Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XIV (1980), págs. 111 - 130

CONJUNTOS SECUENCIALMENTE CERRADOS

por

Xavier CAICEDO

§0 Introducción. Decimos que un subconjunto A de un espacio topológico de Hausdorff es *secuencialmente cerrado* si el límite de cualquier sucesión convergente de elementos de A está en A. Todo subconjunto cerrado es secuencialmente cerrado; sin embargo la afirmación conversa no es válida. Por ejemplo, en el espacio producto $\mathbb{R}^I$ con I no enumerable el conjunto de las funciones $f:I \to \mathbb{R}$ que valen 1 en todas partes, excepto en algún subconjunto a lo sumo enumerable de I, es secuencialmente cerrado pero no es cerrado ya que es denso en $\mathbb{R}^I$. Por otra parte, es bien sabido que en un espacio 1-*enumerable* (donde todo punto tiene una base enumerable de vecindades, v.gr. espacios métricos) los puntos de adherencia de un subconjunto A son límites de sucesiones en A y por lo tanto un conjunto secuencialmente cerrado es cerrado (véase [1] p.217 ó [5] p.70).

Unión finita e intersección arbitraria de conjuntos secuencialmente cerrados es otra vez secuencialmente cerrada. Por lo tanto, los subconjuntos secuencialmente cerrados de un espacio (X,τ) con topología de abiertos τ constituyen los cerrados de una topología $J(\tau)$, más fina que τ ya que todo τ-cerrado es $J(\tau)$-cerrado. La topología $J(\tau)$ fué definida en [3] por Carlos Ruíz, quien inicia allí el estudio de aquellos espacios en donde todo conjunto secuencialmenta cerrado es cerrado, es decir donde $J(\tau) = \tau$, llamándolos espacios 0-*enumerables*. $J(\tau)$ resulta ser la mínima topología 0-enumerable más fina que τ. El mismo autor caracteriza las topologías 0-enumerables como límites inferiores de familias de topologías 1-enumerables. Guillermo Restrepo caracteriza en [2] las topologías 0-enumerables en X (llamadas allí *topologías secuenciales*) como aquellas que hacen continua toda función $f:X \to Y$ que preserve límites de sucesiones convergentes. Además, calcula la topología $J(\tau)$ para ciertos espacios de Banach con la topología débil.

Sea $A^s \supseteq A$ el conjunto de límites de sucesiones convergentes de puntos en A. En espacios 1-enumerables A^s es la adherencia de A y por lo tanto es secuencialmente cerrado, pero en general A^s no tiene que ser secuencialmente cerrado. En [4] Carlos Ruíz dá ejemplos donde

$$A \subsetneq A^{s} \subsetneq A^{ss} \subsetneq A^{sss}$$

y por lo tanto ni A^{s} ni A^{ss} son secuencialmente cerrados. Su construcción puede generalizarse a cualquier $n < \omega$ para obtener cadenas de inclusiones estrictas

$$A \subsetneq A^{s} \subsetneq A^{2s} \subsetneq \dots \subsetneq A^{ns} \tag{1}$$

donde $A^{ns} = A^{ss\dots s}$ (n veces). Este fenómeno es independiente de que el espacio sea 0-enumerable o nó porque la operación $A \mapsto A^{s}$ es la misma en (X,τ) y en $(X,J(\tau))$, y si la cadena (1) se presenta en (X,τ) también debe presentarse en el espacio 0-enumerable $(X,J(\tau))$. Sin embargo, en los espacios 0-enumerables sucede que si A^{ns} ó $\bigcup_{n<\omega} A^{ns}$ son secuencialmente cerrados entonces coinciden con la adherencia $\overline{A}$ del conjunto A. por lo tanto cobra importancia la pregunta del mismo autor en [4] de si la unión $\bigcup_{n<\omega} A^{ns}$ es secuencialmente cerrada.

En este artículo mostramos que la respuesta a la última pregunta es negativa. En efecto, construímos ejemplos de espacios 0-enumerables en donde no sólo el conjunto $B_1 = \bigcup_{n<\omega} A^{ns}$ no es secuencialmente cerrado sino que tampoco lo son los conjuntos: $B_1^{s}, B_1^{ss}, \dots, \bigcup_{n<\omega} B_1^{ns} = B_2, B_2^{s}, B_2^{ss}, \dots \bigcup_{n<\omega} B_2^{ns} = B_3$, $\dots, \bigcup_{n<\omega} B_n = C_1, C_1^{s}, \dots$ y así indefinidamente. En general, ningún proceso enumerable que itere las operaciones de tomar límites de sucesiones y de unir los conjuntos ya formados produce un conjunto secuencialmente cerrado. La formulación precisa de este resultado debe hacerse en términos de ordinales. Definimos por recurrencia transfinita para todo ordinal α:

$$L^{o}(A) = A$$

$$L^{\alpha+1}(A) = (L^{\alpha}(A))^{s}$$

$$L^{\alpha}(A) = \bigcup_{\gamma<\alpha} L^{\gamma}(A), \text{ si } \alpha \text{ es ordinal límite.}$$

Por ejemplo, $L^{n}(A) = A^{ns}$, $L^{\omega}(A) = \bigcup_{n<\omega} A^{ns}$ y $L^{\omega^2}(A) = C_1$ en la lista anterior. Tenemos entonces $A \subseteq L^{\alpha}(A) \subseteq L^{\beta}(A) \subseteq \overline{A}$ para $\alpha < \beta$. En espacios 0-enumerables $\overline{A}$ coincide con el primer $L^{\alpha}(A)$ secuencialmente cerrado. Sea ω_1 el primer ordinal no enumerable, el resultado principal es el siguiente:

> Existe un espacio 0-enumerable con un subconjunto A tal que $L^{\alpha}(A)$ no es secuencialmente cerrado para ningún $\alpha < \omega_1$.

Por otra parte, puede mostrarse que $L^{\omega_1}(A)$ es siempre secuencialmente cerrado y por lo tanto coincide con $\overline{A}$ en los espacios 0-enumerables.

En la sección 1 damos algunos conceptos y resultados básicos para el trabajo posterior. En la sección 2 demostramos el resultado principal junto con otros relacionados. Finalmente, en la sección 3 damos una aplicación, demostrando que existe una cantidad no enumerable de topologías 0-enumerables no homeomorfas en el dominio de los naturales, y planteamos algunas preguntas.

§1 Nociones preliminares. Una sucesión (x_n) de puntos de un espacio topológico X es *convergente* si existe un punto $x \in X$ tal que para toda vecindad abierta V de x todos los términos de (x_n), excepto un número finito, están en V. En tal caso se dice que x_n *converge a* x, en símbolos $x_n \to x$. En un espacio de Hausdorff una sucesión convergente converge a un solo punto.

Un *subespacio* B de X es un conjunto $B \subseteq X$ con la topología relativa heredada de X. Es un ejercicio elemental demostrar que si x y x_n, $n < \omega$, son puntos de B entonces

$$x_n \to x \text{ en } B \textit{ sí y sólo si } x_n \to x \text{ en } X. \quad (1)$$

Sea A un subconjunto de un espacio X, definimos:

$A^s = \{x \in X \mid x_n \to x$ para alguna sucesión (x_n) en $A\}$ la *adherencia secuencial de* A *en* X.

A es *secuencialmente cerrado* si $A^s = A$.

X es 0-*enumerable* si todo subconjunto secuencialmente cerrado de X es cerrado.

Si B es un subespacio de X y $A \subseteq B$, la notación $A^s(B)$ indica la adherencia secuencial de A en el espacio B.

LEMA 1. *Sea* B *un subespacio de* X.

(a) *Si* $A \subset B$ *entonces* $A^s(B) = A^s(X) \cap B$.

(b) *Si* A *es secuencialmente cerrado en* X *entonces* $A \cap B$ *es secuencialmente cerrado en* B.

Demostración. (a) Es inmediato de (1). (b) Suponga que A es secuencialmente cerrado en X y sea (x_n) una sucesión en $A \cap B$ tal que $x_n \to x \in B$, en B, entonces por (1) $x_n \to x$ en X, y $x \in A$ por hipótesis, por lo tanto $x \in A \cap B$. ▲

Sean X_i, $i \in I$, espacios topológicos disyuntos. Definimos el *espacio coproducto* $\coprod_i X_i$ como la unión (disyunta) de los X_i con la topología siguiente: $S \subseteq \coprod_i X_i$ es abierto si y sólo si $S \cap X_i$ es abierto en X_i para cada $i \in I$.

De la definición resulta que los espacios X_i son subespacios abiertos y cerrados de $\coprod_i X_i$. Además tenemos que para $S \subseteq \coprod_i X_i$:

S es cerrado sí y sólo si $S \cap X_i$ es cerrado en X_i para cada $i \in I$, (2)

pues S es cerrado sí y sólo si $\coprod_i X_i \setminus S = \coprod_i (X_i \setminus S \cap X_i)$ es abierto, sí y sólo si cada $X_i \setminus S \cap X_i$ es abierto en X_i, es decir cada $S \cap X_i$ es cerrado en X_i.

LEMA 2.

(a) *Si cada X_i es Hausdorff entonces $\coprod_i X_i$ Hausdorff.*

(b) *Si $A_i \subseteq X_i$ entonces $(\coprod_i A_i)^s = \coprod_i A_i^s(X_i)$.*

(c) *Si cada X_i es 0-enumerable entonces $\coprod_i X_i$ es 0-enumerable.*

Demostración.

(a) Trivial.

(b) Sea (x_n) una sucesión en $\coprod_i A_i$, $x_n \to x$; como $x \in X_j$ para algún j y este conjunto es abierto, entonces $\{x_k, x_{k+1}, \ldots\} \subseteq X_j$ para cierto k. Por lo tan to $\{x_k, x_{k+1}, \ldots\} \subseteq A_j$ ya que $A_i \cap X_j = \phi$ para $i \neq j$. Como $x_{k+n} \to x$ (en $\coprod_i X_i$) cuando $n \to \infty$ y X_j es un subespacio, tenemos que $x_{k+n} \to x$ (en X_j) por (1); es decir $x \in A_j^s(X_j)$. Conversamente, si $x \in A_j^s(X_j)$ entonces $x \in A_j^s(\coprod_i X_i)$ por (1) otra vez, y así $x \in (\coprod_i A_i)^s$.

(c) Si $A \subseteq \coprod_i X_i$ es secuencialmente cerrado entonces $A \cap X_i$ es secuencialmente cerrado en X_i por el Lema 1 (b), por lo tanto es cerrado en X_i para cada i. Por (2) resulta que $A = \coprod_i (A \cap X_i)$ es cerrado en $\coprod_i X_i$. ▲

Iterando transfinitamente el operador $L(A) = A^s$ definimos

$$L^0(A) = A$$

$$L^{\alpha+1}(A) = (L^\alpha(A))^s$$

$$L^\alpha(A) = \bigcup_{\gamma<\alpha} L^\alpha(A), \text{ si } \alpha \text{ es ordinal límite.}$$

De la definición, resulta por inducción que $L^\alpha(A) \subseteq L^\beta(A)$ si $\alpha < \beta$. Además, si $\overline{A}$ denota la adherencia del conjunto A entonces para todo α:

$$A \subseteq L^\alpha(A) \subseteq \overline{A}\ . \tag{3}$$

La prueba inductiva es la siguiente: (i) $A = L^0(A) \subseteq \overline{A}$. (ii) Si $A \subseteq L^\alpha(A) \subseteq \overline{A}$ entonces $A \subseteq A^s \subseteq (L^\alpha(A))^s \subseteq \overline{A}^s = \overline{A}$, es decir $A \subseteq L^{\alpha+1}(A) \subseteq \overline{A}$. (iii) Finalmente, si α es un ordinal límite y $A \subseteq L^\gamma(A) \subseteq \overline{A}$ para todo $\gamma < \alpha$ entonces es obvio que $A \subseteq L^\alpha(A) =$

$\bigcup_{\gamma<\alpha} L^{\gamma}(A) \subseteq \overline{A}$.

Note que si $L^{\alpha}(A)$ es secuencialmente cerrado, es decir $L^{\alpha+1}(A) = L^{\alpha}(A)$, entonces $L^{\beta}(A) = L^{\alpha}(A)$ para todo $\beta > \alpha$. Si además el espacio es 0-enumerable $L^{\alpha}(A)$ debe ser cerrado y tenemos por (3): *Si* $L^{\alpha}(A)$ *es secuencialmente cerrado entonces* $L^{\alpha}(A) = \overline{A}$.

Mostramos que ésto siempre se logra para un ordinal $\alpha \leqslant \omega_1$:

TEOREMA 1. *Para cualquier subconjunto* A *de un espacio* X, $L^{\omega_1}(A)$ *es secuencialmente cerrado. En consecuencia, si* X *es* 0-*enumerable* $L^{\omega_1}(A) = \overline{A}$.

Demostración. Sea $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, con cada $x_n \in L^{\omega_1}(A) = \bigcup_{\gamma<\omega_1} L^{\gamma}(A)$, entonces $x_n \in L^{\alpha_n}(A)$ para algún $\alpha_n < \omega_1$. Sea $\alpha = \sup_n \alpha_n$ que es un ordinal enumerable por serlo cada ordinal α_n, es decir $\alpha < \omega_1$. Por lo monoticidad de los $L^{\alpha}(A)$, $\{x_n \mid n < \omega\} \subseteq \bigcup_n L^{\alpha_n}(A) \subseteq L^{\alpha}(A)$. Por lo tanto $x \in (L^{\alpha}(A))^s = L^{\alpha+1}(A) \subseteq L^{\omega_1}(A)$, ya que también $\alpha+1 < \omega$. Esto demuestra que $(L^{\omega_1}(A))^s = L^{\omega_1}(A)$. Ahora, si X es 0-enumerable entonces $L^{\omega_1}(A) = \overline{A}$ por la última observación anterior al teorema. ▲

§2 Los espacios X_{α}. En esta sección mostramos que existe un espacio (0-enumerable) X_{ω_1} con un subconjunto A tal que $L^{\alpha}(A)$ no es secuencialmente cerrado para ningún ordinal $\alpha < \omega_1$. Por observaciones de la sección anterior esto significa que la familia $\{L^{\alpha}(A) \mid \alpha < \omega_1\}$ forma una cadena de inclusiones estrictas no enumerable entre A y $\bar{A}$. Para obtener X_{ω_1} debemos construír inductivamente espacios X_α con propiedades análogas para cada ordinal $\alpha < \omega_1$, y tomar $X_{\omega_1} = \coprod_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ con la topología coproducto.

TEOREMA 2. *Para cada ordinal $\alpha \leq \omega_1$ existe un espacio de Hausdorff X_α de la forma $X_\alpha = \bigcup_{\beta\leq\alpha} Y_\beta$, donde*

(i) $Y_\beta \subsetneq Y_{\beta+1} = Y_\beta^s$ *para* $\beta < \alpha$.

(ii) $Y_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} Y_\gamma$ *para* $\beta \leq \alpha$, β *ordinal límite.*

Demostración. Note que de las condiciones (i) y (ii) del teorema se sigue que $Y_\beta \subsetneq Y_\delta$ para $\beta < \delta \leq \alpha$, y además $Y_\alpha = X_\alpha$. Construimos los espacios X_α por inducción transfinita. Tomamos como $X_o = Y_o$ un espacio de Hausforff cualquiera (puede ser el espacio de un solo punto). La prueba se divide en dos partes.

Parte I: *Construcción de* $X_{\alpha+1}$. Sea $\alpha < \omega_1$; suponiendo que X_α ya ha sido construido de manera que satisfaga el teorema, explicamos como construír $X_{\alpha+1}$. Sean $X_\alpha^o, X_\alpha^1, X_\alpha^2, \ldots$ copias disyuntas del espacio X_α, y sea Y_β^n la copia correspondiente de Y_β en X_α^n, de manera que:

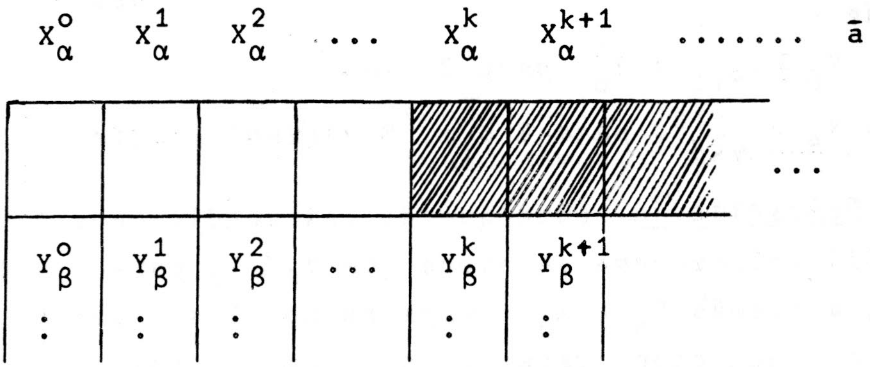
$$X_\alpha^n = \bigcup_{\beta\leq\alpha} Y_\beta^n \qquad n < \omega.$$

DEFINICION 1. $X_{\alpha+1} = (\coprod_n X_\alpha^n) \cup \{\bar{a}\}$, donde $\bar{a} \notin \coprod_n X_\alpha^n$. Los abiertos de $X_{\alpha+1}$ son los abiertos de $\coprod_n X_\alpha^n$ (con la topología coproducto) y las vecindades abiertas de $\bar{a}$, que son los conjuntos de la for ma $S \cup \{\bar{a}\}$ para los cuales se cumple:

(a) S es un abierto de $\coprod_n X^n_\alpha$,

(b) $\exists \beta < \alpha$ $\exists k < \omega$ tales que $S \supseteq \coprod_{n \geqslant k} (X^n_\alpha \setminus Y^n_\beta)$.

Gráficamente, una vecindad de $\bar{a}$ debe contener una región como la sombreada en el dibujo:



La intersección de dos conjuntos S, S' con las propiedades (a) y (b) tiene las mismas propiedades. Lo mismo sucede con la unión arbitraria, de aquí resulta que $X_{\alpha+1}$ es un espacio topológico. Además es de Hausdorff: como cada X^n_α es Hausdorff por hipótesis de inducción, así lo es $\coprod_n X^n_\alpha$ (Lema 2 (a)) y los puntos de este conjunto se pueden separar por abiertos de $X_{\alpha+1}$. Por otra parte, si $x \in \coprod_n X^n_\alpha$, digamos $x \in X^k_\alpha$, entonces x se puede separar de $\bar{a}$ por medio de los abiertos siguientes de $X_{\alpha+1}$:

$V_1 = X^k_\alpha$, que es abierto en $\coprod_n X^n_\alpha$ y por lo tanto en $X_{\alpha+1}$,

$V_2 = (\coprod_{n>k} X^n_\alpha) \cup \{\bar{a}\}$, que cumple las propiedades (a) y (b) en la definición de vecindad de a.

DEFINICION 2. $Y'_\beta = \coprod_n Y^n_\beta$ para $\beta \leqslant \alpha$; $Y'_{\alpha+1} = X_{\alpha+1}$.

De esta manera $\bigcup_{\beta\leqslant\alpha} Y'_\beta = \bigcup_{\beta\leqslant\alpha}\coprod_n Y^n_\beta = \coprod_n \bigcup_{\beta\leqslant\alpha} Y^n_\beta =$ $\coprod_n X^n_\alpha$ y por lo tanto:

$$X_{\alpha+1} = \bigcup_{\beta\leqslant\alpha+1} Y'_\beta .$$

Es claro que para $\beta < \alpha$:

$$Y'_\beta = \coprod_n Y^n_\beta \subsetneq \coprod_n Y^n_{\beta+1} = Y'_{\beta+1}.$$

También vale para α:

$$Y'_\alpha = \coprod_n Y^n_\alpha = \coprod_n X^n_\alpha \subsetneq X_{\alpha+1} = Y'_{\alpha+1} .$$

Además, para β límite debemos tener $\beta < \alpha$ y así

$$Y'_\beta = \coprod_n Y^n_\beta = \coprod_n \bigcup_{\gamma<\beta} Y^n_\gamma = \bigcup_{\gamma<\beta}\coprod_n Y^n_\gamma = \bigcup_{\gamma<\beta} Y'_\gamma .$$

Para concluir que $X_{\alpha+1}$ satisface el teorema sólo queda por demostrar

$$(Y'_\beta)^s = Y'_{\beta+1} \qquad \beta \leqslant \alpha . \tag{4}$$

Para ésto necesitamos dos lemas.

LEMA 3. *Si* $\beta < \alpha$ *entonces* $\bar{a} \notin (Y'_\beta)^s$.

Demostración. Sea (x_i) una sucesión en $Y'_\beta = \coprod_n Y^n_\beta$. Si (x_i) esta contenida en $\coprod_{n\leqslant k} Y^n_\beta$ para algún k entonces la vecindad de $\bar{a}$:

$$(\coprod_{n>k} X^n_\alpha) \cup \{\bar{a}\}$$

excluye todos los términos de la sucesión. Si, en cambio, existen $n_o < n_1 < n_2 < \ldots$ tales que $Y_\beta^{n_o}$, $Y_\beta^{n_1}$, $Y_\beta^{n_2}, \ldots$ tienen puntos de la sucesión, podemos formar otra sucesión (y_n) que contenga una infinidad de términos de (x_i) y tal que $y_n \in Y_\beta^n$ para todo n, entonces $X_\alpha^n \setminus \{y_n\}$ es abierto en X_α^n (por ser Hausdorff éste espacio) y contiene a $X_\alpha^n \setminus Y_\beta^n$. Por lo tanto

$$(\coprod_n (X_\alpha^n \setminus \{y_n\})) \cup \{\bar{a}\}$$

es una vecindad de $\bar{a}$ que excluye una infinidad de términos de (x_i). Con esto hemos probado que $x_n \not\to \bar{a}$.

LEMA 4. $\bar{a} \in (\coprod_n X_\alpha^n)^s$.

Demostración. Debemos considerar dos casos:

A. *α es sucesor*, es decir $\alpha = \lambda+1$. Escoja $x_n \in X_\alpha^n \setminus Y_\lambda^n$, estos conjuntos no son vacíos por las hipótesis sobre X_α. Cada vecindad V de $\bar{a}$ debe contener $\coprod_{n \geqslant k} (X_\alpha^n \setminus Y_\beta^n)$ para algún $k < \omega$ y algún $\beta < \alpha$. Entonces $\beta \leqslant \lambda$ lo cual implica $Y_\beta^n \subseteq Y_\lambda^n$ y por lo tanto:

$$V \supseteq \coprod_{n \geqslant k} (X_\alpha^n \setminus Y_\lambda^n) \supseteq \{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\}$$

y así $x_n \to \bar{a}$.

B. *α es un ordinal límite*. Como $\alpha < \omega_1$ existe una sucesión enumerable creciente de ordinales $\beta_1 < \beta_2 < \ldots$ tal que $\alpha = \sup_n \beta_n$. Escoja $x_n \in X_\alpha^n \setminus Y_{\beta_n}^n$. Si V es una vecindad de $\bar{a}$, debe contener $\coprod_{n > k} (X_\alpha^n \setminus Y_\beta^n)$ para ciertos k y $\beta < \alpha$. Tomamos $M < \omega$ tal que $\beta \leqslant \beta_M < \alpha$ y $k < M$. Entonces para $r > M$ tenemos

$\beta \leqslant \beta_M < \beta_r < \alpha$, $r \geqslant k$, y por lo tanto

$$V \supseteq X_\alpha^r \setminus Y_\beta^r \supseteq X_\alpha^r \setminus Y_{\beta_r}^r \ .$$

Así $V \supseteq \{x_M, x_{M+1}, \ldots\}$, lo cual muestra que $x_n \to \bar{a}$.

Ahora podemos demostrar (4). Sea $\beta < \alpha$; como $\bar{a} \notin (Y'_\beta)^s$ por el Lema 3, entonces $(Y'_\beta)^s \subseteq \coprod_n X_\alpha^n$. Como este último conjunto con la topología coproducto es un subespacio de $X_{\alpha+1}$ entonces, por el Lema 1 (a):

$$(Y'_\beta)^s(X_{\alpha+1}) = (Y'_\beta)^s(\coprod_n X_\alpha^n) \ .$$

Con ésto y el Lema 2 (b) concluimos que en $X_{\alpha+1}$ vale

$$(Y'_\beta)^s = (\coprod_n Y_\beta^n)^s = \coprod_n (Y_\beta^n)^s = \coprod_n Y_{\beta+1}^n = Y'_{\beta+1} \ .$$

Finalmente, por el Lema 4

$$(Y'_\alpha)^s = (\coprod_n X_\alpha^n)^s = (\coprod_n X_\alpha^n) \cup \{\bar{a}\} = X_{\alpha+1} = Y'_{\alpha+1} \ .$$

Con esto acabamos de demostrar (4) y termina la demostración de que $X_{\alpha+1}$ satisface el Teorema 2.

Parte II. *Construcción de X_α para α límite.* Sea $\alpha \leqslant \omega_1$ un ordinal límite y suponga que para cada $\gamma < \alpha$ se ha construído el espacio

$$X_\gamma = \bigcup_{\beta \leqslant \gamma} Y_\beta^\gamma$$

de manera que satisfaga el Teorema. Entonces $Y_\beta^\gamma \subsetneq Y_{\beta+1}^\gamma = (Y_\beta^\gamma)^s$ para todo $\beta < \gamma$, y $Y_\gamma^\gamma = X_\gamma$. Podemos definir $Y_\beta^\gamma = X_\gamma$ para $\beta \geqslant \gamma$ y escribir:

$$X_\gamma = \bigcup_{\beta \leqslant \alpha} Y_\beta^\gamma \ .$$

De esta manera tenemos para cualquier β, $Y_\beta^\gamma \subseteq Y_{\beta+1} = (Y_\beta^\gamma)^s$.

DEFINICION 3. $X_\alpha = \coprod_{\gamma<\alpha} X_\gamma$ (espacio coproducto) y para cada $\beta \leqslant \alpha$, $Y_\beta = \coprod_{\gamma<\alpha} Y_\beta^\gamma$.

Con esta definición X_α es un espacio de Hausdorff (Lema 2 (a)) y $X_\alpha = \coprod_{\gamma<\alpha} \bigcup_{\beta\leqslant\alpha} Y_\beta^\gamma = \bigcup_{\beta\leqslant\alpha} \coprod_{\gamma<\alpha} Y_\beta^\gamma = \bigcup_{\beta\leqslant\alpha} Y_\beta$. Además, para $\beta < \alpha$

$$Y_\beta^s = (\coprod_{\gamma<\alpha} Y_\beta^\gamma)^s = \coprod_{\gamma<\alpha} (Y_\beta^\gamma)^s = \coprod_{\gamma<\alpha} Y_{\beta+1}^\gamma = Y_{\beta+1}$$

por el Lema 2 (b); y como $Y_\beta^{\beta+1} \subsetneq Y_{\beta+1}^{\beta+1}$ entonces

$$Y_\beta = \coprod_{\gamma<\alpha} Y_\beta^\gamma \subsetneq \coprod_{\gamma<\alpha} Y_{\beta+1}^\gamma = Y_{\beta+1}.$$

Finalmente para β límite tenemos

$$Y_\beta = \coprod_{\gamma<\alpha} Y_\beta^\gamma = \coprod_{\gamma<\alpha} \bigcup_{\delta<\beta} Y_\delta^\gamma = \bigcup_{\delta<\beta} \coprod_{\gamma<\alpha} Y_\delta^\gamma = \bigcup_{\delta<\beta} Y_\delta.$$

Con esto demostramos que $X_\alpha = \bigcup_{\beta\leqslant\alpha} Y_\beta$ satisface el Teorema 2. ▲

Hemos terminado la demostración del Teorema 2. Demostramos ahora que los X_α se pueden tomar 0-enumerables. Esto no es necesario para nuestros propósitos pues si $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta$ satisface el teorema con la topología τ también lo satisface con la topología 0-enumerable $J(\tau)$. Sin embargo es interesante comprobar que las topologías que hemos construído son ya 0-enumerables.

TEOREMA 3. *Si* X_o *es 0-enumerable todos los espa* *cios* X_α *son* 0-*enumerables*.

<u>*Demostración*</u>. Suponga que X_o es 0-enumerable, por ejemplo el espacio de un solo punto. Demostramos por inducción en α que cada X_α es 0-enumerable. Si α es un ordinal límite y X_γ es 0-enumerable para cada $\gamma < \alpha$ entonces $X_\alpha = \coprod_{\gamma<\alpha} X_\gamma$ es 0-enumerable por el Lema 2 (c). Probamos ahora que si X_α es 0-enumerable $X_{\alpha+1}$ también lo es. Si X_α es 0-enumerable entonces $\coprod_n X_\alpha^n$ lo es por el Lema 2 (c). Sea A secuencialmente cerrado en $X_{\alpha+1} = (\coprod_n X_\alpha^n) \cup \{\bar{a}\}$.

Caso 1. $\bar{a} \in A$, entonces $A' = A \cap (\coprod_n X_\alpha^n)$ es secuencialmente cerrado *en* $\coprod_n X_\alpha^n$ por el Lema 1 (b). Por lo tanto, A' es cerrado y $\coprod_n X_\alpha^n \setminus A'$ es abierto *en* $\coprod_n X_\alpha^n$. En conclusión $X_{\alpha+1} \setminus A = \coprod_n X_\alpha^n \setminus A'$ es abierto en $X_{\alpha+1}$ y A es cerrado en $X_{\alpha+1}$.

Caso 2. $\bar{a} \notin A$, entonces $A = A \cap (\coprod_n X_\alpha^n)$ es secuencialmente cerrado y por lo tanto cerrado en $\coprod_n X_\alpha^n$. De aquí resulta que $\coprod_n X_\alpha^n \setminus A$ es abierto *en* $\coprod_n X_\alpha^n$. Sea $\beta_1, \beta_2, \ldots$ una sucesión creciente de ordinales tal que $\alpha = \sup_n \beta_n$. Como $\bar{a} \notin A^s = A$, debe existir k tal que $A \cap (\coprod_{n \geqslant k} X_\alpha^n \setminus Y_{\beta_k}^n) = \phi$, de lo contrario se podría escoger $x_n \in A \cap (X_\alpha^n \setminus Y_{\beta_n}^n)$ de tal manera que $x_n \to \bar{a}$. Esto significa que $(\coprod_n X_\alpha^n \setminus A) \supseteq \coprod_{n \geqslant k} (X_\alpha^n \setminus Y_{\beta_k}^n)$ y por lo tanto $X_{\alpha+1} \setminus A = (\coprod_n X_\alpha^n \setminus A) \cup \{\bar{a}\}$ es abierto en $X_{\alpha+1}$. En conclusión A es cerrado en $X_{\alpha+1}$. ▲

Si $X_\alpha = \bigcup_{\beta \leqslant \alpha} Y_\beta$ es un espacio que satisface el Teorema 2, entonces es claro que $Y_\beta = L^\beta(Y_o)$ para todo $\beta \leqslant \alpha$. En particular, $X_\alpha = L^\alpha(Y_o) \subseteq \overline{Y}_o$ y por lo tanto Y_o es denso en X. Un simple examen de la construcción permite mostrar que si X_o se toma discreto entonces *cada* Y_o es discreto. Además, si X_o se toma enumerable, X_α es enumerable para $\alpha < \omega_1$ mientras que X_{ω_1} tiene cardinal ω_1. Tenemos pues:

COROLARIO. *Para cada ordinal* $\alpha \leq \omega_1$ *existe un espacio* 0-*enumerable* X_α *con un subconjunto denso* A *tal que* $A \subsetneq L^\beta(A) \subsetneq L^\delta(A) \subsetneq X_\alpha$ *si* $\beta < \delta < \alpha$, *y* $L^\alpha(A) = X_\alpha$ (*El espacio* X_α *puede tomarse enumerable si* $\alpha < \omega_1$ *y de cardinal* ω_1 *si* $\alpha = \omega_1$, *el conjunto* A *puede tomarse discreto*).

Finalizamos, observando que si el conjunto X_o se toma de cardinal $\kappa \geq \omega_1$ entonces todos los espacios X_α son de cardinal κ. Así que tenemos ejemplos en todas las cardinalidades posibles.

§3 Rango secuencial. Dado un sobconjunto A de un espacio X podemos definir

$$r(A) = \min \beta(L^{\beta+1}(A) = L^\beta(A)),$$

el mínimo número de pasos necesarios para construír un conjunto secuencialmente cerrado (ó $\overline{A}$ en el caso de que X sea 0-enumerable) añadiendo límites de sucesiones a A. Sabemos por el Teorema 1 (§1) que $r(A) \leq \omega_1$ y del Teorema 2 (§2) que para cada ordinal $\alpha \leq \omega_1$ existen ejemplos en donde $r(A) = \alpha$. Definimos ahora

$$R(X) = \sup\{r(A) \mid A \subseteq X\}$$

el *rango secuencial* del espacio X. Sabemos entonces que $R(X) \leq \omega_1$. En espacios 1-enumerables

$R(X) \leqslant 1$ pues $L^1(A) = A^s$ es cerrado. $R(X) = 0$ sí y sólo si $L^1(A) = A^s = A$ para todo A, es decir todo subconjunto es secuencialmente cerrado; esto sucede sí y sólo si las únicas sucesiones convergentes de X son las finalmente constantes. Para los espacios X_α de la sección anterior tenemos $R(X_\alpha) \geqslant \alpha$. En particular $R(X_{\omega_1}) = \omega_1$, esto se puede generalizar:

TEOREMA 3. *Si* X_o *es un espacio discreto, entonces* $R(X_\alpha) = \alpha$ *para todo* $\alpha \leqslant \omega_1$.

Demostración. Basta mostrar por inducción transfinita que $r(A) \leqslant \alpha$ para todo $A \subseteq X_\alpha$. Para X_o es obvio pues todo subconjunto es cerrado.

(i) Suponga que α es límite y cada X_γ con $\gamma < \alpha$ tiene la propiedad de que $r(S) \leqslant \gamma$ para todo subconjunto S. Si $A \subseteq X_\alpha = \coprod_{\gamma<\alpha} X_\gamma$, entonces

$$L^\alpha(A) = L^\alpha(\coprod_{\gamma<\alpha}(A \cap X_\gamma)) = \coprod_{\gamma<\alpha} L^\alpha(A \cap X_\gamma)(X_\gamma) \quad (1)$$

por una obvia extensión (por inducción) del Lema 2 (b), §1 . Como $r(A \cap X_\gamma) \leqslant \gamma < \alpha$ en X_γ por hipótesis de inducción, entonces $L^\gamma(A \cap X_\gamma) = L^\alpha(A \cap X_\gamma)$ es secuencialmente cerrado en X_γ para todo $\gamma < \alpha$. Por el mismo Lema 2 (b), $L^\alpha(A)$ debe ser secuencialmente cerrado, es decir $r(A) \leqslant \alpha$ en X_α.

(ii) Suponga ahora que X_α satisface $r(S) \leqslant \alpha$ para todo subconjunto S y sea $A \subseteq X_{\alpha+1} = (\coprod_n X_\alpha^n) \cup \{\bar{a}\}$. Llamemos B a $\coprod_n X_\alpha^n$.

Caso 1. $\bar{a} \notin A$, es decir $A \subseteq B$, entonces tenemos como en la primera parte de esta prueba que

$r(A) \leqslant \alpha$ en B y así

$$L^{\beta+1}(A)(B) = L^{\beta}(A)(B), \text{ para todo } \beta \geqslant \alpha. \quad (2)$$

Extendiendo por inducción el Lema 1 (b), §1, tenemos para todo β:

$$L^{\beta}(A)(B) = L^{\beta}(A)(X_{\alpha+1}) \cap B = L^{\beta}(A)(X_{\alpha+1}) \setminus \{\bar{a}\}. \quad (3)$$

Combinando (2) y (3), $L^{\beta+1}(A) \setminus \{\bar{a}\} = L^{\beta}(A) \setminus \{\bar{a}\}$ en $X_{\alpha+1}$ y así

$$L^{\beta}(A) \subseteq L^{\beta+1}(A) \subseteq L^{\beta}(A) \cup \{\bar{a}\} \qquad \beta \geqslant \alpha. \quad (4)$$

Si $L^{\alpha}(A) = L^{\alpha+1}(A)$ entonces $r(A) \leqslant \alpha$ en $X_{\alpha+1}$.
Si $L^{\alpha}(A) \subsetneq L^{\alpha+1}(A)$ entonces $L^{\alpha+1}(A) = L^{\alpha}(A) \cup \{\bar{a}\}$ por (4); pero también por (4), $L^{\alpha+1}(A) \subseteq L^{\alpha+2}(A) \subseteq L^{\alpha+1}(A) \cup \{\bar{a}\} = L^{\alpha+1}(A)$ y así $r(A) \leqslant \alpha+1$ en $X_{\alpha+1}$.

Caso 2. $\bar{a} \in A$, entonces $A = A' \cup \{\bar{a}\}$ con $\bar{a} \notin A'$. Es fácil ver que $A^{s} = (A' \cup \{\bar{a}\})^{s} = (A')^{s} \cup \{\bar{a}\}$ y en general $L^{\beta}(A) = L^{\beta}(A') \cup \{\bar{a}\}$, en $X_{\alpha+1}$. Como se probó en el Caso 1 que $L^{\alpha+2}(A') = L^{\alpha+1}(A')$, entonces $L^{\alpha+2}(A) = L^{\alpha+2}(A') \cup \{\bar{a}\} = L^{\alpha+1}(A') \cup \{\bar{a}\} = L^{\alpha+1}(A)$ y así $r(A) \leqslant \alpha+1$. ▲

COROLARIO. *Hay una cantidad no enumerable de topologías 0-enumerables no homeomorfas en el dominio de los números naturales.*

Demostración. Cada espacio X_{α} se puede tomar enumerable y por lo tanto se puede suponer que su dominio es $\mathbb{N}$, para todo $\alpha < \omega_1$. Como $R(X)$ es claramente un invariante topológico, $\alpha < \beta \leqslant \omega_1$ implica $R(X_{\alpha}) = \alpha \neq \beta = R(X_{\beta})$ de manera que X_{α} y X_{β} no pueden ser homeomorfos. ▲

Finalizamos con tres preguntas que consideramos interesantes.

1. ¿Cuál es el rango secuencial de los espacios no métricos del Análisis? Por ejemplo, si $X = (\ell_1, \tau_o)$ es el espacio de Banach de sucesiones reales (x_i) tales que $\Sigma|x_i| < \infty$, con la topología débil, de un teorema de Banach usado por Guillermo Restrepo en [2] resulta que $J(\tau_o) = \tau_N$, la topología de la norma. Como J preserva el rango, Podemos deducir entonces que $R(X) = 1$. Pero si $X = (E,\tau_o)$ es un espacio de Banach con la topología débil donde $J(\tau_o) < \tau_N$ no sabemos nada sobre $R(X)$.

2. ¿Cuál es el rango secuencial de $\beta(\mathbb{N})$, la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$?

3. Es fácil demostrar que los espacios X_α construídos en este artículo son altamente disconexos. Cada X_α, $\alpha \geqslant 1$, tiene infinitas componentes conexas. ¿Existen espacios conexos con propiedades similares a las de los X_α? ¿Existen espacios compactos de Hausdorff con las mismas propiedades?

***

BIBLIOGRAFIA

[1] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston 1966.

[2] Restrepo, S.G., *Convergencia de sucesiones en espacios de Banach*. Rev. Col. de Mat. XIII (1979) 155-169.

[3] Ruíz, S.C., *Topología o convergencia*. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, 1975.

[4] ———., "A propósito de la adherencia secuencial". Conferencia presentada en el IX Coloquio Colombiano de Matemáticas, Bucaramanga, Agosto 1979.

[5] Willard, S., *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, 1970.

***

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes
Apartado Aéreo 4976
Bogotá, COLOMBIA

(Recibido en enero de 1980)