Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XIV (1980) págs. 173 - 196

COMPACIDAD Y DECIDIBILIDAD DE LOGICAS MONADICAS CON CUANTIFICADORES CARDINALES (*)

por

Sergio FAJARDO V.

§0. Introducción. Este artículo se refiere al estudio de extensiones de la lógica de primer orden ($L_{\omega\omega}$) que preservan ciertas propiedades fundamentales, y aumentan su poder expresivo, en el sentido de que permiten axiomatizar clases de estructuras no expresables en $L_{\omega\omega}$. Para una información detallada ver [C3] y los dos últimos capítulos de [BS] . Una de las propiedades que se pretende

(*) El autor agradece la invaluable ayuda prestada por el Dr. Xavier Caicedo durante la elaboración de su tesis de Magister (Compacidad y decidibilidad de ciertas lógicas monádicas, Universidad de los Andes, 1979), en la cual se basa este trabajo.

conservar es la *compacidad enumerable*: si todo sub conjunto finito de un conjunto enumerable T de sentencias tiene un modelo entonces T también tiene un modelo. Es un problema abierto, propuesto en [MS], el dar condiciones para asegurar que la unión de dos lógicas compactas sea compacta.

Extensiones bien conocidas de $L_{\omega\omega}$ son las lógicas $L_{\omega\omega}(Q_\alpha)$, obtenidas por la adición del nuevo símbolo de cuantificación Q_α, que sintácticamente se trata como los cuantificadores $\forall$ y $\exists$, y en donde la interpretación intuitiva de $Q_\alpha\varphi$ es: *el cardinal del conjunto de verdad de* φ *es mayor o igual que* ω_α. Analogamente, se puede considerar las lógicas $L_{\omega\omega}(Q_{\alpha_i} : i \in I)$ que resultan al añadir simultáneamente varios cuantificadores cardinales.

Vaught demostró la compacidad enumerable de $L_{\omega\omega}(Q_1)$. Keisler [Ke] estudió en forma extensiva esta lógica y dió una axiomatización completa. Furkhen [Fu] mostró la compacidad enumerable de $L_{\omega\omega}(Q_\alpha)$ para ciertos valores de ω_α, por métodos completamente diferentes a los utilizados para $L_{\omega\omega}(Q_1)$ por Vaught y Keisler. En cambio es un problema todavía no resuelto si la lógica $L_{\omega\omega}(Q_1, Q_2)$ es enumerablemente compacta o nó. En este artículo demostramos que su fragmento monádico, $M_{\omega\omega}(Q_1, Q_2)$, es decir la sublógica de $L_{\omega\omega}(Q_1, Q_2)$ que sólo contiene símbolos unarios de predicado además de la igualdad, es enumerablemente compacta; resultado que se generaliza a $M_{\omega\omega}(Q_{\alpha_1}, .., Q_{\alpha_n})$, el fragmento monádico de $L_{\omega\omega}(Q_{\alpha_1}, ..., Q_{\alpha_n})$, siempre que $\alpha_i \geq 1$. Esta con dición es necesaria pues $L_{\omega\omega}(Q_o)$ no es enumerablemente compacta. Adicionalmente mostramos que $M_{\omega\omega}(Q_{\alpha_1},\ldots,Q_{\alpha_n})$, con α_i arbitrario, es una lógica decidible. Esto había sido demostrado en los casos particulares de $M_{\omega\omega}(Q_\alpha)$ sin igualdad por Mostowaski [Mo], y de $M_{\omega\omega}(Q_\alpha)$ con igualdad por Slomson [S2] y Vinner [V].

La técnica que utilizamos principalmente es la de "*back-and-forth*", conocida de los trabajos de Fraissé [Fr], Ehrenfeucht [E] y Karp [Ka], quienes la utilizaron para caracterizar equivalencia elemental. También fué utilizada por Lindström, [Li 1], [Li 2] para obtener sus famosos teoremas de caracterización de la lógica de primer orden. Caicedo en su tesis [Ca 1] generalizó el "back-and-forth" a cuantificadores arbitrarios, trabajo que continuó en [Ca 2]. El "back-and-forth" que usamos es una adaptación del presentado por Caicedo en [Ca 1], con la diferencia que utilizamos sucesiones de isomorfismos parciales en lugar de conjuntos de relaciones de equivalencia, una extensión del método que utiliza Barwise en [B].

§1. Notación, definiciones y ejemplos. La notación y definiciones que utilizamos en estre trabajo son las conocidas de la Teoría de Modelos para la Lógica de primer orden, $L_{\omega\omega}$, tal como las podemos encontrar en [BS]. El α-ésimo cardinal (ó aleph) será denotado por ω_α. El cardinal del conjunto S se denotará $|S|$.

El lenguaje $L_{\omega\omega}(Q,Q')$ se obtiene a partir de la Lógica de primer orden al adjuntar dos nuevos símbolos de cuantificación Q y Q'; las reglas para la formación de fórmulas bien formadas (fbf) son las mismas de $L_{\omega\omega}$ más una adicional: *Si* φ *es* fbf *entonces* $(Qx)\varphi$ *y* $(Q'x)\varphi$ *son* fbf's. Un modelo para $L_{\omega\omega}(Q,Q')$ es de la forma $\mathfrak{A} = \langle A,\ldots,q,q'\rangle$ en donde los puntos suspensivos indican interpretación de los símbolos de $L_{\omega\omega}$ y $q,q' \subseteq P(A)$ son las interpretaciones de Q y Q', respectivamente. Un ejemplo de tales interpretaciones sería $q = \{S \subseteq A \mid |S| \geqslant \omega_\alpha\}$ y $q' = \{S \subseteq A \mid |S| \geqslant \omega_\beta\}$. La definición de verdad de una sentencia en un modelo está dada por las reglas usuales, más las siguientes:

1. $\mathfrak{A} \models_s (Qx)\varphi(x) \Leftrightarrow \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models_s \varphi[a]\} \in q$
2. $\mathfrak{A} \models_s (Q'x)\varphi(x) \Leftrightarrow \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models_s \varphi[a]\} \in q'$.

El *fragmento monádico* de $L_{\omega\omega}(Q,Q')$, denotado $M_{\omega\omega}(Q,Q')$, es el sublenguaje que solo permite símbolos de predicado monádicos (de una variable) además de la igualdad, y no admite símbolos de función. La notación $M^{\ell}_{\omega\omega}(Q,Q')$ indica que solo consideramos ℓ símbolos de predicado.

Otra noción que necesitamos es la de *rango cuantificacional* de una fórmula, nos referimos a la función "qr" definida en forma recursiva así:

$qr(\varphi) = 0$ si φ es atómica

$qr(\neg\varphi) = rq(\varphi)$

$qr(\varphi\wedge\psi) = Max(qr(\varphi), qr(\psi))$

$qr((\exists x)\varphi) = qr((Qx)\varphi) = qr((Q'x)\varphi) = qr(\varphi)+1$.

Usarémos la notación $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{C}$ para denotar la *equivalencia elemental* de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{C}$. Equivalencia elemental para sentencias con rango cuantificacional menor que m la notamos por $\mathfrak{A} \overset{<m}{\equiv} \mathfrak{C}$.

Todas las definiciones, notaciones y observaciones anteriores se generalizan de una forma natural a lenguajes $L_{\omega\omega}(Q^1,...,Q^n)$ ó $L_{\omega\omega}(Q^i : i \in I)$, con más de dos símbolos de cuantificación. En la notación corriente, $L_{\omega\omega}(Q_{\alpha_1},...,Q_{\alpha_n})$ denota aquella lógica que se obtiene interpretando canónicamente el cuantificador Q_{α_i} en cualquier estructura $\mathfrak{A}$ por $q^i = \{S \subseteq A \mid |S| \geqslant \omega_{\alpha_i}\}$. En este trabajo, Q_{α_i} denotará siempre esta interpretación, es decir la *interpretación cardinal* de Q_{α_i}.

A continuación citamos algunos resultados sobre compacidad enumerable para la interpretación cardinal de los Q_α. Primero necesitamos otro concepto: un cardinal κ es *pequeño para* γ (otro cardinal) si siempre que $\{m_i \mid i \in I\}$ es una colección de cardinales menores que γ, con $|I| \leqslant \kappa$, entonces $\prod_{i\in I} m_i < \gamma$. Por ejemplo, ω_α es pequeño para $(2^{\omega_\alpha})^+$.

1. $M_{\omega\omega}(Q_o)$ *no es enumerablemente compacta.*

2. $L_{\omega\omega}(Q_\alpha)$ *es enumerablemente compacta si* ω *es pequeño para* ω_α *véase* [Fu], [BS].

3. $L_{\omega\omega}(Q_{\alpha_1+1}, Q_{\alpha_2+1},\ldots)$ *es enumerablemente compacta si* $\omega_{\alpha_i}^{\omega_o} = \omega_{\alpha_i}$, *en particular* $L_{\omega\omega}(Q_2,Q_3,\ldots)$ *es enumerablemente compacta suponiendo la hipótesis del continuo. Esto se sigue de* 2, *véase* [C1].

4. $L_{\omega\omega}(Q)$, *con* Q *el cuantificador de Chang, es decir la interpretación* $q = \{S \subsetneq A|\ |S| = |A|\}$, *es enumerablemente compacta suponiendo la hipótesis generalizada del continuo* [BS].

5. *Si* Q *denota el cuantificador de Chang,* $L_{\omega\omega}(Q,Q_1)$ *no es enumerablemente compacta.*

Demostración. Basta caracterizar la estructura de los Números Naturales en esta lógica [C3]. Sea $T = T^* \cup \{\sigma_1,\sigma_2\}$ en donde T^* consiste de los axiomas de la Aritmética de primer orden, σ_1 es $\neg(Q_1x)(x = x)$ y σ_2 es $\forall x(\neg(Qy)(y < x))$. Cualquier modelo de T tiene cardinal ω_o por σ_1, y por σ_2 no tiene sucesiones decrecientes infinitas, por lo tanto es isomorfo al modelo "estándar" de los Naturales. ▲

§2. <u>Back-and-forth para</u> $M^{\ell}_{\omega\omega}(Q^1,\ldots,Q^n)$. En esta sección supondremos siempre que el lenguaje contiene exactamente ℓ predicados monádicos $P_1,\ldots,P_\ell$. Trabajaremos con dos tipos de interpretaciones para $M^{\ell}_{\omega\omega}(Q^1,\ldots,Q^n)$:

(1) Estructuras de la forma $\mathfrak{A} = \langle A_1, R_1, \ldots, R_\ell, q^1, \ldots, q^n\rangle$ con R_j la interpretación del símbolo de predicado P_j, y q^j el conjunto de los subconjuntos de A que tienen cardinal mayor o igual que ω_{α_j}, en donde $\omega_{\alpha_1} < \omega_{\alpha_2} < \ldots < \omega_{\alpha_n}$ son cardinales fijos.

(2) Estructuras de la forma $\mathcal{L}^m = \langle B, R'_1, \ldots, R'_\ell, S^1, \ldots, S^n\rangle$ con R'_j la interpretación de P_j y S^j, la interpretación de Q^j, el conjunto de subconjuntos de B con cardinal mayor que $E^j_m-(m-1)$, donde los E^j_m está definidos por recurrencia:

$$E^1_m = (2^\ell+m)(m+1)$$

$$E^{j+1}_m = (2^\ell+m)E^j_m+1 \ .$$

Dada ahora una interpretación $\mathfrak{A}$ cualquiera de $M^\ell_{\omega\omega}(Q^1, \ldots, Q^n)$ y $a \in A$, sea $f_a \in 2^\ell$ la función definida así:

$$f_a(i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \notin R_i \\ 1 & \text{si} \quad a \in R_i \ . \end{cases}$$

DEFINICION 2.1. $a \sim b$ si y sólo si $f_a = f_b$.

La anterior es una relación de equivalencia en A, denotamos por $\bar{f}_a$ la clase de equivalencia de a. En general, se tienen clases $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_{2^\ell}$ (algunas pueden ser vacías) correspondientes a las funciones de ℓ en 2.

DEFINICION 2.2. A cada estructura $\mathfrak{A}$ de tipo (1) y cada m, asociamos una estructura $\mathcal{L}^m$ de tipo

(2) utilizando las clases $\bar{f}_i$ en la forma siguiente:

(i) Tomamos conjuntos disyuntos $\bar{f}_i'$, $i = 1,\ldots,2^{\ell}$, asociados a los $\bar{f}_i$ así:

Si $|\bar{f}_i| \leqslant m$ entonces $|\bar{f}_i'| = |\bar{f}_i|$.

Si $m < |\bar{f}_i| < \omega_{\alpha_1}$ entonces $|\bar{f}_i'| = m$.

Si $\omega_{\alpha_j} \leqslant |\bar{f}_i| < \omega_{\alpha_{j+1}}$ entonces $|\bar{f}_i'| = E_m^j$.

Si $\omega_{\alpha_n} \leqslant |\bar{f}_i|$ entonces $|\bar{f}_i'| = E_m^n$.

(ii) $B = \bigcup_{i=1}^{2^{\ell}} \bar{f}_i'$, es claro que $|B| \leqslant 2^{\ell} E_m^n$.

(iii) Dado b en B, b pertenece a un único $\bar{f}'$, asociado a $\bar{f}$; si tomamos un representante $a \in \bar{f}$ definimos $R_1',\ldots,R_{\ell}'$ por: $b \in R_i' \Leftrightarrow a \in R_i$. Es decir , $R_i' = \bigcup \{\bar{f}' \mid \bar{f} \subseteq R_i\}$.

(iv) $\mathcal{L}^m = \langle B, R_1',\ldots,R_{\ell}', S^1,\ldots,S^n\rangle$, con $S^1,\ldots,S^n$ interpretados como se indicó al comienzo de esta sección para las estructuras de tipo (2).

Usando el método de "back-and-forth" vamos a demostrar que $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{L}^m$ son elementalmente equivalentes con respecto a sentencias de rango cuantificacional menor que m. Considere las siguientes sucesiones decrecientes por inclusión de conjuntos de isomorfismo parciales:

$$\{A_i\}_{i=1}^{m} \quad , \quad \{B_i\}_{i=1}^{m} \quad \text{y} \quad \{I_i\}_{i=1}^{m}$$

donde A_i consiste en los automorfismos parciales

$f:A \to A$ de $\mathfrak{A}$ con $|\mathrm{Dom}\, f| \leqslant m-i$; B_i consiste en los automorfismos parciales $g:B \to B$, de $\mathcal{L}^m$ con $|\mathrm{Dom}\, g| \leqslant m-i$, y finalmente, I_i consiste en los isomorfismo parciales $h:A \to B$ de $\mathfrak{A}$ en $\mathcal{L}^m$ con $|\mathrm{Dom}\, h| \leqslant m-i$.

DEFINICION 2.3. Dado i, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, definimos relaciones en A y B para cada subconjunto S de A y S' de B tales que $|S| \leqslant m-(i+1)$ y $|S'| \leqslant m-(i+1)$, como sigue:

(i) Dados $a,a' \in A$, $a \overset{i+1}{\underset{S}{\sim}} a' \Leftrightarrow$ existe $f \in A_i$ tal que $f \restriction S = i_S$ y $f(a) = a'$.

(ii) Dados $b,b' \in B$, $b \overset{i+1}{\underset{S'}{\sim}} b' \Leftrightarrow$ existe $g \in B_i$ tal que $g \restriction S' = i_{S'}$ y $g(b) = b'$.

Las definiciones anteriores nos permiten demostrar las siguientes propiedades:

PROPIEDAD 2.1. *Las relaciones definidas en* 2.3 *son de equivalencia y tienen menos de* $2^{\ell}+m$ *clases de equivalencia.*

Demostración. Es claro que son de equivalencia. Mostramos que el número de clases es menor que $2^{\ell}+m$ para las relaciones $\overset{i+1}{\underset{S}{\sim}}$ definidas en A, el caso de B es similar. Sea i+1 fijo, $S = \{a_1,\ldots,a_s\} \subseteq A$ y $|S| \leqslant m-(i+1)$; denotemos la clase de equivalencia de a por $[a]_S^{i+1}$ y consideremos los dos casos posibles:

$a = a_j \in S$, entonces $[a_j]_S^{i+1} = \{a_j\}$;

$a \notin S$, entonces $[a]_S^{i+1} = \bar{f}_a \smallsetminus \{a_j \mid a_j \in S$ y $\bar{f}_{a_j} = \bar{f}_a\}$. En otras palabras, la relación $\underset{S}{\overset{i+1}{\sim}}$ es un refinamiento de la partición $\{\bar{f}_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 2^{\ell}\}$, y no hay más nuevas clases de equivalencia que elementos hay en S. Así el número de clases de equivalencia es a lo sumo $2^{\ell} + |S| < 2^{\ell} + m$. ▲

PROPIEDAD 2.2. (propiedad de extensión o "back-and forth").

(i) *Dados* $h \in I_{i+1}$ *y* $a \in A$, *existen* $h' \in I_i$ *y* $b \in B$ *tales que:*

1. $h \subseteq h'$ *y* $h'(a) = b$.
2. $[a]_{\mathrm{Dom}\ h}^{i+1} \in q^j$ *implica* $[b]_{\mathrm{ran}\ h}^{i+1} \in S^j$ *para* $j = 1,\ldots,n$.

(ii) *Dados* $h \in I_{i+1}$ *y* $b \in B$ *existen* $h' \in I_i$ *y* $a \in A$ *tales que*

1. $h \subseteq h'$ *y* $h'(a) = b$.
2. $[b]_{\mathrm{ran}\ h}^{i+1} \in S^j$ *implica* $[a]_{\mathrm{Dom}\ h}^{i+1} \in q^j$ *para* $j = 1,\ldots,n$.

Demostración:

(i) Dados $h \in I_{i+1}$ y $a \in A$ hay dos casos a considerar. Si $a \in \mathrm{dom}\ h$ entonces tomamos $h' = h$ y $b = h(a)$, obteniendo (1) y (2) trivialmente, pues $|[a]_{\mathrm{dom}\ h}^{i+1}| = 1$. Si $a \notin \mathrm{dom}\ h$, demostramos que existe $b \in \bar{f}'_a$ tal que $b \notin \mathrm{ran}\ h$ y después definimos h' así:

$$h' \restriction \mathrm{Dom}\ h = h \qquad (*)$$

$$h'(a) = b\ .$$

Por contradicción, supongamos no existe b con esta propiedad. Consideramos el caso $|\text{ran } h| \geq |\bar{f}'_a|$, pues si $|\text{ran } h| < |\bar{f}'_a|$ es obvio que existe el b que buscamos. En esta situación tenemos $m > |\bar{f}'_a|$, entonces por la definición de $\bar{f}'_a$, $|\bar{f}_a| = |\bar{f}'_a|$. Por hipótesis, para todo $b \in \bar{f}'_a$ existe $a_b \in \text{Dom } h$ tal que $h(a_b) = b$, entonces $a_b \in \bar{f}_a$, ya que h es un isomorfismo parcial. Como $\text{ran } h \supseteq \bar{f}'_a$ y $|\bar{f}_a| = |\bar{f}'_a|$ es finito entonces $\text{Dom } h \supseteq \bar{f}_a$, esto implica que $a \in \text{Dom } h$, una contradicción. Obviamente $h' \in I_i$ y cumple (1) si se define por (*). Falta demostrar que para b se cumple (2). Note que $(\bar{f}')_b = \bar{f}'_a$.

Supongamos $[a]^{i+1}_{\text{Dom } h} \in q^j$, es decir $R = [a]^{i+1}_{\text{Dom } h}$ es tal que $|R| \geq \omega_{\alpha_j}$. Como $R \subseteq \bar{f}_a$ tenemos entonces que $|\bar{f}_a| \geq \omega_{\alpha_j}$, así que $|\bar{f}'_b| \geq E^j_m$ y $R' = [b]^{i+1}_{\text{ran } h} = \bar{f}'_b \setminus \{y \in \bar{f}'_b \mid y \in \text{ran } h\}$ tiene cardinalidad $|\bar{f}'_b| - |\{y \in \bar{f}'_b \mid y \in \text{ran } h\}| \geq E^j_m-(m-1)$, ya que $|\text{ran } h| \leq m-1$, y entonces $R' \in S^j$ por definición.

(ii) La parte (1) es perfectamente similar a la anterior, pues los cardinales $<m$ de las clases finitas coinciden en las dos estructuras. Probamos (2). Dado $b \in B$ suponga que se ha escogido $a \in A$ tal que $h'(a) = b$ y $\bar{f}'_b = (\bar{f}_a)'$. Si $R' = [b]^{i+1}_{\text{ran } h} \in S^j$ entonces $|R'| \geq E^j_m-(m-1)$. Como $R' \subseteq \bar{f}'_b$ tenemos que $|\bar{f}'_b| \geq E^j_m$, por los posibles cardinales que pueden tener las clases $\bar{f}'$, ya que $E^{j-1}_m < E^j_m-(m-1)$. Si $|\bar{f}'_b| \geq E^j_m$ entonces $|\bar{f}_a| \geq \omega_{\alpha_j}$

y como $R = \bar{f}_a \setminus \{x \in \bar{f}_a \mid x \in \text{Dom } h\}$ entonces $|R| \geq \omega_{\alpha_j} - (m-1) = \omega_{\alpha_j}$, es decir $R \in q^j$. ▲

Ya estamos listos para demostrar el teorema del cual nuestro resultado principal será un corolario.

TEOREMA 2.3. *Para* $i = 1,\ldots,m$; $h \in I_i$ *con* $\text{Dom } h = \{a_1,\ldots,a_s\}$, $s \leq m-i$, *y* $\varphi(x_1,\ldots,x_s)$ *una fórmula de* $M^{\ell}_{\omega\omega}(Q^1,\ldots,Q^n)$ *tal que* $qr(\varphi(x_1,\ldots,x_s)) < i$ *tenemos:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,\ldots,a_s] \leftrightarrow \mathcal{L}^m \models \varphi[h(a_1),\ldots,h(a_s)].$$

Demostración. Por inducción en i y en la complejidad de las fórmulas.

(a) Para $i = 1$, $h \in I_1$, $|\text{Dom } h| \leq m-1$ y $\varphi(x_1,\ldots,x_s)$ tal que $qr(\varphi(x_1,\ldots,x_s)) < 1$, tenemos $qr\varphi(\vec{x}) = 0$. Si φ es atómica el resultado es trivial pues h es un isomorfismo parcial. La inducción para los conectivos proposicionales es también clara.

(b) Suponemos válido el teorema para i y lo demostramos para i+1. Sea $h \in I_{i+1}$ y $\varphi(x_1,\ldots x_s)$ tal que $qr(\varphi(\vec{x})) < i+1$. Los casos φ atómica y la inducción en fórmulas para $\wedge$ y $\neg$ son **triviales**. Examinamos los dos casos restantes:

1. $\varphi(x_1,\ldots,x_s)$ es de la forma $(\exists x)\psi(x_1,\ldots x_s,x)$ en donde el teorema se cumple para $\psi(x_1,\ldots,x_s,x)$, $qr(\psi(\vec{x})) < i$.
2. $\varphi(x_1,\ldots,x_s)$ es de la forma $(Q^j x)\psi(x_1,\ldots,x_s,x)$

en donde el teorema es válido para $\psi(x_1,\ldots,x_s,x)$.

1. $\mathfrak{A}\models(\exists x)\psi(x)[a_1,\ldots,a_s]$ si y sólo si existe $a\in A$ tal que $\mathfrak{A}\models\psi[a_1,\ldots,a_s,a]$; además, por la Propiedad 2.2 (i) sabemos que existe $h'\in I_i$ tal que $h\in h'$, $a\in \mathrm{Dom}\ h'$. Aplicando la hipótesis de inducción a ψ y h' tenemos que:

$$\mathfrak{A}\models\psi[a_1,\ldots,a_s,a]\leftrightarrow \mathcal{L}^m\models\psi[h'(a_1)\ldots,h'(a_s),h'(a)]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^m\models(\exists x)\psi(x)[h(a_1),\ldots,h(a_s)].$$

La otra dirección es análoga, utilizando Propiedad 2.2 (ii).

2. Demostramos primero que $\mathfrak{A}\models(Q^j x)\psi(x)[a_1,\ldots,a_s]$ implica $\mathcal{L}^m\models(Q^j x)\psi(x)[h(a_1),\ldots,h(a_s)]$. Supongamos $\mathfrak{A}\models(Q^j x)\psi(x)[a_1,\ldots,a_s]$, entonces $R=\{a\in A:\mathfrak{A}\models\psi[a_1,\ldots,a_s,a]\}\in q^j$, es decir $|R|\geq\omega_{\alpha_j}$. Demostramos ahora que $R=\bigcup_{a\in R}[a]^{i+1}_{\mathrm{Dom}\ h}$. Es claro que $R\subseteq\bigcup_{a\in R}[a]^{i+1}_{\mathrm{Dom}\ h}$. Sea $y\in[a]^{i+1}_{\mathrm{Dom}\ h}$ con $a\in R$, tenemos dos casos a considerar. Si $y\in\mathrm{Dom}\ h$ entonces $[y]^{i+1}_{\mathrm{Dom}\ h}=\{y\}=[a]^{i+1}_{\mathrm{Dom}\ h}$ y así $y=a\in R$. Si $y\notin\mathrm{Dom}\ h$, $y\neq a$, entonces consideramos la siguiente función $f:A\to A$, $f(a)=y$, $f(y)=a$, $f(x)=x$ si $x\neq a$ y $x\neq y$. Entonces f es claramente una biyección y cumple que para todo $x\in A$, $x\in R_i\Leftrightarrow f(x)\in R_i$; en otras palabras f es un automorfismo de $\mathfrak{A}$ y por consiguiente tenemos: $\mathfrak{A}\models\psi[a_1,\ldots,a_s,a]\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\psi[f(a_1),\ldots,f(a_s),f(a)]\leftrightarrow$ $\mathfrak{A}\models\psi[a_1,\ldots,a_s,y]$; y así $y\in R$.

Tenemos pues que $R=\bigcup_{a\in R}[a]^{i+1}_{\mathrm{Dom}\ h}$, y como el número de clases de equivalencia bajo la relación $\underset{\text{Dom } h}{\overset{i+1}{\sim}}$ es finito, escogemos clases distintas tales que $R = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k]^{i+1}_{\text{Dom } h}$ con $n < 2^{\ell}+m$. Como $\sum_{k=1}^{n} |[a_k]^{i+1}_{\text{Dom } h}| = |R| \geqslant \omega_{\alpha_j}$, entonces existe $a_k \in R$ tal que $|[a_k]^{i+1}_{\text{Dom } h}| \geqslant \omega_{\alpha_j}$. Por definición, $[a_k]^{i+1}_{\text{Dom } h} \in q^j$, y por la Propiedad 2.2(i) existen $h' \in I_i$, $b_{a_k} \in B$ tales que $h'(a_k) = b_{a_k}$, $h' \supseteq h$ y $[b_{a_k}]^{i+1}_{\text{ran } h} \in S^j$; luego, por hipótesis de inducción aplicada a ψ y a i, tenemos:

$$\mathfrak{A} \models \psi[a_1,..,a_s,a_k] \Leftrightarrow \mathcal{L}^m \models \psi[h'(a_1),..,h'(a_s),h'(a_k)]$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}^m \models \psi[h(a_1),..,h(a_s),b_{a_k}] .$$

Por tanto $b_{a_k} \in R' = \{y \in B | \mathcal{L}^m \models \psi[h(a_1),..,h(a_s),y]\}$ y como antes $R' = \bigcup_{b \in R'} [b]^{i+1}_{\text{ran } h} \supseteq [b_{a_k}]^{i+1}_{\text{ran } h} \in S^j$; entonces $R' \in S^j$, es decir $\mathcal{L}^m \models (Q^j x)\psi[h(a_1),..,h(a_s)]$, como queríamos mostrar.

Ahora demostramos la otra dirección, que requiere más cuidado. Supongamos $\mathcal{L}^m \models (Q^j x)\psi(x)[h(a_1),..$ $.,h(a_s)]$ y sea $R' = \{y \in B | \mathcal{L}^m \models \psi[h(a_1),..,h(a_s),y)]\}$, tenemos entonces por hipótesis que $R' \in S^j$ es decir $|R'| \geqslant E^j_m-(m-1)$. Igual que antes, podemos expresar R' como $R' = \bigcup_{k=1}^{n} [b_k]^{i+1}_{\text{ran } h}$ con $[b_s] \cap [b_k] = \emptyset$ para $k \neq s$ y $n < 2^{\ell}+m$; demostramos que existe $b_k \in R'$ tal que $|[b_k]^{i+1}_{\text{ran } h}| \geqslant E^j_m-(m-1)$. Suponemos para $k = 1,...,n$ que $|[b_k]^{i+1}_{\text{ran } h}| < E^j_m-(m-1)$, entonces

$|\bar{f}'_{b_k}| \leq |[b_k]^{i+1}_{\mathrm{ran}\ h}| + |\mathrm{ran}\ h| < E^j_m-(m-1)+(m-1) = E^j_m$

para cada j, y por la definición de las $\bar{f}_{b_i}$, tenemos que $|\bar{f}'_{b_k}| \leq E^{j-1}_m$ (haciendo $E^o_m = m$). Luego $|R'| = \sum_{k=1}^{n} |[b_k]^{i+1}_{\mathrm{ran}\ h}| \leq n\, E^{j-1}_m$; pero $n < 2^{\ell}+m$, y por lo tanto tendríamos que $|R'| < (2^{\ell}+m)E^{j-1}_m < E^j_m$, y ésto sería una contradicción pues $R' \in S^j$.

Entonces existe b_k tal que $b_k \in R'$ y $[b_k]^{i+1}_{\mathrm{ran}\ h} \in S^j$.

Por la Propiedad 2.2(ii) existen $h' \in I_i$, $a \in A$ tales que $h' \supseteq h$, $h'(a) = b_k$ y $[a]^{i+1}_{\mathrm{Dom}}|_h \in q^j$; entonces, aplicando la hipótesis de inducción a ψ y h' tenemos:

$$\mathcal{L}^m \models \psi[h'(a_1),..,h'(a_s),b_k] \leftrightarrow \mathcal{O}\!\mathcal{U} \models \psi[a_1,..,a_s,a].$$

Así que $a \in R = \{x \in A \mid \mathcal{O}\!\mathcal{U} \models \psi[a_1,...,a_s,x]\}$ y como $R \supseteq [a]^{i+1}_{\mathrm{Dom}\ h}$ obtenemos $\mathcal{O}\!\mathcal{U} \models (Q^j x)\psi(x)[a_1,...,a_s]$. ▲

COROLARIO 2.4. $\mathcal{O}\!\mathcal{U} \overset{<m}{\equiv} \mathcal{L}^m$.

Demostración. Por el teorema anterior con $i = m$. ▲

Terminamos así esta sección y ya tenemos las herramientas para obtener nuestros resultados.

§3. Compacidad enumerable de $M_{\omega\omega}(Q_1,Q_2)$. En esta sección demostramos que la lógica $M_{\omega\omega}(Q_1,Q_2)$ es enumerablemente compacta si Q_1 y Q_2 tienen la interpretación cardinal. El método de demostración se generaliza a $M_{\omega\omega}(Q_{\alpha_1},\ldots,Q_{\alpha_n})$ con $\alpha_i \geqslant 1$. Como un paso intermedio demostramos la compacidad enumerable de $M^{\ell}_{\omega\omega}(Q_1,Q_2)$ con un número finito ℓ de predicados.

Trabajamos con tres tipos de interpetaciones para $M^{\ell}_{\omega\omega}(Q,Q')$, que especificamos a continuación:

1. $\mathfrak{A} = \langle A,R_1,\ldots,R_\ell,q,q'\rangle$ en donde

$q = \{S\subseteq A \,|\, |S| \geqslant \omega_1\}$ y $q' = \{S \subseteq A \,|\, S \geqslant \omega_2\}$.

2. $\mathcal{L}^m = \langle B,R'_1,\ldots,R'_\ell,S,S'\rangle$ en donde $S = \{S\subseteq B \,|\, |S| \geqslant E^1_m\}$ y $S' = \{S\subseteq B \,|\, |S| \geqslant E^2_m\}$.

3. $\mathcal{C} = \langle C,R''_1,\ldots,R''_\ell,r,r'\rangle$ en donde $r = \{S\subseteq C \,|\, |S| > \omega_\alpha\}$ y $r' = \{S\subseteq C \,|\, |S| \geqslant \omega_\beta\}$, con $\omega_\alpha < \omega_\beta$ y ω_o pequeño para ω_α y ω_β (véase definición en §1).

Dada una estructura $\mathfrak{A}$ del tipo (1) arriba citado, le asociamos por medio de un procedimiento canónico una estructura $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ del tipo (3) y probamos que son elementalmente equivalentes.

DEFINICION 3.1. Construcción de $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ a partir de $\mathfrak{A}$. Sean $\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_{2\ell}$ las clases de equivalencia que obtenemos en A por medio de la Definición 2.1, §2. Entonces definimos

(i) Conjuntos disyuntos $\bar{f}''_i$ para $i = 1,\ldots,2^\ell$, asociados a los $\bar{f}_i$ así:

Si $|\bar{f}_i| \leqslant \omega_o$ entonces $|\bar{f}''_i| = |\bar{f}_i|$.

Si $|\bar{f}_i| = \omega_1$ entonces $|f''_i| = \omega_\alpha$.

Si $|\bar{f}_i| \geqslant \omega_2$ entonces $|\bar{f}''_i| = \omega_\beta$.

(ii) $C = \bigcup_{i=1}^{2^\ell} \bar{f}''_i$

(iii) Definimos los R''_i como en Definición 2.2 (iii) del §2.

(iv) $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}} = \langle C, R''_1, \ldots, R''$, r, r'$\rangle$ con r y r' interpretaciones del tipo (3).

TEOREMA 3.1. $\mathfrak{A} \equiv \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$.

<u>*Demostración*</u>. Haciendo $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 2$, hemos probado en la sección anterior que para cada m, $\mathfrak{A}$ es elementalmente equivalente a $\mathcal{L}^m_{\mathfrak{A}}$ de tipo (2), con respecto a sentencias de rango cuantificacional menor que m. Igualmente con $\alpha_1 = \alpha$ y $\alpha_2 = \beta$, $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ es elementalmente equivalente a $\mathcal{L}^m_{\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}}$ con respecto a sentencias de rango cuantificacional menor que m. Pero si se examina la Definición 2.2 (i) resulta que $\mathcal{L}^m_{\mathfrak{A}} \approx \mathcal{L}^m_{\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}}$, por lo tanto $\mathfrak{A} \overset{<m}{\equiv} \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ para todo m. ▲

Desarrollamos ahora el proceso inverso, dada una estructura $\mathcal{C}$ del tipo (3), le asociamos en forma canónica una estructura $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$ del tipo (1), de forma que sean elementalmente equivalentes.

DEFINICION 3.2. Sean $\bar{f}''_1, \ldots, \bar{f}_{2^\ell}$ las clases de $\mathcal{C}$.

(i) Tomamos conjuntos disyuntos $\bar{f}_i$ para $i = 1, \ldots, 2^\ell$

asociados a los $\bar{f}_i''$, así:

Si $|\bar{f}_i''| < \omega_o$ entonces $|\bar{f}_i| = |\bar{f}_i''|$.

Si $\omega_o \leq |\bar{f}_i''| < \omega_\alpha$ entonces $\bar{f}_i = \omega_o$.

Si $\omega_\alpha \leq |\bar{f}_i''| < \omega_\beta$ entonces $\bar{f}_i = \omega_1$.

Si $|\bar{f}_i''| \geq \omega_\beta$ entonces $|\bar{f}_i| = \omega_2$.

(ii,iii,iv). Se define $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$ como en las Definiciones 2.2 y 3.1, tomando los cuantificadores de tipo (1).

TEOREMA 3.2. $\mathcal{C} \equiv \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$.

Demostración. Similar a la demostración del teorema 3.1. ▲

COROLARIO 3.3. *La lógica* $M^{\ell}_{\omega\omega}(Q_1,Q_2)$ *es enumerablemente compacta.*

Demostración. Sea T un conjunto de sentencias de $M^{\ell}_{\omega\omega}(Q,Q')$ tal que todo subconjunto finito T_o de T tiene un modelo $\mathfrak{A}_o$ del tipo (1); por el Teorema 3.1, T_o tiene un modelo $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}_o}$ del tipo (3). Por la compacidad para este tipo de interpretaciones [Ca 1], T tiene un modelo $\mathcal{C}$ del tipo (3), y por el teorema 3.2 obtenemos que T tiene un modelo $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$ del tipo (1), como queríamos mostrar. ▲

TEOREMA 3.4. $M_{\omega\omega}(Q_1,Q_2)$ *es enumerablemente compacta.*

Demostración. Sea T un conjunto enumerable de sentencias de $M_{\omega\omega}(Q,Q')$ tal que todo subconjunto finito T_o tiene un modelo de tipo (1). Por el Teorema 3.1, T_o tiene un modelo de tipo (3), y por la

compacidad enumerable para este tipo de interpretaciones, T tiene un modelo $\mathcal{C} = \langle C, R''_1, R''_2, \ldots, r, r' \rangle$ del tipo (3). T contiene a lo sumo una cantidad enumerable de predicados: $P_1, P_2, \ldots$. Sea T_i el conjunto de las sentencias de T que tienen sus predicados entre $P_1, \ldots, P_i$, es claro que $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots$.
Sea

$$\mathcal{C}_i = \mathcal{C} \upharpoonright P_1 \ldots P_i = \langle C, R''_1, \ldots, R''_i, r, r' \rangle .$$

Obviamente, $\mathcal{C}_i \models T_i$ y además:

$$\mathcal{C}_{i+1} \upharpoonright P_1 \ldots P_i = \mathcal{C}_i . \qquad (*)$$

Para cada $\mathcal{C}_i$ podemos construír $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_{\mathcal{C}_i}$ de tipo (1), de acuerdo a la Definición 3.2, de manera que $\mathfrak{A}_i \equiv \mathcal{C}_i$ (Teorema 3.2) y así $\mathfrak{A}_i \models T_i$. Además, por (*), los $\mathfrak{A}_i$ se pueden construír de manera que

$$\mathfrak{A}_{i+1} \upharpoonright P_1 \ldots P_i = \mathfrak{A}_i ,$$

ya que si $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_{\mathcal{C}_i} = \langle A, R_1, \ldots, R_i, q, q' \rangle$, entonces se puede definir

$$\mathfrak{A}_{i+1} = \mathfrak{A}_{\mathcal{C}_{i+1}} = \langle A, R_1, \ldots, R_i, R_{i+1}, q, q' \rangle$$

tomando la partición que define $\mathfrak{A}_{i+1}$ como un refinamiento de la que induce $\mathfrak{A}_i$. Esto se puede hacer gracias a que la definición 3.2 no altera el cardinal de las clases finitas.
Finalmente definimos

$$\mathfrak{A}^* = \langle A, R_1, \ldots, R_n, \ldots, q, q' \rangle ,$$

con A el universo común de los $\mathfrak{A}_i$ y R_i la interpretación de P_i en $\mathfrak{A}_i$. Entonces $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}^* \upharpoonright P_1 \ldots P_i$. Sea σ una sentencia que pertenece a T, entonces σ tiene un número finito de símbolos de predicado y por lo tanto $\sigma \in T_i$, para algún i, así $\mathfrak{A}_i \models \sigma$ y por definición obtenemos que $\mathfrak{A}^* \models \sigma$. Entonces $\mathfrak{A}^*$ es un modelo del tipo (1) de T, y $M_{\omega\omega}(Q_1, Q_2)$ es enumerablemente compacta. ▲

TEOREMA 3.5. *Si* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 1$, *entonces* $M_{\omega\omega}(Q_{\alpha_1}, \ldots, Q_{\alpha_n})$ *es enumerablemente compacta.*

__*Demostración*__. Suponga $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$. Se toman cardinales $\omega_{\beta_1} < \ldots < \omega_{\beta_n}$ tales que ω_o es pequeño para ω_{β_i}, y como en las definiciones 3.1 y 3.2 se transforma la interpretación ω_{α_i} del cuantificador Q^i en la interpretación ω_{β_i}. La condición $\alpha_i \geqslant 1$ es necesaria para la definición 3.2. Si $\alpha_1 = 0$, tendremos $\omega_o \mapsto \omega_o$ y $\omega_{\beta_1} \mapsto \omega_o$, haciendo incorrecto el Teorema 3.2. ▲

PREGUNTA. ¿Es $M_{\omega\omega}(Q_n)_{n<\omega}$ enumerablemente compacta si Q_n se interpreta por el cardinal ω_n?

§4. Decidibilidad de algunas lógicas monádicas.

Vimos en §2 como asociar a un modelo $\mathfrak{A}$ de $M^{\ell}_{\omega\omega}(Q^1, \ldots, Q^n)$ de tipo (1), donde $q^j = \{S \subseteq A \mid |S| \geqslant \omega_{\alpha_j}\}$, un modelo $\mathfrak{L}^{m,\ell}$ finito de tipo (2) con $S^j = \{H \subseteq B \mid |H| \geqslant E^j_m - (m-1)\}$, tal que $\mathfrak{A} \overset{<m}{\equiv} \mathfrak{L}^{m,\ell}$,

y además el cardinal de cada clase $\bar{f}'$ de $\mathcal{L}^{m,\ell}$ sea menor o igual que m ó uno de los números E_m^j.

Ahora vamos a invertir el proceso, dado un modelo $\mathcal{L}^{m,\ell}$ de $M_{\omega\omega}^{\ell}(Q^1,\ldots,Q^n)$ de tipo (2), con la propiedad anterior para sus clases, le asociamos un modelo $\mathfrak{A}^{\ell}$ de tipo (1) tal que $\mathcal{L}^{m,\ell} \overset{<m}{\equiv} \mathfrak{A}^{\ell}$.

DEFINICION 4.1. Dado $\mathcal{L}^{m,\ell}$ de tipo (2) con partición $\bar{f}'_1,\ldots,\bar{f}'_{2^\ell}$,

(i) Definimos conjuntos disyuntos $\bar{f}_i$ para i = 1,.. .., 2^ℓ asociados a los $\bar{f}'_i$ así:

Si $|\bar{f}'_i| \leq m$ entonces $|\bar{f}_i| = |\bar{f}'_i|$.

Si $|\bar{f}'_i| = E_m^j$ entonces $|\bar{f}_i| = \omega_{\alpha_j}$.

(ii,iii,iv) $\mathfrak{A}^{\ell}$ se define en la forma usual.

Por el teorema 2.1 tenemos $\mathcal{L}^{m,\ell} \overset{<m}{\equiv} \mathfrak{A}^{\ell}$, pues es fácil ver que si se aplica la Definición 2.2 (§2) a $\mathfrak{A}^{\ell}$ se obtiene $\mathcal{L}^{m,\ell}$. Con esta construcción y las observaciones hechas antes de la definición, tenemos:

LEMA 4.1. *Una sentencia* σ *de* $M_{\omega\omega}(Q^1,\ldots,Q^n)$ *tiene un modelo de tipo* (1) *si y solamente si tiene un modelo de tipo* (2), $\mathcal{L}^{k+1,\ell}$, *de cardinalidad menor o igual que* $2^\ell E_k^n$, *donde* k = qr (σ) *y* ℓ *es el número de predicados en* σ.

__Demostración__. Toda sentencia σ de $M_{\omega\omega}(Q^1,..$ $.,Q^n)$ tiene un número finito ℓ de símbolos de predicado y un rango cuantificacional también finito

k. Supongamos σ tiene un modelo $\mathfrak{A}$ de tipo (1) y sea $\mathfrak{A}'$ la restricción de $\mathfrak{A}$ a los predicados de σ, entonces $\mathfrak{A}' \overset{<k+1}{\equiv} \mathcal{L}^{k+1,\ell}$ para alguna estructura de tipo (2), construída de acuerdo con Definición 2.2 (§2). Por lo tanto $|B| = \sum_{i\leqslant 2^\ell} |\bar{f}'_i| \leqslant \sum_{i<2^\ell} E^n_k = 2^\ell E^n_k$. Conversamente, si σ tiene un modelo de la forma $\mathcal{L}^{k+1,\ell}$ de tipo (2) donde cada clase $\bar{f}'_a$ tiene cardinal $\leqslant k$ o igual a E^j_k, la definición 4.1 permite transformarle en un modelo de σ de tipo (1). ▲

TEOREMA 4.1. $M_{\omega\omega}(Q_\alpha : \alpha \geqslant 0)$ *es decidible.*

Demostración. Una sentencia σ de $M_{\omega\omega}(Q_{\alpha_1} : \alpha \geqslant 0)$ está en algún $M^\ell_{\omega\omega}(Q_{\alpha_1}, \ldots, Q_{\alpha_n})$. Por el Lema anterior, tiene un modelo (es decir un modelo de tipo (1)) si y solo si tiene modelos de tipo (2) de cardinal a lo sumo $2^\ell E^n_k$, con ℓ y k calculables de σ. Por lo tanto basta examinar la familia finita (módulo isomorfismo) de estructuras de tipo (2) con cardinal acotado por $2^\ell E^n_k$ para decidir si σ tiene o nó un modelo. ▲

***

BIBLIOGRAFIA

[B] J.Barwise, *Back-and-forth through infinitary Logic*, Studies in Model Theory, (M.Morley, ed.), MAA Estudies in Math. (1973), 5-54.

[BS] J.L.Bell and A.Slomson, *Models and ultraproducts*, North Holland, 1969.

[Ca 1] X.Caicedo, Maximality and Interpolation in Abstract Logics, Ph.D.Dissertation, University of Maryland, 1978.

[Ca 2] X.Caicedo, *Back-and-Forth Systems for arbitrary quantifiers*. Proceedings of the IV Latin American Symposium on Mathematical Logic, North Holland(1980) 83-102.

[Ca 3] X.Caicedo, *Extensiones del Calculo de Predicados de Primer Orden*, U. de los Andes, 1978.

[E] A.Ehrenfeucht, *An application of games to the completeness problem for formalized theories*. Fund. Math. 49 (1961), 129-141.

[Fr] R.Fraissé, *Sur quelques classifactions des relations, basées sur des isomorphismes restreints*. Alger-Mathématique, 2 (1955), 16-60, 273-195.

[Fu] G.Fuhrken, *Languages with the added quantifier "there exists at Least $\aleph_\alpha$"*. The theory of Models, (J.Addison-L.Henkin, A.Tarski eds.), North Holland (1965), 121-131.

[Ke] J.Keisler, *Logic with the quantifier "there exists uncountably many"*. Ann. of Math. Logic 1 (1969), 1-94.

[Ka] C.Karp, *Finite quantifier equivalence*. The theory of Models (J.Addison, L.Henkin, A. Tarski, eds.), North Holland (1965).

[Li 1] P.Lindstrom, *First orden predicate Logic with generalized quantifier*. Theoria 32 (1966).

[Li 2] P.Lindstrom, *On Extensions of Elementary Logic*. Theoria 35 (1969).

[MS] J.A.Makowski and S.Shelah, *The theorems of Beth and Craig in Abstract Model theory*. Preprint, Jerusalem (1976).

[Mo] A.Mostowsky, *On a generalization of quantifiers*. Fund. Math. 4 (1957).

[S 1] A.Slomson, *Decision problems for Generalized quantifiers, a survey*. Set theory and Hierarchy Theory, Lect.Notes in Math.537 (1976).

[S 2] A.Slomson. *The monadic fragment of predicate calculus with the Chang quantifier*. Proceeding of the Summer School in Logic, Leeds 1967, edited by M.H.Lob, Springer Lecture Notes 70 (1968).

[V] Vinner, *A generalization of Ehrenfeucht's game and some aplications*, Israel Jour. of Math. 12 (1972).

* *

Departament of Mathematics
University of Wisconsin
Madison, Wisconsin 53706
U. S. A.

(Recibido en agosto de 1979).