Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XIV (1980) págs. 131 - 172

ALGUNAS PROPIEDADES DE REGULARIDAD DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES COMPLEJAS

por

Jaime RODRIGUEZ MONTES

ABSTRACT. Two classes of differential operators, one defined by analytic functions the other by formal series, are introduced; we call them pseudo-differential operators. As auxiliary tools, and with the help of two duality theorems (formal series vs. polynomials, entire functions vs. entire functions of exponential type) and some homological algebra technics (Euler-Poincaré characteristic of a chain-complex, exact homology of a chain-complex, exact homology sequence of an exact short sequence of complexes), these operators are used to establish some regularity theorems for differential equations in the complex domain.

INTRODUCCION. El propósito de este trabajo es mostrar como las mismas técnicas homológicas usadas en [3], [9], [10]: exactitud del functor límite inductivo, sucesión exacta de cohomología correspondiente a una sucesión exacta corta de complejos, característica de Euler-Poincaré de un complejo, y dos teoremas de dualidad ($F^* = P$ y $P^* = F$, $O^* = E$ y $E^* = O$), conducen a algunos teoremas de regularidad (teoremas de la forma: $Pf = g$ en E y $g \in F \subseteq E$, entonces $f \in F$) en el campo de las ecuaciones diferenciales lineales complejas.

En el Capítulo I examinaremos los resultados clásicos que necesitaremos en este trabajo; en particular, los teoremas de dualidad mencionados; procuraremos, sin embargo, ser más directos que en los tratamientos usuales (ver [7], [15]). En el Capítulo II introduciremos una cierta clase de operadores que generalizan a los diferenciales, y que donominaremos pseudo-diferciales. En el Capítulo III, calcularemos las características de los complejos que nos interesan; estos son complejos de la forma

$$\mathcal{E} : O \to E \xrightarrow{P} E \to O \quad ,$$

en los cuales E es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{C}$, y P un operador lineal continuo tal que $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} P < +\infty$ y que $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Coker} P < +\infty$ ($\operatorname{Coker} P = E/P(E)$). Recordamos que la característica de Euler-Poincaré de un tal complejo está definida por:

$$\chi(E) = \dim \operatorname{Ker} P - \dim \operatorname{Coker} P = \operatorname{Ind} P,$$

y es por lo tanto, el *índice del operador* P. Cuando P(E) es, además, cerrado en E, se dirá que P es un *operador de Fredholm*.

En el Capítulo IV obtendremos los resultados fundamentales de este trabajo. La técnica básica para llegar a ellos es la sucesión exacta de cohomología, si tenemos tres complejos $E: 0 \to E \xrightarrow{P} E \to 0$, $E': 0 \to E' \xrightarrow{P'} E' \to 0$, $E'': 0 \to E'' \xrightarrow{P''} E'' \to 0$, tales que en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & E' & \xrightarrow{\varphi_1} & E & \xrightarrow{\psi_1} & E'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & E' & \xrightarrow{\varphi_2} & E & \xrightarrow{\psi_2} & E'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

las filas son exactas y los cuadrados son conmutativos (lo cual se expresa diciendo que la sucesión de complejos

$$0 \to E' \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} E'' \to 0$$

donde $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, *es exacta*) entonces

$$\chi(E') - \chi(E) + \chi(E'') = 0 .$$

Este trabajo es una versión revisada de la tesis presentada por el autor a la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia (Bogotá) en cumplimiento de requisitos parciales para obtener el título de Magister Scientiae en Matemáticas, y elaborada en el Departamento de Matemáticas y Estadística de dicha facultad bajo la dirección del profesor Jairo A. Charris. El autor expresa su agradecimiento al Profesor Charris por haber propuesto el tema, así como por su ayuda permanente durante el desarrollo del mismo. Estos agradecimientos son también extensivos al Profesor Yu Takeuchi, cuyas sugerencias contribuyeron a mejorar algunas de las estimativas usadas.

CAPITULO I. NOTACIONES Y RESULTADOS BASICOS

Si Ω es un abierto del plano complejo $\mathbb{C}$, $\mathcal{O}(\Omega)$ denotará al $\mathbb{C}$-espacio de las funciones holomorfas en Ω. Escribiremos $\mathcal{O}$ en lugar de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$. Con F denotaremos al álgebra de las series formales sobre $\mathbb{C}$; P será la subalgebra de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$, y P_n el subespacio de P de los polinomios de grado menor o igual que n; E designará al subespacio de $\mathcal{O}$ de las funciones analíticas de tipo exponencial (es decir, de las funciones $f \in \mathcal{O}$ tales que $|f(z)| \leqslant Ae^{B|Z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$, donde $A,B \geqslant 0$ son constantes); E_B será el subespacio de E de las funciones $f \in E$ tales que para algún $A \geqslant 0$, $|f(z)| \leqslant Ae^{B|z|}$ para todo z. Por definición se tiene entonces que $E = \bigcup_{B\geqslant 0} E_B$. Con $\frac{d}{dz}$ denotaremos al operador usual de diferenciación compleja, y $\frac{d^k}{dz^k}$ será su iteración k-veces. Por un operador diferencial entenderemos un operador lineal de la forma

$$P(z,\frac{d}{dz})f = \sum_{k=0}^{m} a_k(z)\frac{d^k f}{dz^k} ,$$

donde las a_k, $0 \leqslant k \leqslant m$, son holomorfas en Ω.

Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\eta(f,\Omega)$ designará, contadas las multiplicidades, el número de ceros que f tiene en Ω. Si $a \in \Omega$, $\eta(f,a)$ denotará el orden del 0 que f tiene en a (si $f(a) \neq 0$, $\eta(f,a) = 0$; y $\eta(f,a) = +\infty$ si y sólo si $f = 0$ en la componente conexa de Ω que contiene a a); ∂p será el grado de $p \in P$ ($\partial p = -\infty$ si y sólo si $p = 0$).

Sobre $\mathcal{O}(\Omega)$ consideraremos la topología de la convergencia en compactos, definida por las seminormas

$$|f|_K = \sup_{z \in K} |f(z)| ,$$

donde K es un subconjunto compacto de Ω. Si $\{K_n\}$ es una sucesión exhaustiva de compactos de Ω los seminormas $\{|\ |_{K_n}\}$ definen aún tal topología. Con ella, $\mathcal{O}(\Omega)$ es un espacio de Fréchet. Si en E_B definimos

$$\|f\|_B = \inf\{A: |f(z)| \leqslant Ae^{B|z|} \text{ para todo } z\},$$

entonces E_B es un espacio de Banach. Sobre E consideraremos la topología limite inductivo (ver [8], [12]) de las de los E_B. Esta es la topología separada y localmente convexa sobre E más fina posible que deja continuas las inclusiones de E_B en E. Un sistema fundamental de vecindades de 0 para tal topología sobre E está dado por los conjuntos convexos, equilibrados y absorbentes, V, tales que para todo B, $V\cap E_B$ es una vecindad de 0 en E_B. Para que una aplicación lineal $g: E \to E$, donde E es un espacio vectorial topológico localmente convexo arbitrario, sea continua es entonces necesario y suficiente que g/E_B sea una aplicación continua de E_B en E. Como cada E_B es de Banach, E es límite inductivo de espacios de Fréchet. Sin embargo, no es límite inductivo estricto de tales espacios.

Sobre P_n consideraremos la única topología posible definida por cualquiera de las normas usuales, y sobre P la topología límite inductiva de la de los P_n. Si E es un espacio vectorial topológico y $g: P \to E$ es lineal, g/P_n es continua para todo n; por lo tanto g también lo es. Se deduce que si M es un subespacio de P, N es su suplemento algebráico y $p: P \to P$ es la proyección sobre N, p es continua y M = Ker P es cerrado. Como la topología inducida por P sobre cada P_n es la topología de P_n, P es un espacio del tipo LF (limite inductivo estricto de espacios de Fréchet).

En F consideraremos la topología definida de la siguiente manera: si $F = \{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ es un subconjunto finito y no vacío de $\mathbb{N}$, y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pertenece a F, definimos

$$|f|_F = \operatorname*{Sup}_{0\leqslant i\leqslant p} |a_{n_i}| = \operatorname*{Sup}_{0\leqslant i\leqslant p} \frac{1}{n_i!} |f^{(n_i)}(0)|.$$

Entonces $|\ |_F$ es una seminorma sobre F. La topología de F será la definida por la familia $\{|\ |_F\}$ cuando F recorra las partes finitas no vacías de $\mathbb{N}$. Esta topología se puede definir también por medio de la familia $\{| \ |_F\}$ cuando F recorre los conjuntos de la forma $F_n = [0,n] = \{K | 0 \leq K \leq n\}$. Es evidente que P es denso en F para esta topología.

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ escribimos $| \ |_n = | \ |_{F_n}$, entonces $d: F \times F \to \mathbb{R}$, definida por

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f-g|_n}{1+|f-g|_n} , \tag{1.1}$$

es una métrica sobre F, la cual define la anterior topología y para la cual F es de Fréchet.

Para cada pareja $f \in E$, $g \in O$, considérese la expresión

$$\langle f,g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) g^{(n)}(0) . \tag{1.2}$$

Si $R > 0$, la estimativa de Cauchy $\|f^{(n)}(0)\| \leq \|f\|_B \frac{n! e^{BR}}{R^n}$ asegura que

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{\|f\|_B} \right|^{1/n} \leq \left(\frac{n! e^{BR}}{R^n}\right)^{1/n} .$$

Haciendo $R = n$, concluimos que

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{\|f\|_B} \right|^{1/n} \leq e^B \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n} .$$

Como $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n} = 1/e$, se deduce que la sucesión de término general $(f^{(n)}(0)/\|f\|_B)^{1/n}$ es acotada. Sean entonces $R, M \geq 0$, con $R > M$ y $|f^{(n)}(0)| \leq \|f\|_B M^n$ para todo n. Si $K = \bar{B}(0,R)$ y $|g|_K = \sup_{|z| \leq R} |g(z)|$, una nueva aplicación de las estimativas de Cauchy muestra que

$$|g^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!}{R^n}|g|_K .$$

Pero entonces,

$$\begin{aligned}|\langle f,g\rangle| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)||g^{(n)}(0)| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\|f\|_B \frac{M^n n!}{R^n}|g|_K = \|f\|_B |g|_K \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{M}{R})^n .\end{aligned}$$

De la convergencia de la última serie se deduce que existe una constante $C_{K,B}$, dependiente únicamente de B y del compacto K, tal que

$$|\langle f,g\rangle| \leqslant C_{K,B}\|f\|_B |g|_K . \tag{1.3}$$

Sean entonces $\mathcal{O}^*$ y $\mathcal{E}^*$, respectivamente, los duales topológicos de $\mathcal{O}$ y $\mathcal{E}$, para las topologías definidas anteriormente.

Para cada $f \in \mathcal{E}$ denotemos con T_f a la aplicación de $\mathcal{O}$ en $\mathbb{C}$ dada por (1.2):

$$T_f(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\bar{f}^{(n)}(0)g^{(n)}(0) ,$$

y supongamos, más precisamente, que $f \in \mathcal{E}_B$, $B \geqslant 0$. La relación (1.3) muestra entonces que $T_f \in \mathcal{O}^*$ y que existe un compacto K de $\mathbb{C}$ tal que

$$|T_f(g)| \leqslant C_{K,B}\|f\|_B |g|_K$$

para toda $g \in \mathcal{O}$, con $C_{K,B}$ dependiente unicamente de K y de B (y no de g). Podemos definir entonces una aplicación $T:\mathcal{E} \to \mathcal{O}$ por $T(f) = T_f$.

TEOREMA 1.1. *La aplicación T es lineal y biyectiva. Si sobre $\mathcal{O}^*$ consideramos la topología débil, T es continua. Por lo tanto, si identificamos a E con $\mathcal{O}^*$ mediante T, la topología débil de $\mathcal{O}$ es menos fina que la topología de E.*

Demostración. Sea $g^* \in \mathcal{O}^*$. Para algún compacto K de $\mathbb{C}$ y alguna constante C_K, se tiene que $|g^*(g)| \leq C_K |g|_K$ para toda $g \in \mathcal{O}$. Sea $R > 0$ tal que $K \subseteq B(0,R)$. Entonces

$$|g^*(z^n)| \leq C_K \operatorname{Sup}_{z \in K} |z^n| < C_K \operatorname{Sup}_{|z| \leq R} |z^n| < C_K R^n .$$

Definamos

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{g^*(z^n)}{n!} z^n .$$

Como

$$|f(z)| \leq \sum_{n=o}^{\infty} \frac{C_K (R|z|)^n}{n!} = C_K e^{R|z|}$$

se deduce que $f \in E$.

De la continuidad de g^* y de la convergencia en compactos de la serie de Taylor de g, se deduce que

$$T_f(g) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) g^{(n)}(o) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} g^*(z^n) g^{(n)}(0)$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} g^*\left(\frac{1}{n!} g^{(n)}(0) z^n\right) = g^*\left(\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) z^n\right)$$

$$= g^*(g).$$

y por lo tanto, $g^* = T_f$. La aplicación T es entonces sobreyectiva. Si $T_{f_1} = T_{f_2}$, $\langle f_1 - f_2, g \rangle = 0$ para toda $g \in \mathcal{O}$. Con n arbitrario, y $g(z) = z^n$, se concluye que $f_1^{(n)}(0) = f_2^{(n)}(0)$ y, de ésto, que $f_1 = f_2$. Es decir, T es uno a uno. Finalmente, de (1.3), con $f \in E_B$, $g \in \mathcal{O}$, tenemos que

$$|T_f(g)| \leq C_{K,B}|g|_K)\|f\|_B \quad ,$$

lo cual muestra que la seminorma $g^* \mapsto |g^*(g)|$ de $\mathcal{O}^*$, calculada en T_f, está acotada por $\|f\|_B$. Esto implica que $T/E_B : E_B \to \mathcal{O}^*$ es continua cuando se da a $\mathcal{O}^*$ la topología débil, y asegura, por lo tanto, la continuidad de T. Como T es claramente lineal, el teorema queda demostrado. ▲

Para cada $g \in \mathcal{O}$, sea Lg la aplicación de E en $\mathbb{C}$ definida por (1.2), $L_g(f) = \langle f,g \rangle$. La relación (1.3) muestra también que, para todo $B \geqslant 0$, Lg es una aplicación lineal continua de E_B en $\mathbb{C}$. Por lo tanto, $Lg \in E^*$. Más aún:

TEOREMA 1.2. *La aplicación* $L:\mathcal{O} \to E^*$ *definida por* $L(g) = Lg$ *es lineal y biyectiva. Si sobre* E^* *consideramos la topología débil,* L *es continua. Por lo tanto, si identificamos a* $\mathcal{O}$ *con* E^* *mediante* L, *la topología débil de* E^* *en* $\mathcal{O}$ *es menos fina que la topología de* $\mathcal{O}$.

Demostración. Sea $f^* \in E^*$, y definînamos

$$g(z) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^*(z^n)}{n!} z^n \quad .$$

Como $\frac{1}{n!}|Bz|^n \leqslant e^{B|z|}$ para todo $B > 0$ y todo $z \in \mathbb{C}$, se deduce que $\|z^n\|_B \leq n!/B^n$ para todo $B > 0$. De la continuidad de f^* en $\mathcal{E}_B$ se tiene que $|f^*(z^n)| \leq C_B\|z^n\|_B$, donde C_B depende unicamente de B. Sea $z \in \mathbb{C}$. Con $B > |z|$, tenemos que

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{|f^*(z^n)||z|^n}{n!} \leq C_B \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\|z^n\|_B|z|^n}{n!} \leq C_B \sum_{n=o}^{\infty} (\frac{|z|}{B})^n < \infty ,$$

de lo cual la serie converge uniforme y absolutamente en compactos de $|z| < B$. Se deduce que $g \in \mathcal{O}$. Sea $f \in \mathcal{E}_B$. Entonces

$$f^*(f) = f^*(\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)z^n) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)f^*(z^n)$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)g^{(n)}(0) = \langle f,g\rangle .$$

En efecto, f^* es continua y la sucesión $\sum_{k=o}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$ tiende a f en $\mathcal{E}_{\alpha B}$ para todo $\alpha > 1$, de lo cual también en $\mathcal{E}$. Para demostrar la ultima afirmación, nótese que de las estimativas de Cauchy con radio $\alpha|z|$, $z \neq 0$, se tiene que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)z^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{e^{\alpha B|z|}}{(\alpha|z|)^k}k!\|f\|_B|z|^K$$

$$=\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} (\frac{1}{\alpha})^k\right\} \|f\|_B e^{\alpha B|z|} ,$$

y esta estimativa es también válida si $z = 0$. Se deduce entonces que

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)z^k\right\|_{\alpha B} \leq \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} (\frac{1}{\alpha})^k\right\} \|f\|_B \xrightarrow{n\to\infty} 0 ,$$

lo cual implica la afirmación.

Como $f^*(f) = \langle f,g\rangle$, tenemos que $f^* = Lg$. Así que L es sobreyectiva, y es claro que L es uno a uno. Además, como

$$|Lg(f)| \leq (C_{K,B}\|f\|_B)|g|_K \quad ,$$

se deduce que la seminorma $f^* \mapsto |\langle f^*,f\rangle|$ de E^*, calculada en Lg, está acotada por $|g|_K$. Esto demuestra la continuidad de L, y completa la demostración del Teorema. ▲

COROLARIO. *El par (E,O) es un par dual. El paréntesis de la dualidad, $\langle\ \rangle$, está dado por la siguiente aplicación de $E\times O$ en $\mathbb{C}$:*

$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)g^{(n)}(0) \quad ,$$

de tal manera que $O^* = E$ y $E^* = O$.

Para cada pareja $f\in P$, $g\in F$, definamos también

$$\langle f,g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)g^{(n)}(0). \tag{1.4}$$

Como la suma en el término de la derecha es finita, $\langle ,\rangle$ define una aplicación de $P\times F$ en $\mathbb{C}$. Para cada $f\in P$, sea $T_f : F \to \mathbb{C}$ dada por $T_f(g) = \langle f,g\rangle$. Evidentemente T_f es lineal y

$$|T_f(g)| \leq \left\{ \sum_{n=0}^{m} |f^{(n)}(0)| \right\} |g|_m \quad ,$$

donde $m = \partial f$ si $f \neq 0$, $m = 0$ si $f = 0$.

Si sobre P_m consideramos la norma

$$\|f\|_m = \sum_{n=o}^{m} |f^{(n)}(0)|$$

la relación anterior puede escribirse

$$|T_f(g)| \leq \|f\|_m |g|_m .$$

Esta relación implica que $T_f \in F^*$, donde F^* es el dual topológico de F. Podemos definir entonces una aplicación lineal $T:P \to F^*$ por $T(f) = T_f$, y si dotamos a F^* de su topología débil, T es continua, pues la seminorma $f^* \mapsto |\langle f^*, g\rangle|$ de F^* calculada en T_f está acotada por $\|f\|_m$. Como se verifica fácilmente, T es biyectiva. Por lo tanto

TEOREMA 1.3. *La aplicación* $T:P \to F$ *es biyectiva. Si identificamos a* F^* *con* P *mediante* T, *la topología débil de* F^* *en* P *es menos fina que la topología de* P.

Para cada $g \in F$, sea a su vez $Lg:P \to \mathbb{C}$, definido por $Lg(f) = \langle f,g\rangle$. Entonces $Lg \in P^*$, y podemos definir una aplicación lineal $L:F \to P^*$ por $L(g) = Lg$. Como es evidente, L es biyectiva y como

$$|Lg(f)| \leq \|f\|_m |g|_m ,$$

se deduce que la seminorma $f^* \mapsto |f^*(f)|$ de P^*, calculada en Lg, está acotada por $|g|_m$. por lo tanto L es continua. En total

TEOREMA 1.4. *La aplicación lineal* $L:F \to P^*$ *es biyectiva. Si identificamos a* P^* *con* F *mediante*

L, *la topología débil de* P^* *en* F *es menos fina que la topología de* F.

CAPITULO II. DOS CLASES DE OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIALES

Introducimos en este capítulo dos clases de operadores a los cuales, por falta de un nombre mejor, llamaremos pseudo-diferenciales. Como auxiliares, estos operadores jugarán en los capítulos III y IV un papel importante en el manejo de ciertos operadores diferenciales.

2.1. <u>Operadores pseudo-diferenciales definidos por funciones analíticas</u>. Sea $a(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$ una función analítica entera y consideremos la expresión diferencial

$$a(\frac{d}{dz}) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n \frac{d^n}{dz^n}.$$

Demostraremos que $a(\frac{d}{dz})$ determina un operador lineal continuo P de E en E tal que $P(E_B) \subseteq E_B$ para todo $B \geqslant 0$. Para ello definamos, si $f \in E_B$,

$$Pf(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n \frac{d^n f}{dz^n}(z) ,$$

y demostremos que la serie de la derecha define una función g en E_B.

Sean $z \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. De las estimativas de Cauchy

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{|z-t|=R} |f(t)| \leq \frac{n!}{R^n}\|f\|_B \sup_{|z-t|=R} e^{B|t|}$$

se deduce

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!\|f\|_B}{R^n} e^{B|z|} e^{BR} ,$$

dado que $|t| \leq |z| + R$, y tenemos para todo n:

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{\|f\|_B e^{B|z|}}\right|^{1/n} \leq \left(\frac{n! e^{BR}}{R^n}\right)^{1/n}$$

cualquiera que sea $R > 0$. En particular, si $R = n$

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{\|f\|_B e^{B|z|}}\right|^{1/n} \leq e^B\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{B-1} .$$

Existe entonces una constante $M > 0$, dependiente únicamente de B, tal que

$$|f^{(n)}(z)| \leq \|f\|_B e^{B|z|} M^n$$

para todo $n \geq 0$, así que, para todo $m \geq 0$

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n f^{(n)}(z)\right| \leq \left\{\sum_{n=m}^{\infty} |a_n| M^n\right\} \|f\|_B e^{B|z|} ,$$

de lo cual

$$\left|\sum_{n=m} a_n f^{(n)}(z)\right|_B < \left\{\sum_{n=m}^{\infty} |a_n| M^n\right\} \|f\|_B .$$

Pero $\bar{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n$ es una función analítica entera. Por lo tanto, $C(m,M) = \sum_{n=m}^{\infty} |a_n| M^n < +\infty$ para todo m y además $C(m,M) \to 0$ cuando $m \to \infty$. Esto garantiza que $\sum_{n=0}^{m} a_n f^{(n)}(z) \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}(z) = g(z)$ en E_B, y que $\|Pf\|_B = \|g\|_B \leqslant C(0,M)\|f\|_B$, de lo cual P es un operador lineal continuo de E_B en si mismo. Por lo tanto, $P: E \to E$ es continuo.

TEOREMA 2.1. *Identificando a E^* con O, el operador adjunto ${}^tP$ de P se identifica con el operador $P^*: O \to O$ definido por $P^*g = a.g$ para toda $g \in O$.*

<u>*Demostración*</u>. Todo se reduce a demostrar que

$$<Pf,g> = <f,a.g> \quad . \tag{2.1}$$

Veamos primero que para todo $k \geqslant 1$

$$<\frac{d^k f}{dz^k},g> = <f,z^k g> \quad .$$

Como

$$<\frac{d^k f}{dz^k},f> = <\frac{d}{dz}(\frac{d^{k-1} f}{dz^{k-1}}),g>$$

basta ver que

$$<\frac{df}{dz},g> = <f,z.g> \quad , \tag{2.2}$$

lo cual resulta inmediatamente de observar que $(zg)^{(n)}(0) = ng^{(n-1)}(0)$ si $n \geqslant 1$, y que $(zg)^{(0)}(0) = 0$. Teniendo en cuenta ahora el hecho de que la sucesión $\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(z)$ converge a

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}(z)$ en E_B, mientras que $\sum_{k=0}^{m} a_k z^k$ converge a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a(z)$ uniformemente en compactos, (2.1) resulta entonces de un cálculo simple. ▲

NOTA. Si identificamos a $\mathcal{O}^*$ con E, ${}^tP^*$, el conjugado de P^*, se idenfica con P. Esto resulta del hecho de que P^* es continuo para la topología de la convergencia en compactos de $\mathcal{O}$, y de la fórmula (2.1).

Sean ahora $f \in E$, $g \in \mathcal{O}$, $p \in P$, y $p(\frac{d}{dz}) : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ el operador diferencial definido por p. Entonces

$$\langle f, p(\frac{d}{dz})g\rangle = \langle p.f, g\rangle$$

pues, por simetría en la fórmula (2.2), también

$$\langle f, \frac{dg}{dz}\rangle = \langle zf, g\rangle .$$

Nótese al respecto que si $f \in E_B$ no podemos, en general, asegurar que $pf \in E_B$. Sin embargo, como $p \in E_\alpha$ para todo $\alpha > 0$, necesariamente $pf \in E_{B+\alpha}$ con $\|pf\|_{B+\alpha} \leq \|p\|_\alpha \|f\|_B$ para todo $\alpha > 0$, de lo cual $f \mapsto pf$ es un operador continuo de E en si mismo. Más precisamente

TEOREMA 2.2. *Sean $p \in P$ y $p(\frac{d}{dz}) : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ el operador diferencial definido por* p. *Entonces ${}^tp(\frac{d}{dz})$ se identifica con el operador $p^* : E \to E$ definido por $p^*(f) = pf$. Más aún, p^* es continuo para la topología de E y ${}^tp^*$ se identifica con $p(\frac{d}{dz})$.*

Los teoremas (2.1) y (2.2) suministran, conjuntamente, el teorema siguiente:

TEOREMA 2.3. *Sean* $p_1,\ldots,p_m \in P$, $a_1,\ldots,a_m \in \mathcal{O}$, *y considérense los operadores* $P:E \to E$, *y* $Q:\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ *definidos, respectivamente, por*

$$Pf(z) = \sum_{k=o}^{m} p_k(z)a_k(\frac{df}{dz})(z) ,$$

$$Qg(z) = \sum_{k=o}^{m} a_k(z)p_k(\frac{dg}{dz})(z) .$$

Entonces P *y* Q *son operadores lineales continuos. Además identificando a* E *con* $\mathcal{O}^*$ *y a* $\mathcal{O}$ *con* E^*, *tenemos que* ${}^tP = Q$ *y* ${}^tQ = P$.

NOTA. Obsérvese que Q es un operador diferencial en el sentido usual. Denominaremos a P un *operador pseudo-diferencial*. Nuestro principal interés será en los operadores pseudo-diferenciales de la forma

$$Pf = \sum_{k=o}^{m} z^k a_k(\frac{d}{dz})f .$$

En tal caso,

$${}^tPg = \sum_{k=o}^{m} a_k(z)\frac{d^k g}{dz^k}$$

es un operador diferencial en el sentido usual.

2.2. <u>Operadores pseudo-diferenciales definidos por series formales</u>. Sea $a \in F$, $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Si $f \in P$, es evidente que

$$a(\frac{d}{dz})f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d^k f}{dz^k} \in P .$$

Podemos definir entonces un operador lineal continuo P de P en sí mismo escribiendo

$$Pf = a(\frac{d}{dz})f .$$

Con la identificación $P^* = F$ del teorema (1.4), se obtiene, como antes, que ${}^tP$ es el operador de F en si mismo dado por

$${}^tPg = a.g .$$

Este operador es continuo, pues

$$|{}^tPg|_m \leq (m+1)|a|_m|g|_m \quad ,$$

y con la identificación $F^* = P$, se ve inmediatamente que ${}^t({}^tP) = P$.

De la misma manera, si $p(z) = a_o+a_1z+...+a_mz^m \in P$, y $Q:F \to F$ es el operador definido por

$$Qg = \sum_{k=o}^{m} a_k \frac{d^k g}{dz^k} \quad ,$$

donde $\frac{d^k g}{dz^k}$ es la derivada término a término de g hasta el orden k , entonces Q es lineal y continuo, con

$$|Qg|_n \leq C_{n,m}|g|_{n+m} ,$$

donde $C_{n,m} > 0$ es independiente de g. Entonces ${}^tQ : P \to P$ está dado por ${}^tQf = p.f$, es continuo, y ${}^t({}^tQ) = Q$. Más generalmente:

TEOREMA 2.4. *Sean* $p_1,\ldots,p_m \in P$, $a_1,\ldots,a_m \in F$. *Si consideramos los operadores* $P : P \to P$ *y* $Q : F \to F$ *definidos, respectivamente, por*

$$Pf = \sum_{k=o}^{m} p_k(z) a_k(\frac{d}{dz}) f$$

$$Qg = \sum_{k=o}^{m} a_k(z) p_k(\frac{d}{dz}) g$$

entonces P *y* Q *son operadores lineales continuos; con las idenficiaciones* $F^* = P$, $P^* = F$, *se tiene además que* ${}^tP = Q$ *y* ${}^tQ = P$.

Diremos que Q es un *operador diferencial* y que P es un *operador pseudo-diferencial*. Las clases más importantes de operadores pseudo-diferenciales en P son los de la forma

$$Pf = \sum_{k=o}^{m} z^k a_k(\frac{d}{dz}) f \ , \qquad a_k \in F \ ,$$

en cuyo caso,

$${}^tPg = \sum_{k=o}^{m} a_k(z) \frac{d^k g}{dz^k}$$

es un operador diferencial en el sentido usual.

2.3. Propiedades elementales de los operadores Pseudo-diferenciales. Antes de entrar a discutir las propiedades de índice de los operadores pseudo-diferenciales que hemos introducido, y cuya consideración será el objetivo del próximo capítulo, estudiaremos algunas propiedades elementales de tales operadores.

TEOREMA 2.5. *Sea* $a \in F$, $a \neq 0$, *y* $P : P \rightarrow P$ *el operador pseudo-diferencial definido por*

$$Pf = a(\frac{d}{dz})f \quad .$$

Entonces, P *es sobreyectivo. Si* $Q : F \rightarrow F$ *es el operador* $Qg = ag$, Q *es inyectivo,* ${}^tP = Q$, ${}^tQ = P$, *e* Im Q *es cerrada en* F. *Además,* Ker P *tiene dimensión* n, *donde* n *es el máximo de los* m *tales que* z^m *divide a* a(z) *en* F, *y* $\dim_{\mathbb{C}}\text{Coker } Q = n$.

Demostración. Es claro que $\text{Im } Q = (a(z)) = (z^n)$ (ver [1]) de lo cual $\text{Coker } Q = \{0\}$ si $n = 0$, $\text{Coker } Q = P_{n-1}$ si $n \geqslant 1$. Como F es de Fréchet, Q es un morfismo estricto (ver [13], N° 12) e Im Q es cerrada en F. Como Q es inyectivo, por ser F un dominio de integridad (ver [1]), Im P es denso en P para la topología débil de F^* en P. Como además (ver [13], N° 12) P es un morfismo estricto de P para esta topología, Im P es cerrado en P para ella, de lo cual Im P = P , y P es sobreyectivo. Finalmente, como

$$\text{Ker } P \simeq (\text{Im } Q)^{\perp} \simeq (F/\text{Im } Q)^* \quad .$$

se concluye que $\dim_{\mathbb{C}}\operatorname{Ker} P = n$. Esto demuestra el teorema. ▲

NOTA. El teorema anterior es particularmente útil si $a \in \mathcal{P}$, en cuyo caso P es un operador diferencial en el sentido usual. También es válido si $a \in \mathcal{O}$.

Si $a \in \mathcal{O}$, $a \neq 0$ y $\eta(a,\mathbb{C}) < +\infty$, entonces el ideal (a) generado por a en $\mathcal{O}$ es cerrado en $\mathcal{O}$ (ver [3]). Además, $\mathcal{O}/(a)$ tiene dimensión $\eta(a,C)$ (ver [2]). Tenemos entonces

TEOREMA 2.6. *Sean* $a \in \mathcal{O}$, $a \neq 0$, $(a,\mathbb{C}) < +\infty$, *y* P *el operador pseudo-diferencial de* E *en* E *definido por*

$$Pf = a(\frac{d}{dz})f .$$

Entonces P *es sobreyectivo y* $\dim_{\mathbb{C}}\operatorname{Ker} P = \eta(a,\mathbb{C})$.

Demostración. $P = {}^tQ$, donde Q es el operador de $\mathcal{O}$ en si mismo, dado por $Qg = ag$, cuya imagen $\operatorname{Im} Q = (a)$ es cerrada en $\mathcal{O}$. Q es entonces un morfismo estricto, de lo cual Im P es cerrada para la topología débil de E. Entonces, también para la topología de E. Como Q es inyectivo, Im P es denso en E. Por lo tanto, $\operatorname{Im} P = E$. Debido a que

$$\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} Q)^{\perp} \approx (\mathcal{O}/\operatorname{Im} Q)^{*}$$

concluimos, finalmente, que $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} P = \eta(a,\mathbb{C})$. ▲

NOTA. Si en el teorema anterior $a \in \mathcal{P}$, P es un operador diferencial con coeficientes constante, es decir, un operador de la forma

$$Pf = \sum_{k=o}^{n} a_k \frac{d^k f}{dz^k}, \qquad a_k \in \mathbb{C}.$$

Si $g \in E$, siempre existirá $f \in E$ con $Pf = g$; y si $g = 0$ y $a_n \neq 0$, habrá n soluciones linealmente independientes de tal ecuación homogénea.

Los argumento usados en esta sección conducen también a resultados como el siguiente: Si $p \in P$, $p \neq 0$ y $P:E \to E$ es el operador $Pf = pf$, P es inyectivo, con $\operatorname{Im} P = (p)$ cerrada en E. Esto es consecuencia del hecho de que el operador diferencial con coeficientes constantes $Q:\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ dado por $Qg = p(\frac{d}{dz})g$ es un morfismo estricto (ver [3]). De la inyectividad de P, podemos concluír entonces que Q es sobreyectivo, un resultado bastante conocido que admite demostraciones completamente elementales.

CAPITULO III. CALCULO DE ALGUNOS INDICES

3.1. <u>Operadores diferenciales y pseudo-diferenciales en</u> E. Para cada $0 \leq k \leq m$, sea

$$p_k(z) = \sum_{i=o}^{m_k} a_{ki} z^i$$

en P con $a_{km_k} \neq 0$ y $a_k \in \mathcal{O}$. El operador pseudo-diferencial $P:E \to E$ definido por

$$Pf = \sum_{k=o}^{m} p_k(z)a_k(\frac{d}{dz})f$$

es el transpuesto del operador $P':\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ dado por

$$P'g = \sum_{k=o}^{m} a_k(z)p_k(\frac{d}{dz})g \quad (*)$$

Como este último es un morfismo estricto, también lo es P, para la topología débil de $\mathcal{O}^*$ en $\mathcal{E}$. Ahora, para todo $\alpha > 0$,

$$p_k(z)a_k(\frac{d}{dz}) : \mathcal{E}_B \to \mathcal{E}_{B+\alpha}$$

es continuo, pues (ver 2.1)

$$|p_k(z)a_k(\frac{df}{dz})(z)| \leqslant C_1C_2\|f\|_B e^{B|z|}e^{\alpha|z|} \quad ,$$

donde $C_1 = C_1(B,a_k)$, $C_2 = C_2(p_k,\alpha)$ son constantes, de lo cual

$$\|p_k a_k(\frac{df}{dz})\|_{B+\alpha} \leqslant C(B,\alpha,p_k,a_k)\|f\|_B \ .$$

Se deduce que $P:\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ es continuo y como la topología de $\mathcal{E}$ es más fina que la débil de $\mathcal{O}^*$, también un morfismo estricto (si M es un subespacio de $\mathcal{E}$ cerrado para la topología débil de $\mathcal{O}^*$, M es cerrado para la topología de $\mathcal{E}$). Si ponemos

$$b_i(z) = \sum_{k=o}^{m} a_{ki}a_k(z) \ ,$$

(*) Con el objeto de hacer más manejable la notación, escribiremos $a(\frac{d}{dz})f = a(\frac{df}{dz})$.

entonces

$$P'g = \sum_{i=o}^{n} b_i(z)\frac{d^i g}{dz^i} ,$$

donde $n = \max\limits_{o \leq k \leq m} m_k$.

TEOREMA 3.1. *Si* $\eta(b_n,\mathbb{C}) < +\infty$, P *es un operador de Fredholm de* E *tal que* $\text{Ind } P = \eta(b_n,\mathbb{C})-n$.

Demostración. En efecto (ver [3]), $\text{Ind } P = -\text{Ind } P' = -(n-\eta(b_n,\mathbb{C}))$. ▲

COROLARIO 1. *Sean* $a_k \in \mathcal{O}$, $0 \leq k \leq m$, *y sea* $P:E \to E$ *el operador pseudo-diferencial definido por*

$$Pf = \sum_{k=o}^{m} z^k a_k\left(\frac{df}{dz}\right) .$$

Entonces, si $\eta(a_m,\mathbb{C}) < +\infty$, P *es un operador de Fredholm con* $\text{Ind } P = \eta(a_m,\mathbb{C})-m$.

COROLARIO 2. *Para cada* $0 \leq k \leq m$ *sea* $p_k \in P$, *con* $\partial p_k = m_k$. *Sean* $n = \max m_k$, $p = \max\{k \mid m_k = n\}$. *Si* P *es el operador diferencial de* E *en* E *dado por*

$$Pf = \sum_{k=o}^{m} p_k(z)\frac{d^k f}{dz^k} ,$$

entonces P *es un operador de Fredholm con índice* $\text{Ind } P = p-n$.

Demostración. Como $b_n(z)$ es un polinomio de grado p, $\text{Ind } P' = n-p$. ▲

3.2. Operadores Diferenciales en F. Sean ahora $a_k \in \mathcal{O}$, $0 \leqslant k \leqslant m$, y sea $P: F \to F$ el operador pseudo-diferencial definido por

$$Pf = \sum_{k=o}^{m} a_k(z) \frac{d^k f}{dz^k} \quad .$$

De nuevo, es claro que P es un morfismo estricto, conjugado (transpuesto) del operador diferencial P' de $\mathcal{P}$ en si mismo dado por

$$P'g = \sum_{k=o}^{m} z^k a_k \left(\frac{dg}{dz}\right) \ .$$

Nos proponemos demostrar que P' es un operador de Fredholm con índice $\text{Ind } P' = -\max_{o \leqslant k \leqslant m}\{k-\eta(a_k, 0)\}$. Sea

$$p = \max_{o \leqslant k \leqslant m} \{k-\eta(a_k, 0)\} \ .$$

P' tiene núcleo de dimensión finita puesto que lo tiene si se considera como operador de E en si mismo. Para todo n, sea $P'_n = P'/\mathcal{P}_n$, que es un operador de $\mathcal{P}_n$ en $\mathcal{P}_{n+p}$. En efecto, si $0 \leqslant j \leqslant n$,

$$P'_n(z^j) = \sum_{k=o}^{m} \sum_{i=o}^{j} a_{ki} \frac{j!}{(j-i)!} z^{j+(k-i)} \in \mathcal{P}_{n+p} \ ,$$

donde $a_k(z) = \sum_{i=o}^{\infty} a_{ki} z^i$. Se deduce que P'_n es un operador con índice y que este índice es

$$\text{Ind } P'_n = (n+1)-(n+p+1) = -p \ . \ (*)$$

(*) Si E y F son de dimensión finita y $P: E \to E$ es lineal, la exactitud de la sucesión $0 \to \text{Ker } P \to E \xrightarrow{P} F \to \text{Coker } P$ asegura que Ind P = Dim E-Dim F.

Si $K' = \operatorname{Ker} P'$, entonces

$$\operatorname{Ker} P'_n \subseteq \operatorname{Ker} P'_{n+1} \subseteq K'$$

para todo n. Por lo tanto debe existir n_o tal que $K' = \operatorname{Ker} P'_n$ para todo $n \geq n_o$. Pero entonces

$$\operatorname{Ker} P' = \lim_{n\to\infty} \operatorname{ind} \operatorname{Ker} P'_n$$

tendrá dimensión igual a la de $\operatorname{Ker} P'_{n_o}$. Demostraremos ahora que existe $n'_o > n_o$ tal que si $n \geq n'_o$ entonces

$$\operatorname{Coker} P'_n \subseteq \operatorname{Coker} P'_{n+1} \subseteq \operatorname{Coker} P' \quad ,$$

o, más precisamente, que si $n \geq n'_o$, las aplicaciones canónicas

$$\varphi_n : P_{n+p}/\operatorname{Im} P'_n \to P_{n+p+1}/\operatorname{Im} P'_{n+1}$$

$$\psi_n : P_{n+p}/\operatorname{Im} P'_n \to P/\operatorname{Im} P'$$

son inyectivas.

Como $\dim \operatorname{Coker} P'_n = \dim K' + p$ si $n \geq n'_o$, esto implicará que $\operatorname{Coker} P' = \lim_{n\to\infty} \operatorname{ind} \operatorname{Coker} P'_n$ tendrá dimensión $\dim K' + p$.

Debe notarse aquí que las afirmaciones $\operatorname{Ker} P' = \lim_{n\to\infty} \operatorname{ind} \operatorname{Ker} P'_n$, $\operatorname{Coker} P' = \lim_{n\to\infty} \operatorname{ind} \operatorname{Coker} P'_n$ resultan del hecho de que $P' = \lim_{n\to\infty} \operatorname{ind} P'_n$ y de que el functor lim ind es exacto, teniéndose entonces que la sucesión

$$0 \to \operatorname{Ker} P' \to P \xrightarrow{P'} P \to \operatorname{Coker} P' \to 0$$

es la sucesión límite inductivo de las sucesiones

$$0 \to \operatorname{Ker} P'_n \to P_n \xrightarrow{P'_n} P_{n+p} \to \operatorname{Coker} P'_n \to 0$$

pues $P = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{ind} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{ind} P_{n+p}$.

Ahora, para demostrar la inyectividad de las φ_n, ψ_n, basta demostrar que

$$\operatorname{Im} P'_n = P_{n+p} \cap \operatorname{Im} P'_{n+1} \quad , \qquad n \geq n_o \quad ,$$

y como una inclusión es evidente, sólamente que

$$P_{n+p} \cap \operatorname{Im} P'_{n+1} \subseteq \operatorname{Im} P'_n \quad , \qquad n \geq n_o \, .$$

Sean $f \in P_{n+1}$ y $g = P'_{n+1}(f) \in P_{n+p}$. Entonces, $f(z) = r(z) + b_{n+1} z^{n+1}$, $r(z) \in P_n$ y

$$P'_{n+1}(b_{n+1} z^{n+1})$$

$$= b_{n+1} \left\{ \sum_{k-\eta_k=p} a_{k,\eta_k} \frac{(n+1)!}{(n+1-\eta_k)!} z^{n+1+p} \right\} + q(z)$$

con $\partial q \leq n+p$ y $\eta_k = \eta(a_k, 0)$. Como $g \in P_{n+p}$, el primer término, llamémoslo A_n, del miembro de la derecha es 0. Demostremos que $b_{n+1} = 0$ si n es grande. Escribamos $\ell = \max \{\eta_k \mid k-\eta_k = p\}$. Si $\ell = 0$, A_n solo contiene el término

$$b_{n+1} a_{k,o} z^{n+1+p}$$

y como $\eta_k = 0$, necesariamente $a_{k,o} \neq 0$. Entonces

$b_{n+1} = 0$. Podemos suponer así que $\ell \geqslant 1$. Ahora,

$0 = |A_n| \geqslant$

$$|b_{n+1}|\left\{|a_{k\ell}|\frac{(n+1)!}{(n+1-\ell)!} - \sum_{\substack{k-\eta_k=p\\ \eta_k<\ell}} |a_{k\eta_k}|\frac{(n+1)!}{(n+1-\eta_k)!}\right\}|z^{n+p+1}|$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-\ell)!}|b_{n+1}|\left\{|a_{k\ell}| - \sum_{\substack{k-\eta_k=p\\ \eta_k<\ell}} |a_{k\eta_k}|\frac{(n+1-\ell)!}{(n+1-\eta_k)!}\right\}|z^{n+p+1}|.$$

Pero

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k-\eta_k=p\\ \eta_k<\ell}} |a_{k\eta_k}|\frac{(n+1-\ell)!}{(n+1-\ell_k)!} = 0$$

pues $\eta_k < \ell$, mientras que

$$\lim_{n\to\infty} |a_{k\ell}|\frac{(n+1)!}{(n+1-\ell)!} = +\infty .$$

Por lo tanto, existe $n_0' > n_0$ tal que si $n \geqslant n_0'$ entonces

$$\left|\sum_{k-\eta_k=p} a_{k\eta_k}\frac{(n+1)!}{(n+1-\eta_k)!}\right| > 0 ,$$

de lo cual, si $n \geqslant n_0'$ necesariamente $b_{n+1} = 0$. Las φ_n y ψ_n son entonces inyectivas si $n \geqslant n_0'$. Se concluye que si $n \geqslant n_0'$ entonces $\dim \operatorname{Ker} P' = \dim \operatorname{Ker} P_n' = \dim K'$, $\dim \operatorname{Coker} P' = \dim \operatorname{Coker} P_n' = \dim K' + p$, o sea que $\operatorname{Ind} P' = -p$.

Finalmente tenemos

TEOREMA 3.2. *El operador* $P:F \to F$ *definido por*

$$Pf = \sum_{k=o}^{m} a_k(z)\frac{d^k f}{dz^k},$$

donde no todas las $a_k \in \mathcal{O}$ *son identicamente nulas, es un operador de Fredholm, con*

$$\text{Ind } P = \max_{o \leq k \leq m} \{k-\eta(a_k,0)\}.$$

Demostración. Como hemos visto, si P' es el conjugado de P entonces $\text{Ind } P' = -\max_{o \leq k \leq m} \{k-\eta(a_k,0)\}$.

▲

CAPITULO IV. APLICACIONES A LA TEORIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

4.1. Operadores en E. El siguiente lema, bien conocido, nos será útil en lo que sigue.

LEMA A. *Sean* E *un espacio vectorial topológico,* M *y* N *subespacios de* E, *con* M *cerrado y* dim E/M $< +\infty$. *Entonces* M+N *es cerrado en* E, *con* dim E/M+N $< +\infty$.

COROLARIO. *Bajo las condiciones del lema anterior, si* N *es denso en* E, *entonces* M+N = E.

TEOREMA 4.1. *Sea* $P:\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ *un operador diferencial de la forma*

$$Pf = \sum_{k=o}^{m} p_k(z)\frac{d^k f}{dz^k},$$

donde $p_k \in P$, $0 \leq k \leq m$, $p_m \neq 0$. *Entonces el operador diferencial* $P': O/_E \to O/_E$, *obtenido a partir de* P *por paso a los cocientes, es sobreyectivo.*

Demostración. En efecto, $\mathrm{Im}\, P' = (\mathrm{Im}\, P + E)/_E$. Como Im P es cerrada en O (ver [3]) y E es denso en este espacio, $\mathrm{Im}\, P + E = O$, y P' es sobreyectivo. ▲

NOTA. El anterior teorema es aún cierto reemplazando a O por $O(\Omega)$, donde Ω es cualquier abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$, pues por el teorema de aproximación de Runge se tiene aún que P es denso en $O(\Omega)$, de lo cual también lo es E (o, mejor, el conjunto $E(\Omega)$ de las restricciones a Ω de las funciones en E).

El teorema siguiente suministra información acerca de las soluciones de las ecuaciones diferenciales en O.

TEOREMA 4.2. *Si* $P: O \to O$ *es el operador diferencial del teorema anterior, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1) $\partial p_k \leq \partial p_m$, *para todo* $k \leq m$.
2) *Si* $P': O/_E \to O/_E$ *es el operador obtenido de* P *por paso a los cocientes*, $\mathrm{Ker}\, P' = \{0\}$.
3) *La cohomología del complejo* $0 \to O/_E \xrightarrow{P'} O/_E \to 0$ *es nula.*
4) *Si* $Pf = g$, $f \in O$, $g \in E$, *entonces* $f \in E$.

Demostración. Claramente (2)$\leftrightarrow$(3), pues P'

es sobreyectivo. Si $\bar{f}$ denota la clase módulo E de $f \in \mathcal{O}$, la afirmación (4) es equivalente a: *Si* $P'\bar{f} = \bar{0}$ *entonces* $\bar{f} = 0$, o sea a (2). Para demostrar que (1) $\rightarrow$ (2), obsérvese que si P" es la restricción de P a E, entonces Ind P" = p - n , donde n = $\max \partial p_k$ y $p = \max\{k \mid \partial p_k = n\}$.

Las hipótesis de (1) aseguran entonces que $n = \partial p_m$ y p = m. Ahora, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & E & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & \mathcal{O}/_E & \rightarrow & 0 \\
 & & P''\downarrow & & P\downarrow & & P'\downarrow & & \\
0 & \rightarrow & E & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & \mathcal{O}/_E & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

en el cual las aplicaciones no mencionadas son respectivamente la inclusión y la aplicación canónica al cociente, y la exactitud de las filas, implican que

$$\chi'' - \chi + \chi' = 0 \quad ,$$

donde χ'', χ, χ' son, en su orden, las características de Euler-Poincaré de los complejos : $0 \rightarrow E \xrightarrow{P''} E \rightarrow 0$, $\quad 0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O} \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow \mathcal{O}/_E \xrightarrow{P'} \mathcal{O}/_E \rightarrow 0$. Pero χ'' = Ind P" = $m-\partial p_m$, χ = Ind P = $m-\partial p_m$ (ver [2]) y χ' = Ind P' = Dim Ker P'. Entonces Dim Ker P' = 0.

Supongamos, recíprocamente, que (2) es válida. Entonces $m-\partial p_m = p-n$. Como $p \leqslant m$,

$$\partial p_m = (m-p)+n \geqslant n = \max \partial p_k ,$$

y el teorema está demostrado. ▲

TEOREMA 4.3. *El teorema anterior es cierto reemplazando a O por $O(\Omega)$, donde Ω es cualquier abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$, sin más que reemplazar* (1) *por la condición:*

(1') $\partial p_k \leqslant \partial p_m$ *para todo* $k \leqslant m$, *y todas las raíces de* p_m *están en* Ω.

<u>*Demostración.*</u> La condición (1') implica que $\text{Ind } P = m - \partial p_m$ y, por lo tanto, que $\text{Ker } P' = \{0\}$. La condición $\text{Ker } P' = \{0\}$ conduce, por otra parte, a qué $\partial p_k \leqslant \eta(p_m, \Omega) \leqslant \partial p_m$ para todo $k \leqslant m$, de lo cual $\partial p_k \leqslant \eta(p_m,\Omega) = \partial p_m$. ▲

COROLARIO. *Sean Ω un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y* $P: O(\Omega) \to O(\Omega)$ *un operador diferencial de la forma*

$$Pf = \sum_{k=0}^{m} p_k(z) \frac{d^k}{dz^k} ,$$

donde $p_n \in P$, $k = 0,1,\ldots,m$ *y* $p_m \neq 0$. *Supóngase además que todas las raíces de* p_m *están en* Ω *y que* $\partial p_k \leqslant \partial p_m$ *para todo* $k \leqslant m$. *Entonces toda solución holomorfa en Ω de la ecuación homogénea* $Pf = 0$ *es de tipo exponencial. (es decir, puede extenderse a todo $\mathbb{C}$ en una función de tipo exponencial).*

4.2. <u>Operadores en F</u>. Consideremos ahora un operador diferencial $P: F \to F$ de la forma

$$Pf = \sum_{k=o}^{m} a_k(z)\frac{d^k f}{dz^k} \qquad (4.1)$$

donde las a_k son holomorfas en una bola Ω alrededor de 0, y $a_m \neq 0$. Entonces P es de Fredholm, con

$$\text{Ind } P = \max_{o \leqslant k \leqslant m} \{k - \eta(a_k, 0)\} .$$

Denotemos con C el sub-espacio de F de las series formales convergentes en alguna vecindad de 0. Entonces C se identifica con el haz de gérmenes de las funciones holomorfas en 0. Por lo tanto (ver [3]) si P" denota la restricción de P a C, P" es un operador con índice, y éste es

$$\text{Ind } P'' = m - \eta(a_m, 0) .$$

Si llamamos χ'', χ y χ' , respectivamente, a las características de Euler-Poincaré de los complejos

$$C: 0 \to C \xrightarrow{P''} C \to 0$$

$$F: 0 \to F \xrightarrow{P} F \to 0$$

$$F/C: 0 \to F/C \xrightarrow{P'} F/C \to 0 ,$$

entonces, de la exactitud de la sucesión de complejos

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathbb{F} \to \mathbb{F}/C \to 0 ,$$

concluimos que:

$$\chi'' - \chi + \chi' = 0 .$$

Lo anterior también es cierto si χ'' denota la característica del complejo $0 \to \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{P''} \mathcal{O}(\Omega) \to 0$ y χ' la del complejo $0 \to F/\mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{P'} F/\mathcal{O}(\Omega) \to 0$, cuando Ω es una bola alrededor de 0; o si χ'' denota la característica del complejo $0 \to P \xrightarrow{P''} P \to 0$ y χ' la de $0 \to F/P \xrightarrow{P'} F/P \to 0$, cuando los a_k son polinomios. Cómo $P \subseteq \mathcal{O}(\Omega) \subseteq C \subseteq F$ (pues si $f \in (\Omega)$, f admite un desarrollo en series de Taylor alrededor de 0, válido en todo Ω) y P es denso en F, también lo son $\mathcal{O}(\Omega)$ y C; en virtud del Lema A se ve, cómo en el Teorema 4.1, que P' es sobreyectiva y $\chi' = \dim \operatorname{Ker} P'$, de lo cual,

$$\chi - \chi'' = \dim \operatorname{Ker} P' \ .$$

Examinemos cada caso por separado:

TEOREMA 4.4. *Si* $P: F \to F$ *es el operador diferencial dado por* (4.1), *las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1) $m - \eta(a_m, 0) = \max\limits_{0 \leq k \leq m} \{k - \eta(a_k, 0)\}$.

2) *El núcleo* Ker P' *del operador* $P': F/C \to F/C$ *obtenido de* P *por paso al cociente se reduce a* $\{0\}$.

3) *La cohomología del complejo* $0 \to F/C \to F/C \to 0$ *es nula.*

4) *Si* $Pf = g$, $g \in C$ *y* $f \in F$, *entonces* $f \in C$. *Es decir, si* g *es holomorfa en una vecindad de* 0, *y* f *es una solución formal de la ecuación* $Pf = g$, f *converge en una vecindad de* 0.

<u>*Demostración*</u>. Es claro que $(2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$.

Para ver que (1)$\leftrightarrow$ (2), nótese que (1) equivale a que $X - X'' = 0$ y, como dim Ker $P' = X - X''$, a que Ker $P' = \{0\}$. ▲

NOTA. La condición $m-\eta(a_m,0) = \max_{o\leq k\leq m} k-\eta(a_k,0)\}$ se expresa a menudo diciendo que 0 es un punto singular regular de P. La afirmación (1)$\leftrightarrow$ (4) del teorema es entonces clásica (ver [4]). La afirmación (4)$\leftrightarrow$ (1) es también conocida y se deduce de teoremas mucho más generales de Deligne para dimensiones mayores que 1 (ver [5]). Nuestra demostración es más elemental.

COROLARIO. *Bajo las condiciones del teorema anterior, si* $m-\eta(a_m,0) = \max_{o\leq k\leq m} \{k-\eta(a_k,0)\}$ *y* f *es una solución formal de la ecuación* $Pg = 0$, f *es convergente en alguna vecindad de* 0.

TEOREMA 4.5. *Sea* $P:F \to F$ *el operador diferencial dado por* (4.1). *Supongase además que* $\eta(a_m,\Omega) < +\infty$, *donde* Ω *es una bola alrededor de cero. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1) *El punto* 0 *es, a los sumo, el único cero de* a_m *en* Ω, *y* $m-\eta(a_m,0) = \max_{o\leq k\leq m} \{k-\eta(a_k,0)\}$.
2) Ker $P' = \{0\}$, *donde* $P':F/O(\Omega) \to F/O(\Omega)$ *es el operador obtenido de* P *por paso al cociente.*
3) *La cohomología del complejo* $0 \to F/O(\Omega) \to F/O(\Omega) \to 0$ *es nula.*
4) *Si* $Pf = g$, $g \in O(\Omega)$ *y* $f \in F$, *entonces* $f \in O(\Omega)$.

Demostración. De nuevo es claro que (1) ⇒ (2) ⇔ (3) ⇔ (4). Para ver que (2) ⇒ (1), nótese que si Ker P' = 0, entonces

$$m-\eta(a_m,\Omega) = \max_{o\leq k\leq m} k-\eta(a_k,0)\} .$$

Como

$$m-\eta(a_m,\Omega) \leq m-\eta(a_m,0) \leq \max k-\eta(a_k,0)\},$$

necesariamente $\eta(a_m,\Omega) = \eta(a_m,0)$ lo cual demuestra (1). ▲

COROLARIO 1. *Bajo la hipótesis* $\max\{k-\eta(a_k,0)\} = m-\eta(a_m,0)$, *si* 0 *es a lo sumo el único cero de* a_m *en* Ω, *toda solución formal* f *de la ecuación* Pg = 0 *es holomorfa en* Ω. *En particular, si* $\Omega = \mathbb{C}$, f *es una función analítica entera.*

COROLARIO 2. *Sea* Ω *una bola alrededor de* 0. *Toda solución formal* f *de la ecuación de Euler*

$$\sum_{k=o}^{m} z^k \frac{d^k f}{dz^k} = g$$

es holomorfa en Ω.

NOTA. Los resultados anteriores son válidos (con modificaciones evidentes en sus enunciados) reemplazando 0 por cualquier punto a de $\mathbb{C}$, y tomando como Ω una bola alrededor de a.

TEOREMA 4.6. *Sea* P:F → F *el operador diferencial*

$$Pf = \sum_{k=o}^{m} p_k(z)\frac{d^k}{dz^k} \qquad ,$$

donde los p_k *son polinomios. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $\max\limits_{o\leq k\leq m}\{k-\eta(p_k,0)\} = \max\limits_{o\leq k\leq m}\{k\,|\,\partial p_k = \max\limits_{o\leq j\leq m} \partial p_j\} - \max\limits_{o\leq k\leq m} \partial p_k.$

2) $\operatorname{Ker} P' = \{0\}$, *donde* $P':F/F \to F/E$ *es el operador obtenido de* P *por paso al cociente.*

3) *La cohomología del complejo* $0 \to F/E \to F/E \to 0$ *es nula.*

4) *Si* $Pf = g$, $f\in F$, $g\in E$, *entonces* $f\in E$.

<u>*Demostración*</u>. Es evidente del hecho de que $\operatorname{Ind} P'' = \max\{k\,|\,\partial p_k = \max\partial p_k\} - \max \partial p_k$, donde P'' es la restricción de P a E. ▲

En realidad, no deben ser muchos los operadores que cumplen la condición (1) anterior. Como casos particulares, consideremos los siguientes:

COROLARIO 1. *Toda solución formal* f *de la ecuación de Euler*

$$\sum_{k=o}^{m} z^k \frac{d^k f}{dz^k} = g \quad , \qquad g\in E \ ,$$

es de tipo exponencial.

COROLARIO 2. *Si todos los* p_k, $0 \leq k \leq m$, *son constantes, toda solución formal* f *de la ecuación* $Pf = g$, $g\in E$, *es de tipo exponencial. En particular, toda solución formal de la ecuación homogénea* $Pf = 0$ *es de tipo exponencial.*

Si P'' denota el operador del teorema 4.6, restringido a P, entonces (veáse [10])

$$\operatorname{Ind} P'' = -\max_{0\leq k\leq m} \{\partial p_k - k\} ,$$

por lo tanto la igualdad

$$\max\{k-\eta(p_k,0)\} = \max_{p_k\neq 0}\{k-\eta(p_k,0)\} = -\max_{p_k\neq 0}\{\partial p_k - k\}$$

$$= -\max\{\partial p_k - k\}$$

es equivalente a la siguiente afirmación:

Para todos los $0 \leq k$ *y* $j \leq m$, *si* $p_k \neq 0$ *y* $p_j \neq 0$ *entonces* $\eta(p_j,0) = \partial p_j$ *y* $\partial p_j - \partial p_k \geq j-k$.

Ahora, los únicos polinomios que cumplen esta condición son los de la forma

$$p_k(z) = a_k z^{n+k} \quad , \quad k = 0,\ldots,m \, , \tag{4.2}$$

donde n es fijo, independiente de k (algunos de los a_k pueden ser nulos). Tenemos entonces:

TEOREMA 4.7. *Si* $P:F \to F$ *es un operador diferencial de la forma*

$$Pf = \sum_{k=0}^{m} p_k(z)\frac{d^k f}{dz^k} \quad ,$$

donde $p_k \in P$ *para* $k = 0,1,2,\ldots,m$, *las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1) *Existe* $n \geq 0$ *tal que* $p_k(z) = a_k z^{n+k}$, $a_k \in \mathbb{C}$, *para todo* $k = 0,1,2,\ldots,m$.
2) *El núcleo del operador* $P':F/p \to F/p$, *obtenido de* P *por paso a los cocientes, es nulo.*
3) *La cohomología del complejo* $0 \to F/p \xrightarrow{P'} F/p \to 0$ *es nula.*

4) *Si* $Pf = g$, $f \in F$ *y* $g \in P$, *entonces* $f \in P$. *Es decir, toda solución formal de* $Pf = g$ *es, cuando* $g \in P$, *un polinomio.*

Demostración. Resulta inmediatamente del análisis anterior. ▲

NOTA. En la condición (1) anterior es claro que si $p_o(z) \neq 0$, entonces $n = \partial p_o$. Nótese también que

$$P = z^n Q$$

donde

$$Q = \sum_{k=o}^{m} a_k z^k \frac{d^k}{dz^k}$$

y que las soluciones formales de $Pf = 0$ son las mismas de $Qf = 0$. Cuando $a_k = 1$ para todo k, Q es simplemente el operador E de Euler y $P = z^n E$. Del teorema 4.7 se deduce

COROLARIO 1. *Toda solución formal de una ecuación diferencial homogénea de la forma*

$$\sum_{k=o}^{m} a_k z^{n+k} \frac{d^k f}{dz^k} = 0$$

es un polinomio.

COROLARIO 2. *Toda solución formal de la ecuación de Euler* $Ef = g$, $g \in P$, *es un polinomio. En particular toda solución formal de la ecuación* $Ef = 0$ *es un polinomio.*

COROLARIO 3. *Si* P *es como en el corolario 1 y* $n > 0$, *la ecuación* $Pf = g$, *con* g P *y* $\partial g \geq 0$, *ad-*

mite soluciones formales solo si z^n *divide a* g *en* P. *En caso de que estas existan, serán las mismas de* $Qf = g/z^n$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Cartan, H., *Theorie Elementaire des Functions Analytiques d'unes ou plusieres variables Complexes*, Hermann, Paris, 1963.

[2] Charris, J., *Sobre Ciertos Espacios de Funcio ciones Holomorfas y sus Aplicaciones I*, Revista Col. de Mat., Vol. VIII, N° 2-3(1974) 111-138.

[3] Charris, J., *Sobre Ciertos Espacios de Funciones Holomorfas y sus Aplicaciones II*, Revista Col. de Mat., Vol. XIII, N° 4 (1979) 245-263.

[4] Coddington, E., Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-Hill, N.Y., 1955.

[5] Deligne, P., *Equations Differentielles a Points Singuliers Regulariers*, Springer-Verlag, Belin, 1970.

[6] Dieudonne, J., Schwartz, L., *La Dualité dans les espaces (F) et (LF)*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1 (1949), 61-101.

[7] Hormander, L., *Introduction to Complex Analysis in several Variables*, Van-Nostrand, Princeton, N.J., 1967.

[8] Horvath, J., *Topological Vector Spaces and Distributions*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1966.

[9] Mond, D., *Sobre la Cohomología asociada a un Operador Diferencial Complejo*, Revista Col. de Mat., Vol. XIII, N° 3 (1979) 171-192.

[10] Nova, L., *Ciertas propiedades de las Ecuaciones Diferenciales Complejas con Coeficientes Polinómicos*, Revista Col. de Mat., Vol. XII, N° 1-2 (1978) 13-58.

[11] Rotman, J., *Notes on Homological Algebra*, Van Nostrand, Urbana, Illinois, 1968.

[12] Schaefer, H., *Topological Vector Spaces*, MacMillan, New York, 1966.
[13] *Seminaire Cartan*, Vol. 6, Años 1961-1965, Benjamin, N.Y., 1967.
[14] Treves, F., *Locally Convex Spaces and Linear Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, N.Y., 1967.
[15] Treves, F., *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1967.

***

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E. COLOMBIA.

(Recibido en Diciembre de 1979)