\ldots+p_h(x)$ y todo se reduce a demostrar que $p_r(x)$ proviene de una forma multilineal de grado r. Ahora, el polinomio x_1^s es generado por la forma de grado s

$$f(z_1,z_2,\ldots,z_s) = u_i(z_1)u_i(z_2)\ldots u_i(z_s)$$

donde $u_i(y) = y_i$. Por tanto $x_i^s x_j^t$ es generado por

$$h(z_1,\ldots,z_s,z_1',\ldots,z_t') = f(z_1,\ldots,z_s)g(z_1',\ldots,z_t')$$

. . . .

donde g es la forma que genera a x_j^t. Claramente h es una forma multilineal de grado s+t. Ahora se ve cómo es posible generar x de una forma multilineal.

Recíprocamente, todo polinomio abstracto de grado n se puede considerar como un polinomio usual. Bastaría escoger una base $e_1,e_2,\ldots,e_n$, escribir $x = \sum x_i e_i$ y calcular $f(\underbrace{x,x,\ldots\ldots,x}_{r \text{ veces}})$. Por ejemplo, un polinomio homogéneo de grado 2 en K^n sería

$$p_2(x) = f(\sum x_i e_i, \sum x_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

donde $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.

B. Polinomios y formas multilineales simétricas. Sea P(x) un polinomio homogéneo de grado r generado por la forma multilineal f. Entonces

$$p(x) = f(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{r \text{ veces}})$$

Definamos ahora la forma multilineal

$$(2) \qquad g(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)})$$

donde σ recorre el conjunto de las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, r\}$. Entonces g es una forma multilineal puesto que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r) \mapsto f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)})$$

es una r-forma para cada permutación σ. Además, g es una forma multilineal simétrica puesto que

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_r) = g(x_{\beta(1)}, x_{\beta(2)}, \ldots, x_{\beta(r)})$$

para toda permutación β. Finalmente,

$$g(x, x, \ldots, x) = f(x, x, \ldots, x) = p(x)$$

Hemos así demostrado que

PROPOSICION (i) *Todo polinomio homogéneo de grado* r *es generado por una* r-*forma simétrica.*

C. Operaciones algebraicas. Si p(x) y q(x) son polinomios de X en Y, entonces

$$(3) \qquad h(x) = p(x) + q(x)$$

es un polinomio. En efecto, si

$$p = p_o+p_1+\ldots+p_n, \qquad q = q_o+q_1+\ldots+q_n$$

entonces,

$$h = (p_o+q_o)+(p_1+q_1)+\ldots+(p_n+q_n).$$

Basta entonces demostrar que la suma de polinomios homogéneos de grado r es un polinomio de grado r. Suponiendo entonces que p es homogéneo de grado r generado por la r-forma f y que q también es homogéneo de grado r generado por la r-forma g, es claro que p+q es un polinomio homogéneo de grado r generado por la r-forma f+g. Por supuesto, si p es generado por f entonces λp es generado por λf, así que si p es un polinomio, entonces λp es un polinomio para todo $\lambda \in K$.

En general, no podemos definir el producto de dos polinomios, a menos que en Y se defina un "producto". $(y,y') \mapsto y\circ y'$. En forma precisa, un *producto en* Y sería una forma bilineal.

$$\Phi : Y\times Y \to Y, \qquad \Phi(y,y') = y\circ y'.$$

Supongamos que en Y se define un producto y sean p y q polinomios de X en Y de grados r y s respectivamente. Si p es generado por la r-forma f y q es generado por la s-forma g entonces la (r+s)-forma

$$(4) \qquad \varphi(x_1,\ldots,x_n,x_{r+1},\ldots,x_{r+s})$$
$$= \Phi(f(x_1,\ldots,x_r),\ g(x_{r+1},\ldots,x_{r+s}))$$

genera el polinomio $h(x) = p(x)\circ q(x)$ definido por

$$(5)\qquad p(x)\cdot p(x) = h(x) = (\underbrace{x,\ldots,x}_{r\text{ veces}},\underbrace{x,\ldots\ldots,x}_{s\text{ veces}})$$

$$= \Phi(f(\underbrace{x,\ldots,x}_{r}),\ g(\underbrace{x,\ldots\ldots,x}_{s}))$$

Es fácil demostrar que el Φ-producto de dos polinomios es asociativo y conmutativo si $\Phi(y,y') = y\cdot y'$ es asociativo y conmutativo.

Un caso especial de Φ-productos ocurre cuando $Y = K$ y $\Phi(a,b) = a\cdot b$ es el producto usual en K. Más generalmente, si Y es una álgebra el producto usual $(a,b)\mapsto a\cdot b$ permite definir multiplicación de polinomios. El producto general de polinomios se define por

$$(6)\qquad \left(\sum_{i=o}^{n} p_i\right)\left(\sum_{j=o}^{m} q_j\right) = \sum_{i,j} p_i q_j \ .$$

D. <u>Los operadores</u> Δ_h. Suponemos que X,Y son espacios vectoriales sobre K. Para toda función $\varphi: X \to Y$ definimos la función $\Delta_h\varphi$ así:

$$(7)\qquad (\Delta_h\varphi)(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x)$$

Es fácil ver que el operador Δ_h es lineal para todo h, esto es,

$$\Delta_h(\varphi+\Psi) = \Delta_h(\varphi)+\Delta_h(\Psi),\quad \Delta_h(\lambda\varphi) = \lambda\Delta_h(\varphi).$$

Si $x_1,x_2,\ldots,x_n \in X$ podemos definir lo que denominamos una n-*sima diferencia* de una función φ; inductivamente:

(8) $\quad \Delta_{x_n}\Delta_{x_{n-1}}\cdots\Delta_{x_1}\varphi = \Delta_{x_n}(\Delta_{x_{n-1}}\cdots\Delta_{x_1}\varphi)$

Por ejemplo, una diferencia de orden 2 sería

$$(\Delta_{x_2}\Delta_{x_1}\varphi)(x) = \Delta_{x_2}(\Delta_{x_1}\varphi(x)) = \Delta_{x_2}[\varphi(x+x_1) - \varphi(x)]$$

$$= \varphi(x+x_1+x_2)-\varphi(x+x_1)-\varphi(x+x_2)+\varphi(x) \; ;$$

y una diferencia de orden 3 sería

$$\begin{aligned}(\Delta_{x_3}\Delta_{x_2}\Delta_{x_1}\varphi)(x) &= \varphi(x+x_1+x_2+x_3)-\varphi(x+x_1+x_2)\\ &-\varphi(x+x_1+x_3)+\varphi(x+x_1)\\ &-\varphi(x+x_2+x_3)+\varphi(x+x_2)\\ &+\varphi(x+x_3)-\varphi(x) \; .\end{aligned}$$

Los cálculos anteriores nos hacen ver que no importa el orden en que se lleven a cabo las sucesivas diferencias.

Así, por ejemplo $\Delta_{x_2}\Delta_{x_1}\varphi = \Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\varphi$, $\Delta_{x_3}\Delta_{x_2}\Delta_{x_1}\varphi = \Delta_{x_1}\Delta_{x_3}\Delta_{x_2}\varphi$. En general,

(9) $\quad \Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\cdots\Delta_{x_n} = \Delta_{x_{\sigma(1)}}\Delta_{x_{\sigma(2)}}\cdots\Delta_{x_{\sigma(n)}}$

para toda permutación σ de $\{1,2,\ldots,n\}$. Así mismo, podemos afirmar que toda diferencia de orden n es la suma de 2^n funciones de la forma

(10) $\quad x \mapsto (-1)^{n-p}\varphi(x+x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_p})$

donde $(i_1 i_2 \ldots i_p)$ es una sucesión estrictamente creciente definida en $\{1,2,\ldots,p\}$, $0 \leq p \leq n$; entendiéndose que si $p = 0$ entonces debe escribirse $x \mapsto (-1)^n \varphi(x)$.

E. <u>Diferencias n-sima de polinomios</u>. Sea p un polinomio de grado n,

$$p = p_o + p_1 + \ldots + p_n \qquad (p_n \neq 0) .$$

Suponemos además que p_n es generado por una n-forma simétrica f:

$$p_n(x) = f(\underbrace{x,x,\ldots,x}_{n \text{ veces}})$$

En primer lugar demostraremos que

PROPOSICION (ii). $\Delta_h p$ *es un polinomio de grado a lo sumo* (n-1) *para todo* $h \in X$.

Si $n = 1$ la proposición es evidentemente cierta ya que $p = p_o + p_1$, p_o es constante y p_1 es lineal, así que

$$(\Delta_h p)(x) = p_o(x+h) - p_o(x) + p_1(x+h) - p_1(x) = p_1(h),$$

esto es, $\Delta_h p$ es un polinomio de grado cero. Supongamos que la proposición es cierta si el grado de p es menor que n. Por la linealidad de Δ_h ,

$$\Delta_h p = \Delta_h(p_o + p_1 + \ldots + p_{n-1}) + \Delta_h p_n$$

Por la hipótesis de inducción $\Delta_h(p_o + \ldots + p_{n-1})$ es un polinomio de grado a lo sumo (n-2). Ahora,

$$\Delta_h p_n = p_n(x+h) - p_n(x) = f(x+h, x+h, \ldots x+h) - f(x, x, \ldots, x)$$

Téngase en cuenta que f es una n-forma simétrica. Por tanto, al desarrollar la expresión a la derecha aparecen el término $f(x,x,\ldots,x)$ y n términos de la forma $f(x,h,x,\ldots,x)$ que son iguales a $f(x,x,\ldots,x,h)$ (x(n-1)veces). Por tanto,

$$(11) \qquad \Delta_h p_n(x) = nf(x,x,\ldots,x,h) + q(x,h)$$

donde $q(x,h)$ es un polinomio en x de grado a lo sumo (n-2) y $f(x,x,\ldots,x,h)$ es un polinomio de grado a lo sumo (n-1). Hemos así demostrado la proposición (ii). ■

Calculemos ahora una diferencia de orden n de un polinomio de grado n. Sea f una n-forma simétrica que genera a p_n. Por inducción demostraremos que

$$(12) \qquad \Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\ldots\Delta_{x_n} p = n!f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Supongamos que (12) es cierta si $1 \leqslant \text{grad } p \leqslant (n-1)$. Sea $T = \Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\ldots\Delta_{x_{n-1}}$ y escribamos

$$\Delta_{x_n} p = \Delta_{x_n}(p_o + p_1 + \ldots + p_{n-1}) + \Delta_{x_n} p_n$$

Como $\Delta_{x_n}(p_o + \ldots + p_{n-1})$ es de grado $\leqslant (n-2)$ en virtud de la proposición (ii), se concluye que

$$T(\Delta_{x_n}(p_o + p_1 + \ldots + p_{n-1})) = 0$$

por hipótesis de inducción. Por tanto,

$$T\,\Delta_{x_n} p = \Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\cdots\Delta_{x_n} p = T\,\Delta_{x_n} p_n .$$

Ahora, en virtud de (11),

$$\Delta_{x_n} p_n = nf(x,x,\ldots,x_n) + q(x,x_n)$$

donde $f(x,\ldots,x,x_n)$ es un polinomio de grado $\leq (n-1)$ y $q(x,x_n)$ es un polinomio en x de grado $\leq (n-2)$. Por la hipótesis de inducción nuevamente se concluye que

$$T\,\Delta_{x_n} p_n = n(n-1)!f(x_1 . x_2,\ldots,x_{n-1},x_n)$$

y en consecuencia,

$$T\Delta_{x_n} p_n = \Delta_{x_1}\cdots\Delta_{x_{n-1}}\Delta_{x_n} p = n!f(x_1,\ldots,x_n).$$

F. <u>Descomposición única de polinomios</u>. En primer lugar,

PROPOSICION (iii). *Un polinomio homogéneo de grado* n *es generado por una y sólo una* n-*forma simétrica.*

En efecto, si p es homogéneo de grado n, existe por lo menos una n-forma simétrica f que lo genera (Prop.(i), sección 2(B)) y f es única en virtud de (12).

Supongamos ahora que p es un polinomio de grado n que se escribe de dos maneras

$$p = p_o+p_1+\ldots+p_n = p_o'+p_1'+\ldots+p_n'$$

entonces podemos afirmar que $p_i = p_i'$ para todo i. Es decir,

PROPOSICION (iv). *Un polinomio* p *se puede escribir de una y sólo una manera como suma de polinomios homogéneos.*

La demostración es por inducción. Si n = 0 la proposición es verdadera pues p_o y p_o', son funciones constantes. Suponiendo que es verdadera para (n-1), observemos que por (12) p_n y p_n' son generados por la misma n-forma f, así que $p_n = p_n'$. Por tanto

$$p_o+p_1+\dots+p_{n-1} = p_o'+p_1'+\dots+p_{n-1}'$$

y por la hipótesis de inducción $p_i = p_i'$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$. ■

§3. CONTINUIDAD DE POLINOMIOS EN LA TOPOLOGIA INICIAL. En esta Sección suponemos que X,Y son espacios vectoriales topológicos sobre K, donde K es $\mathbb{R}$ (reales) ó $\mathbb{C}$ (complejos).

A. Continuidad en el origen. Sean X,Y espacios vectoriales topológicos sobre K. Es bien sabido que

Si $p : X \to Y$ *es un polinomio de grado uno entonces* p *es continuo si y sólo si* p *es continuo en el origen.*

Esta proposición es consecuencia de la linealidad de p, pues $p(x+h)-p(x) = p(x)+p(h)-p(x) = p(h)$. En general, la proposición anterior es cierta para polinomios de cualquier grado. Pero antes de demostrar esta proposición general, debemos hacer algunas consideraciones sobre continuidad de polinomios. En primer lugar, el estudio de la continuidad de los polinomios en el origen se reduce al estudio de la continuidad de los polinomios homogéneos, en virtud de la proposición siguiente:

PROPOSICION (i). *El polinomio* $p = p_o+p_1+\ldots+p_n$ *de grado* n *es continuo en el origen si y sólo si cada* p_k *es continuo en el origen.*

Por supuesto, si cada p_k es continuo en el origen entonces p es continuo en el origen. La demostración de la recíproca es un poco más difícil y depende de la proposición auxiliar siguiente:

(*) *Si* p *es continuo en el origen, entonces* p_n *es continuo en el origen.*

Suponiendo (*) uno procede por inducción para demostrar (i). Si (i) es cierta para polinomios de grado $\leqslant(n-1)$, entonces

$$q = p-p_n = p_o+p_1+\ldots+p_{n-1}$$

sería un polinomio de grado $(n-1)$ continuo en el origen. Por la hipótesis inductiva $p_o,p_1,\ldots,p_{n-1}$ serían continuos en el origen. Debemos, pues demostrar (*). Sea f la n-forma simétrica que genera a p_n. En virtud de (12), §2 (E), podemos escribir.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{1}{n!}\Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\ldots\Delta_{x_n}p(0)$$

ya que $\Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\ldots\Delta_{x_n}p$ es una función constante. Además

$$\Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\ldots\Delta_{x_n}p(0)$$

es la suma de 2^n expresiones de la forma

$$(-1)^{n+p}p(x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_p})$$

(ver (10), § 2 (D), con x = 0). Cada una de estas funciones es continua en u=(0,0,...,0) si p es continuo en el origen, puesto que

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mapsto x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_p}$$

es una función continua de X^n en X si X es un espacio vectorial topológico. ∎

En realidad, lo que hemos demostrado es que la n-forma $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ es continua en u = (0, ...,0). Pero, en general

PROPOSICION (ii). *Una r-forma* φ *es continua en* u = (0,...,0) *si y sólo si el polinomio homogéneo que genera es continuo en el origen.*

Ya que $p_r = \varphi.\gamma$, $r\mapsto\gamma(x) = (x,\ldots,x)$ (r veces x) es una función lineal continua de X en X^r. Ahora demostraremos:

PROPOSICION (iii). *Un polinomio* $p : X \to Y$ *es continuo en el origen si y sólo si es continuo en cada punto.*

Podemos suponer que p es homogéneo de grado n. Sea

φ la n-forma que genera a p y supongamos que p es continuo en $x = 0$. Sea $x_o \in X$. Entonces podemos escribir para todo $h \in X$

$$\begin{aligned} p(x_o+h) &= \varphi(x_o+h, x_o+h, \ldots, x_o+h) \\ &= \varphi(x_o, x_o, \ldots, x_o) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \varphi(\underbrace{x_o, x_o, \ldots, x_o}_{n-k}, \underbrace{h, h, \ldots, h}_{k}). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$p(x_o+h)-p(x_o) = \sum_{k=1}^{n} \binom{h}{k} (\underbrace{x_o, \ldots, x_o}_{n-k}, \underbrace{h, \ldots, h}_{k}).$$

La continuidad de

$$(h_1, h_2, \ldots, h_k) \mapsto \varphi(x_o, \ldots, x_o, h_1, h_2, \ldots, h_k)$$

en $(0, 0, \ldots, 0)$ garantiza la continuidad de p en x_o. En efecto, si W es una vecindad de cero en Y, sea W' tal que $W'+W'+\ldots+W'$ (n veces) $\subseteq W$. Para cada k existe $V_k(0)$ en X tal que

$$h \in V_k \quad \text{implica} \quad \binom{n}{k} \varphi(\underbrace{x_o, \ldots, x_o}_{n-k}, \underbrace{h, \ldots, h}_{k}) \in W'.$$

Sea $V = \bigcap_k V_k$. Entonces $h \in V$ implica $p(x_o+h)-p(x_o)$ está en W. Hemos así demostrado (iii). ∎

B. Continuidad uniforme sobre acotados. Demostraremos en primer lugar,

PROPOSICION (iv). *Si* $p : X \to Y$ *es continuo en el origen, entonces* p *es uniformemente continuo en todo subconjunto acotado de* X, *donde* X *y* Y *son es* *pacios vectoriales topológicos sobre* K.

Para demostrar esta proposición, sea $A \subset X$ acotado y sea φ la r-forma multilineal que genera a p. Sean x, x' elementos de A. Entonces,

$$(*) \qquad p(x)-p(x') = \varphi(x,x,\dots,x)-\varphi(x'x',\dots,x')$$
$$= \varphi(x-x',x,\dots,x)+\varphi(x',x-x',x,\dots,x)+\varphi(x',x',x-x',x,\dots,x)$$
$$+\dots+\varphi(x',x',\dots,x',x-x').$$

Sea $W = W(0)$ una vecindad de 0 en Y. Entonces existe una vecindad $V' = V'(0)$ en X y una vecindad $W'(0)$ en Y tales que

$$(V'\times V'\times\dots\times V') \subseteq W', \qquad W'+W'+\dots+W' \subseteq W.$$

Como A es acotado, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda A \subseteq V'$. Sea $V = \lambda^{r-1}V'$. Sean ahora x y x' en X tales que

$$x,\ x' \in A, \qquad x-x' \in V\ ,$$

entonces $x-x' = \lambda^{r-1}z$, $z \in V'$ y por tanto

$$\varphi(x-x',x,\dots,x) = \varphi(z,\lambda z,\dots,\lambda x) \in W'$$

ya que $(z, \lambda x,\dots,\lambda x) \in V'\times V'\times\dots\times V'$. En forma similar se demuestra que $\varphi(\dots) \in W'$ para cualquiera de los sumandos aparecen en la expresión (*). Por consiguiente, hemos demostrado que

$$p(x)-p(x') \in \underbrace{W'+W'+\dots+W'}_{r \text{ veces}} \subseteq W$$

cada vez que $x,x' \in A$ y $x-x' \in V$. En suma, p es uniformemente contínuo en A. ∎

La recíproca de la proposición (iv) no es verdadera como lo demuestra el siguiente contrajemplo. Consideremos el operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido por

$$T(e_n) = \frac{e_n}{n}, \quad T(\sum x_i e_i) = \sum x_i T(e_i).$$

Definimos la forma bilineal $\varphi : \ell^2 \to R$, $\varphi(x,y) = \langle Tx,Ty\rangle$ que general el polinomio de grado 2, $p(x) = \langle Tx,Tx\rangle = \|Tx\|^2$. Ahora, ℓ^2 con la topología débil es un espacio vectorial topológico que denotamos con X y $p : X \to \mathbb{R}$ es uniformemente continuo sobre acotados ya que $T : \ell^2 \to \ell^2$ es un operador compacto (ver la proposición (ii), §4 (G)). Demostremos que p no es continuo en el origen. Si lo fuera, existiría una vecindad V(0) tal que $|p(x)| < 1$ para todo $x \in V$. Sean $u_1, u_2, \ldots, u_h$ y $\delta > 0$ tales que $V = \{x : |u_k \cdot u| < \delta\}$ $(k = 1,2,\ldots,h)$. Entonces $|u_i \cdot x| < \delta$ $(i = 1,2,\ldots,h)$ implica $|p(x)| < 1$. Sea $x \in \bigcap_i \mathrm{Ker}(u_i)$, $x \neq 0$. Entonces para todo $\lambda > 0$

$$|p(\lambda x)| = \lambda^2 |p(x)| < 1, \quad |p(x)| < 1/\lambda^2$$

y por consiguiente $p(x) = 0$. Este es una contradicción ya que $p(x) \neq 0$ si $x \neq 0$.

En ciertos casos la recíproca de la proposición (iv) si es verdadera. Por ejemplo, si la topología de X admite una vecindad acotada de cero entonces toda función continua sobre acotados es continua en $x = 0$. Supongamos que A es una vecindad acotada de cero, $f : X \to Y$ continua al restringirla a todo acotado. Entonces, dada la vecindad

W(0) en Y existe V'(0) en X tal que $f(V' \cap A) \subset W$. Sea $V = V' \cap A$. Entonces $f(V) \subset W$ y f es continua en x = 0. Por supuesto, los espacios normados son los únicos que admiten vecindades acotadas de cero entre los espacios localmente convexos.

C. Polinomios en espacios normados. En general podemos afirmar que

PROPOSICION (v). *Si* X,Y *son* E.V.T. *y* $p : X \to Y$ *es un polinomio continuo, entonces* p *transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.*

Si p es homogeneo de grado r entonces $p(\lambda x) = \lambda^r p(x)$. Sea $A \subset X$ acotado, B = p(A) y W = W(0) en Y. Entonces existe V(0) = V en X tal que $p(V) \subseteq W$. Sea λ tal que $\lambda A \subseteq V$. Entonces $p(\lambda A) = \lambda^r p(A) \subseteq p(V) \subseteq W$ y B es acotado. ∎

La recíproca de (v) no es cierta en general. Por ejemplo, sea $X = \ell^2$ con la topología débil, $Y = \ell^2$ con la topología de la norma. Entonces $p : X \to Y$, $p(x) = x$ para todo x, transforma acotados en acotados pero no es continuo. Sin embargo para espacios normados se tiene:

PROPOSICION (vi). *Sea* $p : X \to Y$ *un polinomio,* X *un espacio normado,* Y *un* E.V.T. *Entonces* p *es continuo si y sólo si* p *es acotado.*

La demostración de (vi) es por inducción. Es claramente cierta si p es un polinomio de grado cero. Supongamos que es cierta para polinomio de grado $\leq (n-1)$. Escribamos

$$p = p_0+p_1+\ldots+p_n, \qquad q = p-p_n$$

Sea φ la n-forma que genera a p_n. Entonces podemos escribir (ver (12) §2 (E)).

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{1}{n!}\,\Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\ldots\Delta_{x_n}p(x).$$

Ahora, la n-sima diferencia de p se puede escribir como la suma de 2^n expresiones de la forma

$$(-1)^{n-k}p(x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_k})$$

puesto que $\Delta_{x_1}\ldots\Delta_{x_n}p(x) = \Delta_{x_1}\ldots\Delta_{x_n}p(0)$ para todo x (ver (10), §2 (D)). Ahora, si $A\subset X$ es acotado entonces cada función de este tipo transforma A^n en un conjunto acotado en Y. Hemos así demostrado que $\varphi(A^n)$ es acotado si A es acotado. En particular, sea $A = \{x : \|x\| \leqslant 1\}$ y sea $W = W(0)$ una vecindad de cero en Y. Como $H = \varphi(A^n)$ es acotado, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda H \subseteq W$. Sea $V = (\sqrt[n]{\lambda})A$. Entonces

$$(V\times V\times\ldots\times V) = \lambda\varphi(A^n) \subseteq W$$

lo que demuestra que φ es continua. Por tanto p_n es continuo en $x = 0$. Por la hipótesis de inducción $q = p-p_n$ es continuo en $x = 0$. Luego $p=q+p_n$ es continuo en $x = 0$. ∎

D. <u>Polinomios en $K^h = X$</u>. En general, sea X un E.V.T. de dimensión finita sobre K. Entonces X es K^h. Si $e_1,e_2,\ldots e_h$ es una base de X, todo x se escribe como

$$x = x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_he_h$$

Si p_r es un polinomio homogêneo de grado r y φ_r es la r-forma que lo general entonces

$$p_r(x) = \varphi(\underbrace{x,x,\ldots,x}_{r \text{ veces}}) = \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(r)}\ \varphi(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(r)})$$

donde σ es una función $\{1,2,\ldots,r\}$ en $\{1,2,\ldots,h\}$. Por tanto p_r es acotado. Podemos concluir entonces:

PROPOSICION (vii). *Todo polinomio* $p : K^h \to Y$ *es acotado y por tanto continuo.*

§4. CONTINUIDAD DE POLINOMIOS EN LA TOPOLOGIA DEBIL.

A. Cuatro tipos de polinomios. Sean X,Y E.V.T. sobre K. Vamos a considerar en X tres topologías diferentes:

1. *La topología inicial* dada en X que denotaremos por τ_{in}. El espacio de las formas lineales continuas de X en K (respecto a esta topología) es el espacio de los polinomios continuos $p : (X,\tau_{in}) \to (Y,\tau_{in})$ lo denotamos por $\mathcal{P}(X,Y)$.

2. *La topología débil* en X que denotaremos por τ_d. Es la menor topología en X que asegura la continuidad de las $u \in X'$. Una base de vecindades de τ_d en $x = 0$ se obtiene así: dado $\varepsilon > 0$ y $u_1, u_2, \ldots, u_h \in E'$, se define $V(0)$ como el conjunto de los $x \in X$ tales que $|u_i \cdot x| < \varepsilon$ $(i = 1,2,\ldots,h)$.

Los polinomios continuos $p : (X,\tau_d) \to (Y,\tau_{in})$ son los *polinomios débiles* o polinomios de tipo finito. Estos polinomios fueron introducidos por el autor en [5] y luego investigados sistemáticamente por R.M. Aron y J.B. Prolla en [6]. Los polinomios débiles los denotaremos por $\mathcal{P}_d(X,Y)$.

3. La topología τ_{da} o *topología débil sobre acotados.* Un conjunto es abierto en esta topología si su intersección con todo conjunto acotado $A \subset X$ es abierto en la topología débil relativa de A. Una función $f : X \to Y$ es continua en esta topología si para todo conjunto acotado $A \subset X$ la restricción $f|A : (A,\tau_d) \to Y$ es continua, considerando en A la topología débil relativa. Los polinomios que son continuos en esta topología los denotamos por $\mathcal{P}_{da}(X,Y)$. Son los polinomios que denominaremos *polinomios débiles sobre acotados.*

4. Finalmente, consideramos los polinomios que son *uniformemente débiles sobre acotados.* Se trata de los polinomios p cuya restricción o cualquier acotado A con la topología débil relativa (A,τ_d) es una función uniformemente continua. Denotaremos a estos polinomios por $\mathcal{P}_{uda}(X,Y)$.

Entre estos polinomios se dan las inclusiones siguientes:

$$\mathcal{P}_d(X,Y) \subseteq \mathcal{P}_{uda}(X,Y) \subseteq \mathcal{P}_{da}(X,Y)$$

$$\mathcal{P}_d(X,Y) \subseteq \mathcal{P}(X,Y).$$

Si X es un espacio normado se tiene:

$$\mathcal{P}_d(X,Y) \subseteq \mathcal{P}_{uda}(X,Y) \subseteq \mathcal{P}_{da}(X,Y) \subseteq \mathcal{P}(X,Y).$$

Si X es de dimensión finita, la igualdad se da en todos los casos. Las inclusiones anteriores se deducen de las proposiciones demostradas en la sección anterior.

B. <u>Caracterización de los polinomios.</u> $\mathcal{P}_d(X,Y)$. Diremos que un polinomio homogéneo $p_k : X \to Y$ es de *tipo finito* si existe un operador lineal continuo $T : X \to X$ tal que

(I) $T^2 = T$, esto es, T es una proyección

(II) T es de rango finito, esto es, $\dim T(X) < \infty$

(III) $p_k = p_k \circ T$.

Ahora, diremos que un polinomio

$$p = p_o + p_1 + \ldots + p_n$$

de X en Y es de *tipo finito* si cada polinomio homogéneo p_k $(k = 0,1,\ldots,n)$ es de tipo finito.

La proposición siguiente se debe a R.M. Aron y J.B. Prolla [6; p.7], aunque ellos solamente la enuncian para polinomios homogéneos.

PROPOSICION (i). *Una condición necesaria y suficiente para un polinomio* $p : X \to Y$ *sea de tipo finito es que* p *sea continuo en el origen respecto a la topología débil en* X *(se debe suponer que* Y *es un espacio normado).*

La condición es claramente necesaria. En efecto, supongamos que p es de tipo finito y que $p = p_o + p_1 + \ldots + p_n$. Si $p_i = p_i \cdot T_i$ entonces $x \mapsto T_i(x)$ es continua de (X,τ_d) en (X,τ_d). Ahora, como $T_i(X)$ es de dimensión finita, la restricción de la topología τ_d a $T_i(X)$ coincide con la topología inicial. En consecuencia, p_i es continuo de (X,τ_d) en (Y,τ_{in}).

Para demostrar que la condición es suficiente, esto es, que si p es débilmente continuo en el origen entonces es de tipo finito, necesitamos unos resultados elementales que enunciaremos como lemas. Estos lemas son bien conocidos y los demostraremos simplemente para dar mayor claridad a la exposición.

LEMA 1. *Sea* E *un espacio vectorial topológico y sean* $u_1,u_2,\ldots,u_n$ *en* E' *linealmente independientes. Entonces* u *es una combinación lineal de los* u_i *si y sólo si* $u(X) = 0$ *para todo* $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(u_i)$.

Es claro que si $x \in \bigcap \mathrm{Ker}(u_i)$ y u es una combinación lineal de los u_i entonces $u(x) = 0$. La demostración de la recíproca es por inducción. Para $n = 1$ es verdadera: sea $x_o \in E$ tal que $u_1(x_o) \neq 0$; entonces todo $x \in E$ se puede escribir como

$$x = \lambda x_o + y, \qquad y \quad \mathrm{Ker}(u_i).$$

Así que $u = \alpha u_1$ con $\alpha = u(x_o)/u_i(x_o)$. Supongamos ahora que la proposición es cierta para (n-1). Entonces para todo j existe un $x_j \in \bigcap_{j=j} \mathrm{Ker}(u_i)$ tal que $u_j(x_j) \neq 0$ (de lo contrario, por la hipótesis de inducción, u_j sería una combinación lineal de $u_1,u_2,\ldots,u_{j-1},u_{j+1},\ldots,u_n$). Podemos suponer que $u_j(x_j) = 1$ para todo j, así que $u_j(x_i) = \delta_{ij}$. Escribamos

$$y = x - \sum_{i=1}^{n} u_i(x)x_i \qquad (x \in E)$$

Entonces $u_j(y) = 0$ $(j = 1,2,\ldots,n)$. Por hipótesis

$u(y) = 0$ y en consecuencia

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)u(x_i)$$

para todo $x \in E$, esto es, $u = \sum_{i=1}^{n} u(x_i)u_i$. ∎

LEMA 2. *Sea* E *un espacio vectorial topológico y sean* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *en* E' *linealmente independientes. Entonces existen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *en* E *tales que* $u_j(x_i) = \delta_{ij}$. *Además, todo* $x \in X$ *puede expresarse como*

$$x = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)x_i + x' \quad , \quad x' \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(u_i) .$$

Demostremos el Lema 2. Por el Lema 1, para algún $x \in \bigcap \mathrm{Ker}(u_i)$ se debe cumplir $u_j(x) \neq 0$. Sea $x_j \in \bigcap_{i \neq j} \mathrm{Ker}(u_i)$ tal que $u_j(x_j) = 1$. Entonces $u_j(x_i) = \delta_{ij}$. Sea $x \in E$ y escribamos

$$x' = x - \sum_{i=1}^{n} u_i(x)x_i$$

Entonces $u_j(x') = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$. ∎

LEMA 3. *Sea* E *un espacio vectorial topológico. Entonces las vecindades de cero de la forma* $V = \bigcap_{j=1}^{n} u_i^{-1}(H)$, *donde* $u_1, \ldots, u_n$ *en* E' *son linealmente independientes y* H *es una vecindad de cero en* K, *forman un sistema fundamental de vecindades en el origen de la topología débil* τ_d.

Sea V una vecindad de 0 en la topología τ_d. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y $v_1, v_2, \ldots, v_m$ en E' tales que $x \in V$ si y sólo si $|v_i(x)| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Sean $\{v_1,v_2,\ldots,v_h\}$ un conjunto máximo de elementos linealmente independientes en $\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ $(h < m)$ y sea W el conjunto de los x E tales que $|v_i(x)| < \delta$ $(i = 1,2,\ldots,h)$, donde δ será determinado luego en función de ε. Ahora,

$$v_j = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i^j \, v_i, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

y por tanto,

$$|v_j(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{h} |\lambda_i^j|\,|v_i(x)| \leqslant M_j\delta \qquad (x \in W)$$

donde $M_j = \sum_{i=1}^{h} |\lambda_i^j|$. En consecuencia, si $\delta < \min\{\varepsilon/M_j\}$ se cumple que $|v_j(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in W$ y todo j, esto es, $W \subseteq V$. ∎

Vamos a demostrar ahora la segunda parte de la proposición (i). Sea $p = p_0+p_1+\ldots+p_n$ un polinomio de X en Y débilmente continuo en el origen. Entonces cada p_k es débilmente continuo en el origen Prop.(i), §3 (A)). Para efectos de la demostración podemos suponer entonces que p es un polinomio homogéneo de grado h.

Por la continuidad de φ, existe una vecindad débil $V = V(0)$ tal que $x \in V$ implica $\|p(x)\| \leqslant 1$. Por el Lema 3 podemos suponer que V está determinada por $u_1,u_2,\ldots,u_n \in X'$ linealmente independientes y por cierto $n > 0$. Se tendría entonces

$$|u_i(x)| < n \quad (i = 1,2,\ldots,n) \text{ implica } \|p(x)\| \leqslant 1.$$

Por el Lema 2 existen $x_1,x_2,\ldots,x_n \in X$ tales que $u_i(x_j) = \delta_{ij}$ y todo $x \in X$ puede expresarse como

$$x = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)x_i + x' \quad , \quad x' \in \bigcap \mathrm{Ker}(u_i)$$

Definimos ahora

$$T : X \to X, \qquad T(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)x_i$$

Entonces $T^2 = T$ puesto que $T(x_j) = x_j$ para todo j y T es de rango finito. Resta demostrar solamente que $p(x) = p(T(x))$ para todo $x \in X$. Demostraremos en primer lugar que $p(x) = p(T(x))$ si $x \in V$. Sea $x' \in \bigcap \mathrm{Ker}(u_i)$, $x' \neq 0$, y sea $\lambda \in R$. Entonces,

$$u_j(T(x)+\lambda x') = u_j(T(x)) = u_j(x)$$

y por consiguiente $x \in V$ implica $T(x)+\lambda x' \in V$ para todo $\lambda \in R$. Por tanto $x \in V$ implica $\|p(Tx+\lambda x')\| \leq 1$ para todo $\lambda \in R$.

Por otra parte, si φ es la n-forma que genera a p

$$\begin{aligned} p(Tx+\lambda x') &= \varphi(Tx+\lambda x', \ldots, Tx+\lambda x') \\ &= p(Tx) + \Psi(\lambda, x, x') \end{aligned}$$

donde $\Psi(\lambda,x,x')$ es un polinomio en λ de R en Y de la forma

$$\Psi(\lambda,x,x') = \lambda b_1 + \lambda^2 b_2 + \ldots + \lambda^n b_n \qquad (b_i \in Y).$$

Este polinomio es acotado en R puesto que

$$\|\Psi(\lambda,x,x')\| \leq \|p(Tx+\lambda x')\| + \|p(Tx)\| \leq 2.$$

Pero esto sólo es posible si $\Psi(\lambda,x,x') = c$ (constante). Más como $\Psi(0,x,x') = 0$ entonces $\Psi(\lambda,x,x') = 0$ para todo λ. Hemos así demostrado que $x \in V$ implica $p(Tx+\lambda x') = p(Tx)$, $\lambda \in R$.

Ahora, $x \in V$ puede escribirse de la forma $x = Tx$

$+ x'$ y por consiguiente $p(x) = p(Tx+x') = p(Tx)$.

Para concluir la demostración, supongamos que $x \notin V$. Entonces existe $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha x \in V$. Ahora,

$$p(\alpha x) = \varphi(\alpha x,\ldots,\alpha x) = \alpha^n \varphi(x,x,\ldots,x) = \alpha^n p(x)$$

$$p(\alpha x) = p(T(\alpha x)) = \varphi(\alpha T(x),\ldots,\alpha T(x)) = \alpha^n p(Tx)$$

y por consiguiente $p(x) = p(Tx)$ para todo $x \in X$. ∎

<u>Observación</u>. La condición "Y es un espacio normado" en la proposición anterior no puede ser omitida. Si Y es un espacio normado y consideramos en Y la topología débil, entonces $id : Y \to Y$ es un polinomio de grado 1 continuo de (Y,τ_d) en (Y,τ_d) que no es de tipo finito.

C. <u>Polinomios débiles y polinomios compactos</u>. Si E y F son E.V.T. sobre K, diremos que $p : E \to F$ es un *polinomio compacto* si para todo subconjunto acotado $A \subset E$ se tiene que $p(A)$ es un subconjunto compacto de F.

Un polinomio continuo $f : E \to F$ es compacto en los siguientes casos especiales:

1. Si $\dim(E) < \infty$.
2. Si $p(E)$ está en un subespacio de dimensión finita y p transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.
3. Si $p = g \circ h$ donde $g : E \to F$ es continuo y $h : E \to E$ es compacto.

Pero naturalmente, hay muchos polinomios compactos que no son de los tipos anteriores. Por ejemplo, el polinomio de grado 1

$$p : \ell^2 \to \ell^2, \quad p(e_n) = \frac{e_n}{n}$$

y $p(\sum x_n e_n) = \sum x_n p(e_n)$, es compacto pero $p(\{x : \|x\| \leqslant 1\})$ no está contenido en ningún subespacio de dimensión finita.

En general, no podemos afirmar que los polinomios compactos son uniformemente débiles sobre acotados. Por ejemplo, el polinomio

$$p : \ell^2 \to \mathbb{R}, \quad p(x) = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+\ldots$$

es compacto. Sin embargo, no es débilmente continuo sobre la bola $A = \{x : \|x\| \leqslant 1\}$ ya que si $e_n \in \ell^2$ es $e_n(m) = \delta_{nm}$, entonces $e_n \to 0$ (τ_{db}) pero $p(e_n)=1$ para todo n. La recíproca si es cierta ([7]; Lema 4.3 p.14):

PROPOSICION (i). (R.M.Aron). *Sean* E,F *espacios vectoriales topológicos sobre* K *y* $p : E \to F$ *uniformemente débil sobre acotados. Entonces* p *es compacto.*

Demostremos esta proposición. Sea W una vecindad de cero en F y $A \subset E$ acotado. Por la continuidad uniforme, existe una vecindad débil $V(0) = V$ en E tal que

(*) $\quad x, y \in A, \quad x-y \in V$ implica $p(x)-p(y) \in W$

Supongamos que $V = \{x : |u_i \cdot x| < \delta\}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Entonces la condición anterior se expresa así:

$$x, y \in A, \quad |u_i(x-y)| < \delta \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

implica $p(x)-p(y) \in W$

La función $g : E \to K^n$ definida por

$$x \mapsto h(x) = (u_1(x),\ldots,u_n(x))$$

es continua. Además $g(A)$ es acotado y por tanto precompacto en K^n. En K^n consideramos la norma $\|x\| = \sup\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}$. Por tanto existen $b_1 b_2,\ldots,b_r \in g(A)$ tales que para todo $b \in g(A)$, $\|b-b_j\|<\delta$ $(j = 1,2,\ldots,r)$. Sea $a_j \in A$ tal que $g(a_j) = b_j$ y sea $a \in A$. Entonces $\|g(a)-g(a_j)\| < \delta$, esto es, $|u_i(a)-u_i(a_j)| = |u_i(a-a_j)| < \delta$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$ y para algún j. Luego si $a \in A$, existe a_j tal que $a-a_j \in V$ y, en consecuencia, en virtud de (*), $p(a)-p(a_j) \in W$, $p(a) \in W+p(a_j)$. Hemos así demostrado que $\{W+p(a_j);\ j = 1,2,\ldots,r\}$ es un recubrimiento finito de $p(A)$. Como W es una vecindad arbitraria de cero en F, concluimos que $p(A)$ es precompacto. Hemos así demostrado que p es compacto. ∎

<u>Observación</u>: Hemos supuesto que $A \subset E$ es acotado en la topología inicial y ello implica que A es acotado en la topología débil. Por tanto $g(A)$ es acotado en K^n.

Para polinomios de grado ≤ 1 R. Aron y J. Prolla demostraron ([6], Prop.2.5):

PROPOSICION (ii). *Sean* E *y* F *espacios normados y* $p : E \to F$ *un polinomio de grado* < 1. *Entonces* p *es compacto si y sólo si* p *es uniformemente débil sobre acotados.*

Hay que demostrar solamente que si p es compacto entonces p es uniformemente continuo en todo acotado $A = \{x : \|x\| \leqslant r\}$. Sea $B = \{x : \|x\| \leqslant 2r\}$. Como $p(B)$ es precompacto, existen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en $p(B)$ tales que $p(B) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (y_i + W)$ donde $W = \{y : \|y\| < \frac{\varepsilon}{3}\}$. Ahora,

$$\|y\| = \sup\{|u \circ y| : \|u\| = 1, \ u \in F'\} \ (y \in F).$$

Por tanto, para cada y_i existe $u_i \in F'$ tal que

$$\|u_i\| = 1, \ \|y_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + |u_i \cdot y_i|.$$

Sea $y \in p(B)$. Entonces existe y_i tal que $\|y - y_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$, así que

$$\|y\| = \|y - y_i + y_i\| < \|y - y_i\| + \|y_i\| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + |u_i \cdot y_i|.$$

Por otra parte,

$$|u_i \cdot y_i| = |u_i(y_i - y) + u_i \circ y| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + |u_i \cdot y|.$$

Hemos así demostrado que para todo $y \in p(B)$ existe $u_i \in F'$ tal que $\|y\| \leqslant \varepsilon + |u_i \cdot y|$. Sea $v_i = u_i \circ p$. Entonces $v_i \in E'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Sea V la vecindad débil

$$V = \{x \in E : |v_i . x| < \varepsilon\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

y sean $x, x' \in A$ tales que $x - x' \in V$. Entonces $x - x' \in B$ y por tanto existe u_i tal que $|p(x - x')| \leqslant \varepsilon + |u_i . p(x - x')| \leqslant \varepsilon + |v_i . (x - x')| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Hemos así demostrado que p es uniformemente continuo en todo acotado $A = \{x : \|x\| \leqslant r\}$.

§5. LOS POLINOMIOS UNIFORMEMENTE DEBILES SOBRE ACOTADOS.

A. <u>La correspondencia</u> $\varphi \leftrightarrow T$. Denotamos por $\mathcal{P}^r(X, Y)$ al conjunto de los polinomios homogéneos de grado r de X en Y. En esta sección analizaremos la correspondencia

$$p \mapsto T : \mathcal{P}^{h+1}(X,Y) \to \mathcal{L}(X,\mathcal{P}^{h}(X,Y))$$

$$T(x).\underbrace{(z,z,\ldots,z)}_{h} = (x,z,z,\ldots,z)$$

donde φ es la forma multilineal simétrica que genera al polinomio p. Con mayor generalidad y precisión, sean $X_1,X_2,\ldots,X_{h+1}$ espacios vectoriales topológicos sobre K, $Z = \prod_{i=1}^{h} X_i$ y σ la colección de subconjuntos de Z de la forma $A = \prod_{i=1}^{h} A_i$, donde $A_i \in X_i$ es acotado. El espacio $\mathcal{L}_{\sigma}^{h}(\prod X_i;Y)$ es el espacio de las formas multilineales con la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de σ. Si

$$\varphi : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{h+1} \to Y$$

es una forma multilineal, entonces a φ le corresponde el operador lineal

$$T : X_{h+1} \to \mathcal{L}_{\sigma}^{h}(\prod_{i=1}^{n} X_i ; Y)$$

definido por

$$T(x).(z_1,\ldots,z_h) = \varphi(z_1,z_2,\ldots,z_h,x).$$

En lo que sigue nos proponemos analizar la continuidad uniforme sobre acotados en la topología débil de ciertos polinomios. Para ello necesitamos demostrar la equivalencia de las proposiciones siguientes:

(I) T *es débilmente continuo sobre acotados.*

(II) *Para todo* $A \subset Z$ *acotado, todo* $B \subset X_{h+1}$ *acotado y toda vecindad* $W(0) \subset Y$, *existe una vecindad débil en* X_{h+1} *tal que* $\varphi(A \times V \cap B) \subseteq W$.

Recordemos, para efectos de la demostración, qué es una vecindad típica en $\mathcal{L}_\sigma^h(Z,Y)$, donde $Z = \prod_{i=1}^{h} X_i$. Si $A_i \subset X_i$ es acotado, $A = \prod_{i=1}^{h} A_i$ y W es una vecindad de Y, entonces

$$H(A,W) = \{u:Z \to Y : u(A) \subseteq W\}.$$

Demostremos que (I) implica (II). Por la continuidad de T sobre acotados, dado $H(0) = H(A,W)$ existe una vecindad débil $V = V(0)$ en X_{h+1} tal que $x \in V \cap B$ implica $Tx \in H$, esto es, $Tx \circ x = \varphi(z,x) \in W$ para todo $z \in A$ y todo $x \in V \cap B$. Luego (I) implica (II). El razonamiento anterior es totalmente reversible, así que (II) implica (I).

B. <u>Una caracterización de los polinomios uniformemente débiles sobre acotados</u>. Lo dicho en la subsección (A) nos permite caracterizar los polinomios uniformemente débiles sobre acotados. Supondremos que $X_i = E$ $(i = 1,2,\ldots,h+1)$ y que $Y = F$. Si $p \in \mathcal{P}^{h+1}(E,F)$, sea φ la forma multilineal simétrica correspondiente. Tendríamos entonces el operador

$$T : E \to \mathcal{L}_\sigma^h(E,F)$$

definido por

$$(2) \qquad Tx \cdot z = \varphi(z,x), \qquad z = (z_1,z_2,\ldots,z_h).$$

Como antes, $Z = \underbrace{E\times E\times\ldots\times E}_{h \text{ veces}}$. Entonces, PROPOSICION (i). p *es uniformemente débil sobre acotados si y sólo si* T *es débilmente continuo sobre acotados.*

Supongamos que T es débilmente continuo sobre acotados. Entonces la condición (II) se satisface no solamente en la variable (h+1) sino en cualquier variable z_i debido a la simetría de φ. Por tanto,

(*) *dados* $B \subset E$ *acotado y* $W(0) = W \subset F$, *existe una vecindad débil* $V(0)$ *tal que* $\varphi(B\times B\times\ldots\times(B\cap V)\times B\ldots\times B) \subseteq W$.

(hemos hecho $A_1 = A_2 = \ldots = A_h = B$ en (II)). Sea $D \subset E$ acotado y sean $x, x' \in D$. Escribamos

$$p(x)-p(x') = \varphi(\underbrace{x,x,\ldots,x}_{(n+1)\text{ veces}}) - \varphi(\underbrace{x',x',\ldots,x'}_{(h+1)\text{ veces}})$$

$$= \varphi(x-x',x,\ldots x,x)+\varphi(x',x-x',x,\ldots,x,x) + \varphi(x',x',x-x',\ldots,x,x)+\ldots+\varphi(x',x',\ldots,x',x-x').$$

Sea B un conjunto acotado que contiene a D y las diferencias x-x', $x, x' \in D$. Entonces, para este B y $W(0) \subset F$ existe la vecindad V especificada en (*) tal que

$$\varphi(B\times B\times\ldots\times(B\cap V)\times B\times\ldots\times B) \subseteq W'$$

donde $\underbrace{W'+W'+\ldots+W'}_{(h+1)\text{ veces}} \subseteq W$. En consecuencia, dada una vecindad $W(0)$ en F y un acotado $D \subset E$, existe una vecindad débil $V(0)$ en E tal que $x, x' \in D$ y $x-x' \in V$

implica $p(x)-p(x')\in \underbrace{W'+W'+\ldots+W'}_{(n+1)\text{ veces}} \subseteq W$.

Supongamos ahora que p es uniformemente débil sobre acotados y demostremos T es débilmente continuo sobre acotados. Sea $H = H(0)$ una vecindad en $\mathcal{L}^h_\sigma(E,F)$. Entonces H es de la forma

$$H = H(A,W) = \{u:Z \to F : u(A) \subseteq W\}$$

donde $Z = E\times E\times\ldots\times E$ (h veces), $A = A_1\times A_2\times\ldots\times A_h$, con $A_i \subset E$ acotado, y W es una vecindad de cero en F. Tenemos que demostrar que para todo $B\subset E$ acotado y toda H existe una vecindad débil $V(0) = V$ en E tal que

$$x,x'\in B,\quad x-x'\in V \quad \text{implica} \quad Tx-Tx'\in E.$$

Esta afirmación es equivalente a

$$x,x'\in B,\quad x-x'\in B \quad \text{implica } (Tx-Tx')z =$$
$$Tx\cdot z-Tx'\cdot z\in W \quad \text{para todo} \quad z\in A\subset Z.$$

Ahora, debe tenerse en cuenta que

$$Tx\cdot z-Tx'\cdot z = \varphi(z,x) - \varphi(z,x')$$

y por tanto todo consiste en demostrar que

(**) *Para todo* $x,x'\in B$, $x-x'\in V$, *y todo* $z\in A$ *se cumple* $\varphi(z,x) - \varphi(z,x')\in W$.

Ahora, la continuidad uniforme de p sobre acotados en la topología débil implica que φ es uniformemente continua sobre acotados en la topología producto. Por tanto φ es uniformemente continuo sobre $A\times B$. Luego existe una vecindad débil $V(0)$ en E tal que (u,x), $(v,x')\in A\times B$, $u_i-v_i\in V$ $(i = 1,2,\ldots,h)$

y $x-x' \in V$ implican $\varphi(u,x)-\varphi(v,x') \in W$. Por tanto (**) se cumple si $x-x' \in V$ con $u = v = z$. Hemos concluido la demostración. ∎

De nuevo sea $p \in \mathcal{P}^{h+1}(E,F)$ y sea T el operador definido por (2). Entonces

PROPOSICION (ii). *Si* T *es compacto, entonces* $Tx \in \mathcal{P}^h(E,F)$ *es uniformemente débil sobre acotados para* $x \in E$.

En efecto, si T es compacto entonces T es uniformemente débil sobre acotados (prop.(ii), sección 4 (C)). Por tanto φ sería uniformemente débil sobre acotados por la proposición anterior. Sea $x_o \in E$, $B = \{x_o\}$ en (**). Si $u, v \in A$, $u_i - v_i \in V$, se concluye que

$$\varphi(u,x_o) - \varphi(v,v_o) \in W,$$

esto es,

$$Tx_o \cdot u - Tx_o \cdot v \in W$$

lo que demuestra la proposición.

C. <u>Los polinomios</u> $\mathcal{P}(C_o,F)$. Aquí C_o es el espacio de Banach de las sucesiones en K que convergen a cero con $\|x\| = \sup\{|x_i| \; ; \; i = 1,2,\ldots,\}$. El dual de C_o es $(C_o)' = \ell^1$, el espacio de las sucesiones de K tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_i| < \infty$. Un conocido teorema de Banach ([8 ;p.137]) nos dice que una sucesión (x_n) en ℓ^1 converge débilmente a x si y sólo si converge en la topología de la norma a x.

En esta sección consideraremos espacios de Banach que satisfacen la propiedad

(A) $x_n \to x(\tau_d)$ si y sólo si $x_n \to x(\tau_{in})$

donde τ_d es la topología débil y τ_{in} es la topología inicial (topología de la norma). El espacio ℓ^1 satisface la propiedad (A). En primer lugar demostraremos el teorema siguiente que atribuimos a R. Bonic [9] .

PROPOSICION (iii). *Si* F *es un espacio de Banach que satisface la propiedad* (A) *entonces todo polinomio* $p \in \mathcal{P}(C_o, F)$ *es débilmente continuo sobre acotados.*

La demostración de esta proposición depende de los Lemas siguientes

LEMA 1. *Si* F *es un espacio de Banach que satisface la propiedad* (A) *entonces* $\mathcal{L}(C_o, F)$ *también satisface la propiedad* (A).

Para demostrar el Lema 1 sea $\varphi_n \to 0(\tau_d)$ en $\mathcal{L}(C_o, F)$ y demostremos que $\varphi_n \to 0(\tau_{in})$. Para ello basta demostrar que para toda sucesión acotada $\{x_n\}$ en C_o se cumple $\varphi_n \cdot x_n \to 0$ en F. Por la propiedad (A) bastaría demostrar que $\varphi_n \cdot x_n \to 0(\tau_d)$ en F. Sea $p \in F'$. Entonces,

$$|<\varphi_n x_n, p>| = |<x_n, \varphi_n^* p>| \leqslant \|x_n\| \cdot \|\varphi_n^* p\| \leqslant M \|\varphi_n^* p\|$$

donde $\varphi_n : C_o \to F$, $\varphi_n^* : F' \to (C_o)' = \ell^1$. Como ℓ^1 satisface la propiedad (A), para demostrar que $\|\varphi_n^* p\| \to 0$ en ℓ^1, basta demostrar que $\varphi_n^* p \to 0\ (\tau_d)$ en ℓ^1. Sea $q \in (\ell^1)'$ y consideremos la forma lineal continua

$$\varphi \mapsto \langle \varphi^* p, q\rangle = \lambda_{p,q}(\varphi) \quad \text{de } \mathcal{L}(C_o,F) \text{ en } K.$$

Como $\varphi_n \to 0(\tau_d\ )$ en $\mathcal{L}(C_o,F)$ entonces

$$\langle \varphi_n^* p, q\rangle \to 0 \quad \text{para todo } q \in (\ell^1)'$$

lo que demuestra que $\varphi_n^* p \to 0(\tau_d)$. Hemos así concluido la demostración del Lema 1.

LEMA 2. *Si* F *satisface la propiedad* (A) *entonces* $\mathcal{L}^n(C_o,F)$ *también satisface la misma propiedad y, en consecuencia los polinomios homogéneos de grado* n $\mathcal{P}^n(C_o,F)$ *y los polinomios* $\mathcal{P}(C_o,F)$ *satisfacen la propiedad* (A).

La segunda parte de la proposición se deduce de la primera puesto que existe un isomorfismo entre los polinomios de grado n y las formas multilineales simétricas de grado n. Demostremos entonces la primera parte. La proposición es cierta para n = 1 por el lema anterior. Supongamos que es cierta para n = h. Entonces es cierta para n=h+1 puesto que la correspondencia $\varphi \mapsto T$ de $\mathcal{L}^{h+1}(C_o,F)$ en $\mathcal{L}(C_o,\mathcal{L}^h(C_o,F))$ definida por $Tx\cdot(z_1,z_2,\ldots,z_h) = \varphi(z_1,z_2,\ldots,z_h,z)$ es un isomorfismo y $\mathcal{L}(C_o,\mathcal{L}^h(C_o,F))$ satisface la propiedad (A) por el lema 1.∎

Podemos ahora demostrar la proposición (iii). Podemos suponer que p es un polinomio homogéneo de grado n. Como el dual de C_o es separable, la restricción de la topología débil a cualquier conjunto acotado es una topología 1-contable (cada punto posee una base enumerable de vecindades), hasta demostrar que

$$x_n \to 0(\tau_d) \quad \text{en} \quad C_o \quad \text{implica} \quad p(x_n) \to 0(\tau_{in}) \text{ en } F.$$

Supongamos que la proposición es cierta para n = h (para n = 1 es claramente cierta por el Lema 1). De nuevo consideramos el isomorfismo $p \mapsto T$

$$\mathcal{P}^{h+1}(C_o,F) \to (C_o, \mathcal{P}^h(C_o,F))$$

$$Tx\cdot\underbrace{(z,z,\ldots,z)}_{h \text{ veces}} = \varphi(z,z,\ldots,z,x)$$

donde φ es la forma simétrica que genera a p. Entonces

$$\|p(x)\| = \|\underbrace{\varphi(x,x,\ldots,x)}_{h+1 \text{ veces}}\| \leq \|Tx\|\cdot\|x\|^h.$$

Si $x_n \to 0(\tau_{db})$ en C_o entonces $Tx_n \to 0(\tau_d)$ en $\mathcal{P}^h(C_o,F)$ puesto que T es lineal. Por el Lema 2, $Tx_n \to 0(\tau_{in})$ y como $\{Tx_n\}$ es acotada,

$$\|px_n\| \leq \|Tx_n\|\|x_n\|^h \leq M^h\|Tx_n\| \to 0$$

Luego $p(x_n) \to 0(\tau_{in})$ en F. Hemos así concluído la demostración. ∎

Finalmente consideraremos la pregunta siguiente: ¿es todo polinomio débil sobre acotados uniformemente débil sobre acotados, es decir es $\mathcal{P}_d(E,F) = \mathcal{P}_{da}(E,F)$? Si E es un espacio de Banach reflexivo la respuesta es claramente afirmativa. En el caso particular siguiente también es cierta:

PROPOSICION (iv). *Si* F *es un espacio de Banach que satisface la propiedad* (A) *entonces todo poli-*

nomio $p \in \mathcal{P}(C_o,F)$ *es uniformemente débil sobre acotados.*

Podemos suponer para efectos de la demostración que p es un polinomio homogéneo de grado (h+1). Sea $x_n \to 0(\tau_d)$ en C_o y sea $T : C_o \to \mathcal{P}^h(C_o,F)$ el operador lineal definido anteriormente. Entonces $Tx_n \to 0(\tau_d)$. Como $\mathcal{P}^h(C_o,F)$ satisface la propiedad (A) entonces $Tx_n \to 0(\tau_{in})$. Como el dual de C_o es separable entonces T es débilmente continuo. Por la proposición (i) §5 (B), se concluye que p es uniformemente débil sobre acotados.

<u>Observaciones</u>.

1. Siempre se tiene $\mathcal{P}^1_d(E,F) = \mathcal{P}^1_{da}(E,F)$ sin restricciones sobre E ni F.
2. Si E es reflexivo $\mathcal{P}_d(E,F) = \mathcal{P}_{da}(E,F)$.
3. Si F satisface la propiedad (A) entonces $\mathcal{P}(C_o,F) = \mathcal{P}_d(C_o,F) = \mathcal{P}_{da}(C_o,F)$.

***

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Mazur y W. Orlicz: *Grundlegende Eigenschaften der Polynomishen Operationen* I. Studia Math. 5 (1935), 50-68, 179-189.

[2] A. Alexiewicz y W. Orlicz: *Analytic Operations in real Banach Spaces.* Studia Math. 14 (1953) p. 57-78.

[3] J. Kurzweil: *On Approximation in real Banach Spaces.* Studia Math. 14 (1954), 213-231.

[4] J.B. Prolla: *Aproximation of Vector Valued Functions*. Notas de Matemáticas (61), North-Holland (1977).
[5] G. Restrepo: *An Infinite Dimensional Version of a Theorem of Bernstein*. Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), 193-198.
[6] R.M. Aron and J.B. Prolla: *Polynomial Approximation of Differentiable Functions on Banach Spaces*. (Preprint).
[7] R.M. Aron: *Approximation of Differentiable Functions on a Banach Space*. (Preprint).
[8] S. Banach: *Theorie des Operations Lineaires*. Warszawa (1932).
[9] R. Bonic y J. Frampton: *Smooth Functions on Banach Manifolds*. J. of Math. and Mech. 15 (1966), 877-898.

***

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
Apartado Aéreo 2188
Cali, Colombia.

(Recibido en Abril de 1979)