Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen XIV (1980) págs. 209 - 232

PROPIEDADES DE TIPO ESPECTRAL DE CIERTA CLASE DE OPERADORES INTEGRALES*

por

Raúl TOVAR SANCHEZ

ABSTRACT. Using Carleman's inequalities, shown valid in reflexive Orlicz spaces by P. Nowosad and the author in previous work, certain properties of integral operators completely of finite double norm acting on these spaces are proved. The main results are: a form of Schur's inequatily, completeness of the set of generalized functions for certain operators, and the annihilation of the trace of T^2 for cuasi-nilpotent operators T. These generalize known results in the case of Hilbert-Schmidt operators on Hilbert Spaces.

---

* Este trabajo fué especialmente realizado para cumplir con uno de los requisitos que el Estatuto Docente establece para obtener la promoción a la categoría de Profesor Titular.

INTRODUCCION. El objetivo del presente trabajo es estudiar algunas propiedades de tipo espectral que tienen los operadores integrales completamente de doble norma finita actuando sobre un espacio de Orlicz reflexivo. Como es bien sabido, estos operadores generalizan de manera natural los operadores integrales con núcleo de cuadrado sumable actuando sobre el espacio de Hilbert L_2 (o también operadores de Hilbert-Schmidt sobre L_2), e incluyen como caso particular el caso L_p, $1 < p < \infty$.

El estudio de estos operadores está estrechamente ligado al de las ecuaciones integrales de segunda clase:

$$f(x) = g(x) + \lambda\int T(x,y)f(y)dy \,. \qquad (*)$$

Fué en 1921 que Carleman resolvió completamente esta ecuación en L_2. Para ello asoció a cada ecuación dos series de potencias: $\delta_T(\lambda)$, *determinante de Fredholm modificado*, y $\Delta_T(\lambda)$, *primer menor de Fredholm modificado;* mostró que estas series convergen en todo el plano complejo (la última en toda el álgebra de Banach de los operadores de Hilbert-Schmidt) y que si $\delta_T(\lambda) \neq 0$, la ecuación $(*)$ tiene una única solución dada por

$$f = g + \lambda\frac{\Delta_T(\lambda)}{\delta_T(\lambda)}g.$$

La parte esencial de este método consiste en demostrar el carácter entero tanto del determinante como del primer menor de Fredholm. Para ver esto, él mostró las siguientes desigualdades, hoy co nocidas como *desigualdades de Carleman*,

$$|\delta_T(\lambda)| \leqslant \exp(\tfrac{1}{2}|\lambda|^2 |||T|||^2)$$

$$|||\Delta_T(\delta)||| \leqslant |||T||| \exp(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}|\lambda|^2 |||T|||^2),$$

donde $|||T|||$ es la norma de Hilbert-Schmidt de T. Es importante notar que estas desigualdades no solamente implican que las funciones $\delta_T(\lambda)$ y $\Delta_T(\lambda)$ son enteras, sino que su orden es finito y menor o igual a dos. Es precisamente este hecho el que permite, bajo ciertas condiciones de crecimiento de la resolvente, demostrar la completez de las autofunciones generalizadas asociadas al operador (ver [2] pág. 1039-1043 ó [1] pág. 281).

Posteriormente, en 1952, Zaanen [11] consideró la ecuación (*) en un espacio de Orlicz y demostró que bajo ciertas hipótesis valen los mismos resultados que en el caso de L_2. Sinembargo, para mostrar el carácter entero del determinante y del primer menor no demuestra las desigualdades de Carleman, sino que usa ampliamente la teoría espectral de los operadores compactos. En consecuencia no obtiene cotas para el orden de estas funciones. El mismo dice que sería interesante saber si el método deCarleman permanece válido en el caso de los espacios de Orlicz o aún en el caso de los espacios L_p $(p \neq 2)$.

Finalmente, en 1975, P.Nowosad y el autor demostraron las desigualdades de Carleman para espacios de Orlicz reflexivos (ver [7]), que incluyen el caso L_p, $1 < p < \infty$. En vista de ésto, es natural preguntarse si las consecuencias de estas desigualdades siguen valiendo en el caso más general. Este es precisamente el objeto de este trabajo.

I. PRE-REQUISITOS Y NOTACIONES

En esta parte estableceremos las notaciones y convenciones que serán usadas en todo el trabajo. Igualmente, presentaremos un resumen de las principales propiedades tanto de los espacios de Orlicz como de los operadores completamente de doble norma finita, y en especial de aquellas que serán usadas explícitamente más adelante. Finalmente, y con el objeto de tornar más fácil la lectura, transcribiremos algunos teoremas de variable compleja y de la teoría de operadores que serán usados en las demostraciones posteriores.

Si E es un espacio de Banach, E' denotará su dual topológico.

El símbolo $\langle , \rangle$ denotará la dualidad entre E y su dual E', es decir si $x \in E$ y $x' \in E'$ entonces $\langle x,x' \rangle = x'(x)$.

Si $A \subseteq E$ entonces $A^{\perp} = \{x' \in E' : \langle x,x' \rangle = 0$ $\forall x \in A\}$. Si $B \subseteq E'$, entonces ${}^{\perp}B = \{x \in E' : \langle x,x' \rangle = 0$ $\forall x' \in B\}$.

Si $B \subseteq E'$ entonces $\overline{B}^{\omega}$ es la adherencia de B en la topología débil de E'.

Si E y F son espacios de Banach y $T : E \to F$ es un operador lineal continuo, $T' : F' \to E'$ denotará el adjunto de T, definido por $\langle x,T'y'\rangle = \langle Tx,y'\rangle$, $x \in E$, $y' \in F'$.

Si $T : E \to E$, la *resolvente* de T es el operador $(\lambda I-T)^{-1} = R(\lambda;T)$, λ en el conjunto resolvente de T.

Si $T : E \to F$ es un operador lineal continuo; $\|T\|$ denotará su norma, es decir $\|T\| = \operatorname{Sup}\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$, y $R(T)$ su rango, es decir $R(T) = \{Tx : x \in E\}$.

$f(z) = O(g(z))$ cuando $z \to 0$, significa que $|f(z)| \leq K|g(z)|$ en una vecindad V de 0.

1.1. Espacios de Orlicz. Una N-*función* es una aplicación $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no decreciente, convexa y par que satisface $M(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{M(x)}{x} = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = \infty$. En tal caso, la función definida por $N(v) = \max\limits_{u \geq 0}[u|v|-M(u)]$ es también una N-función, llamada la *complementaria* de M (ver [4] pág. 1-14).

CONVENCION: En todo el presente trabajo la letra M denotará una N-función y su complementaria será denotada por la letra N.

Se dice que M satisface la condición Δ_2 si existe $k > 0$ tal que $M(2u) \leq kM(u)$, $u \geq 0$.

Sea (X,Ω,μ) un espacio de medida σ-finito. El *espacio de Orlicz* $L_M = L_M(X,\Omega,\mu)$ consiste de todas las funciones f definidas y medibles sobre X, de va lor complejo, tales que para algún $k > 0$: $\int_X M(k|f|)d\mu < \infty$. Con la norma definida por

$$\|f\|_M = \inf_{k>o} \{k : \int_X M(\frac{|f|}{k})d\mu \leqslant 1\},$$

$(L_M, \| \ \|_M)$ es un espacio de Banach (ver [4] págs. 67-71 y 78). Si $M(x) = \frac{|x|^p}{p}$ entonces $L_M = L_p$ $(p \geqslant 1)$. Además tenemos los resultados siguientes:

(a) M *satisface la condición* Δ_2 *sí y sólo si* $L'_M = L_N$ *isométricamente* (ver [4] págs. 124-136).

(b) M *satisface la condición* Δ_2 *sí y sólo si* L_M *es separable* (ver [4] págs. 81-86).

(c) L_M *es reflexivo sí y sólo si* M *y* N *satisfacen la condición* Δ_2.

1.2. <u>Operadores completamente de doble norma finita</u>. Una función compleja $\mu\times\mu$-medible se llama un *núcleo completamente de doble norma finita con respecto a* L_M si satisface las cuatro condiciones siguientes:

(i) para casi todo $x \in X$, $T(x,y) \in L_N$ como función de y.

(ii) $t(x) = \|T(x,y)\|_N \in L_M$; denotamos $\|t(x)\|_M$ por $|T|_{NM}$.

(iii) para casi todo $y \in X$, $T(x,y) \in L_M$ como función de x.

(iv) $s(y) = \|T(x,y)\|_M \in L_N$; denotamos $\|s(y)\|_N$ por $\|T'\|_{MN}$.

La clase de todos estos núcleos será denotado por $D_M = D_M(X,\Omega,\mu)$.

Denotaremos por la misma letra T al operador integral sobre L_M definido por $T(x,y) \in D_M$:

$$Tf(x) = \int_X T(x,y)f(y)d\mu(y) \qquad (f \in L_M).$$

Este operador es continuo (ver [11] pg. 229). Si M satisface la condición Δ_2, T' es un operador integral sobre L_N y está definido por el núcleo $T'(x,y) = T(y,x)$. Si L_M es reflexivo el operador T es compacto (ver [4] p. 156-158).

Definiendo la multiplicación por

$$T_1T_2(x,y) = \int_X T_1(x,z)T_2(z,y)d\mu(z)$$

y la norma por $|||T|||_M = \max\{\|T\|_{NM}, \|T'\|_{MN}\}$, D_M es una álgebra de Banach (ver [11] pág. 475). Además $\|T\| \leq |||T|||_M$.

Si $T_1, T_2 \in D_M$ entonces

$$\tau(T_1T_2) = \int_X T_1(x,y)T_2(y,x)d\mu\times\mu(x,y) \quad < \quad \infty$$

y

$$|\tau(T_1T_2)| \leq |||T_1|||_M |||T_2|||_M \ .$$

El número $\tau(T_1T_2)$ es llamado *la traza* de T_1T_2. En particular si $T \in D_M$ y $n \geq 2$, $\|\tau(T^n)\| \leq |||T|||_M^n$.

CONVENCION: En todo lo que sigue $\sigma_n = \tau(T^n)$, $n \geq 2$.

Si $T \in D_M$, el *determinante de Fredholm modificado de* T está definido por $\delta_T(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n\lambda^n$ donde $\delta_0 = 1$ y para $n \geq 1$, $\delta_n = \frac{(-1)^n}{n!}\det P_n$ con

$$P_n = \begin{bmatrix} 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \cdots & 0 & 1 \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \cdots & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

El primer menor de Fredholm modificado de T está definido por $\Delta_T(\lambda) = \sum_{n=o}^{\infty} \Delta_n \lambda^n$, donde $\Delta_o = T$, y para $n \geqslant 1$ por $\Delta_n = \frac{(-1)^n}{n!} \det Q_n$ con

$$Q_n = \left[\begin{array}{c|c} T & n \quad 0 \cdots 0 \\ \hline T^2 & \\ \vdots & P_n \\ T^{n+1} & \end{array}\right]$$

1.3 <u>El caso de dimensión finita</u>.

Una norma Φ sobre $\mathbb{C}^n$ se llama *monótona* si para toda $x, y \in X^n$, $|x_i| \leqslant |y_i|$ $(i = 1, \ldots, n)$ implica $\Phi(x) \leqslant \Phi(y)$. La norma *conjugada* de Φ está definida por

$$\psi(y) = \max_{\Phi(x) \leqslant 1} |\langle x, y\rangle| .$$

Si A es una matriz $n \times n$, $(A)_i$ designa la i-ésima fila de A. La *ψ, Φ-norma de* A es el número

$$\|A\|_{\psi,\Phi} = \Phi(\psi((A)_1), \psi((A)_2), \ldots, \psi((A)_n)) .$$

La *doble norma de* A *relativa a* Φ es

$$|||A|||_{\Phi} = \max\{\|A\|_{\psi,\Phi}, \|A^t\|_{\Phi,\psi}\},$$

donde A^t es la matriz transpuesta de A.

Sea $L_M(X,\Omega,\mu)$ un espacio de Orlicz reflexivo, $\mathcal{A} = \{A_1,\ldots,A_n\} \subseteq \Omega$ una colección de subconjuntos dos a dos disyuntos, con $0 < \mu(A_i) = \alpha_i < \infty$, y sea $e_i = \frac{\chi_{A_i}}{\sqrt{\alpha_i}}$, donde χ_{A_i} es la función característica de A_i. Para $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n$, se define la *M-norma* de x, subordinada a la colección $\mathcal{A}$, por

$$\|x\|_M = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\right\|_M .$$

Entonces $\|\ \|_M$ es una norma monótona sobre $\mathbb{C}^n$ y su conjugada es $\|\ \|_N$.

(a) DESIGUALDAD DE SCHUR PARA NORMAS MONOTONAS. Sea A una matriz $n\times n$ y $\{\lambda_i\}$ sus autovalores. Sea Φ una norma monótona sobre $\mathbb{C}^n$, y ψ su norma conjugada. Entonces existe una constante $\alpha(n)$ (que depende de Φ y de n) tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant [1+\alpha(n)]\|A\|_{\psi,\Phi}\|A^t\|_{\Phi,\psi}$$

(ver [6] prop. 4.2).

(b) Sean $L_M(X,\Omega,\mu)$ un espacio de Orlicz reflexivo y $\alpha(n)$ la constante asociada a la norma de Orlicz sobre $\mathbb{C}^n$, subordinada a una colección cualquiera $\mathcal{A}$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha(n) \leqslant K$ (ver [7] Teorema 1.6).

Un núcleo de la forma $T(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij} e_i(x) e_j(y)$

donde $t_{ij} \in \mathbb{C}$, es llamado un *núcleo canónico de rango finito*. El conjunto de todos estos núcleos, para todas las elecciones posibles de colecciones A, se denota por R_M. Si $T \in R_M$ entonces $\sigma_1 = \tau(T) = \sum_{i=1}^{n} t_{ii}$.

(c) Si V denota el subespacio de L_M generado por $\{e_1,\ldots,e_n\}$ y T_V la restricción de T a V, la matriz de T_V respecto a la base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es precisamente $M_T = (t_{ij})_{i=1}^{n}$, y son válidas las siguientes propiedades para $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $T,S \in R_M$:

(i) $M_{\alpha T+\beta S} = \alpha M_T+\beta M_S$

(ii) $M_{TS} = M_T \cdot M_S$

(iii) $\tau(T^m) = \text{Traza de } M_T^m, \quad m \geqslant 1.$

(iv) $\|T\|_{NM} = \|M_T\|_{NM} \|T'\|_{MN} = \|M_T^t\|_{MN}$; $|||T|||_M = |||M_T|||_M$

(v) $\delta_T(\lambda) = \exp(\sigma_1\lambda)\det(I-\lambda M_T)$.

(d) Si L_M es reflexivo entonces R_M es denso en D_M (ver [7] Prop.1.4).

1.4. Desigualdad de Carleman.

(a) Sean $L_M(X,\Omega,\mu)$ un espacio de Orlicz reflexivo y $T \in D_M$, entonces $\delta_T(\lambda)$ es una función entera de λ y se tiene la desigualdad

$$|\delta_T(\lambda)| < \exp(\tfrac{1}{2}C|\lambda|^2 |||T|||_M^2),$$

donde C es una constante que solamente depende de M, y $C = 1$ en el caso de los espacios L_p, $1 < p < \infty$

(ver [7] teorema 1.7).

(b) Con las mismas hipótesis de (a) se tiene que $\Delta_T(\lambda)$ es una función entera de λ (con valores en el álgebra de Banach D_M) y se cumple la desigualdad

$$|||\Delta_T(\lambda)|||_M \leq 2\,|||T|||_M \exp(\tfrac{1}{2}C(2+|\lambda|\,|||T|||_M)^2).$$

(ver [7] Teorema 1.9).

1.5. Otros Prerrequisitos.

(a) Sea $F(\lambda)$ una función entera de orden finito ρ. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe una sucesión divergente $0 < r_1 < r_2 < \ldots$ tal que

$$\min_{|\lambda|=r_k} |f(\lambda)| > \exp(-r_k^{\rho+\varepsilon})$$

(ver [10] p. 273).

(b) PRINCIPIO DE PHRAGMÉN-LINDELÖF. Sea g una función analítica en el interior de un sector angular $\mathcal{O}$ formado por dos curvas de Jordan $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ diferenciables que no se intersectan y que tienen un ángulo menor de π/p en el origen. Supóngase que g es analítica y acotada sobre $\mathcal{H}_i - \{0\}$ $(i = 1,2)$ y que $|g(z)| = 0(\exp|z|^{-p})$ cuando $z \to 0$ en el interior de $\mathcal{O}$. Entonces $|g(z)| = 0(1)$ cuando $z \to 0$ en el interior de $\mathcal{O}$ (ver [2] pág. 1115).

(c) Sean $\{T_n\}$ una sucesión de operadores compactos, $T_n \to T$ uniformemente. Sea $\lambda_m(T)$ una enumeración de los autovalores no nulos de T, repetidos de acuerdo a sus multiplicidades. Entonces existe una enumeración $\lambda_m(T_n)$ de los autovalores no nulos de T_n, con repetición de acuerdo a sus multiplicidades, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_m(T_n) = \lambda_m(T), \qquad m \geqslant 1,$$

y el límite es uniforme en m (ver [2] pág. 109).

(d) TEOREMA DE FACTORIZACION DE HADAMARD. Sea f(z) una función entera de orden finito ρ y $f(0) \neq 0$, y sea $\{a_1,\ldots,a_n,\ldots\}$ una enumeración en orden creciente de los ceros de f. Sea $\beta \leqslant |\rho|$ el mayor entero no negativo k para el cual la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^k}$$

diverge. Entonces f(z) se puede escribir en la forma

$$f(z) = \exp(g(z)) \prod_{n=1}^{\infty} (1-\frac{a}{a_n})\exp(\frac{z}{a_n}+\ldots+ \frac{z^\beta}{\beta a_n^\beta}) ,$$

donde g(z) es un polinomio de grado menor o igual que $[\rho]$ y los factores exponenciales desaparecen si $\beta = 0$ (ver [5] pág. 289).

II. CONSECUENCIAS DE LA DESIGUALDAD DE CARLEMAN PARA ESPACIOS DE ORLICZ REFLEXIVOS.

2.1. <u>Desigualdad de Schur</u>. La desigualdad de Schur básicamente nos dá la rapidez con que tienden a cero los autovalores de cierta clase de operadores compactos. Schur probó que si $A = (a_{ij})$ es una matriz real o compleja $n \times n$, y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son sus autovalores entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 , \tag{1}$$

con igualdad si y sólo si A es una matriz normal. La raíz cuadrada no negativa del lado derecho de (1) es la norma Euclideana de A y se nota $|||A|||$. Posteriormente este resultado fué extendido a los operadores de Hilbert-Schmidt sobre un espacio de Hilbert, es decir:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \leqslant |||T|||^2 ,$$

donde la λ_i son los autovalores de T repetidos de acuerdo a su multiplicidad y $|||T|||$ es la norma de Hilbert-Schmidt de T.

En [6] se extiende este resultado a matrices infinitas completamente de doble norma finita con respecto a L_p, $1 < p < \infty$ (ver [6] Teorema 5.1). A continuación daremos una generalización y a su vez un refinamiento de esta desigualdad.

PROPOSICION 2.1. *Sea* $L_M(X,\Omega,\mu)$ *un espacio de Orlicz reflexivo,* $T \in D_M$, $\{\lambda_i\}$ *la sucesión de los autovalores de* T *repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \leqslant C\|T\|_{NM}\|T'\|_{MN} \leqslant C|||T|||_T^2$$

donde C *es una constante que depende solamente de* M, *y* C = 1 *en el caso de los espacios* L_p, $1 < p < \infty$.

Demostración.

(a) Primero supongamos $T \in R_M$. Por (1.3-c) los autovalores de T son los mismos de la matriz M_T. El resultado se sigue inmediatamente aplicando (1.3-a) junto con (1.3-b) y (1.3-c-iv). El hecho de que C = 1 en el caso L_p $(1 < p < \infty)$ se sigue de la observación siguiente al teorema 3.5 en [6].

(b) Por (1.3-d) existe una sucesión $\{T_n\} \subsetneq R_M$ tal que $T_n \to T$ en D_M. Como $\|T\| \leqslant |||T|||_M$, $T_n \to T$ uniformemente. Por (1.5-c) los autovalores λ_{ni} de T_n pueden ser ordenados de tal manera que $\lambda_{ni} \to \lambda_i$, cuando $n \to \infty$, con el límite uniforme en i. Esto implica que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_{ni}|^2 \to \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Por la parte (a) se tiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_{ni}|^2 \leqslant C\|T_n\|_{NM}\|T'_n\|_{MN} \;;$$

pasando al límite cuando $n \to \infty$ se obtiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \leqslant C\|T\|_{NM}\|T'\|_{MN} \leqslant C|||T|||_M^2.$$

2.2. La completez de las autofunciones generalizadas. Sea $T : L_M \to L_M$ un operador continuo. $f \in L_M$ se llama una *autofunción generalizada* de T si existen $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\lambda I - T)^n f = 0$. El conjunto de todas las autofunciones generalizadas de T se designa por $S_p(T)$, y $\overline{S_p(T)}$ denota la adherencia fuerte de $S_p(T)$ en L_M. En [2] se demuestra que si T es un operador de Hilbert-Schmidt sobre un espacio de Hilbert, bajo ciertas condiciones se tiene $\overline{S_p(T)} = H$ (ver Corolario 30 pág. 1041).

El objetivo de esta sección es demostrar la validez de este teorema en una situación mucho más general.

PROPOSICION 2.2. *Supóngase que el plano complejo está dividido en regiones por arcos diferenciables* $\mathcal{H}_1, \ldots \mathcal{H}_n$ *que parten del origen, no se intersectan fuera de él y cualesquiera dos de ellos consecutivos forman un ángulo menor de* $\pi/2$ *en el origen (por consiguiente* $n \geq 5$*). Sea* $L_M(X,\Omega,\mu)$ *un espacio de Orlicz reflexivo y* $T \in D_M$ *tal que*

$$\|R(\lambda;T)\| = O(|\lambda|^{-1}) \quad \textit{cuando} \quad \lambda \to 0$$

a lo largo de los arcos $\mathcal{H}_i$. *Entonces* $R(T) \subseteq \overline{S_p(T)}$.

Demostración.

(a) Sea $f \in (\overline{S_p(T)})^{\perp}$ arbitrario pero fijo y consideremos la función $F(\lambda) = \lambda R(\lambda;T')f$. El hecho de que T sea compacta implica que T' también lo es, y por consiguiente la función $F(\lambda)$ es analítica excepto posiblemente en $\lambda = 0$ y en un conjunto aislado de puntos $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\ldots\}$, los autovalores de T, en donde puede tener un polo.

Sea $P(\lambda_m;T')$ una proyección sobre el subespacio característico correspondiente a λ_m, tal que

$P(\lambda_m,T')R(\lambda;T') = R(\lambda;T')P(\lambda_m,T')$, λ en el conjunto resolvente de T'. Una tal proyección siempre existe (ver [3] pág. 178-189). Para $\lambda \neq \lambda_m$, λ en una vecindad de λ_m, se tiene:

$$F(\lambda) = \lambda P(\lambda_m,T')R(\lambda;T')f + \lambda R(\lambda;T')(I-P(\lambda_m,T'))f$$
$$= \lambda P(\lambda_m,T)'R(\lambda;T)'f + \lambda R(\lambda;T')(I-P(\lambda_m,T'))f.$$

Sea $g \in L_M$ arbitrario. Como $(\lambda_m I-T)P(\lambda_m,T)R(\lambda;T)g = 0$ se tiene que $P(\lambda_m,T)R(\lambda;T)g \in \overline{S_p(T)}$. Como $f \in (\overline{S_p(T)})^{\perp}$ entonces

$$<g,\lambda P(\lambda_m,T)'R(\lambda;T)'f> = \lambda<P(\lambda_m,T)R(\lambda;T)g,f> = 0.$$

Por consiguiente la función $\lambda P(\lambda_m,T)'R(\lambda;T)'f$ es idénticamente nula; por otra parte la función $\lambda R(\lambda;T')(I-P(\lambda_m,T'))f$ es analítica aún en $\lambda = \lambda_m$. Entonces la función $F(\lambda)$ es analítica aún en $\lambda = \lambda_m$.

(b) Ahora mostraremos que $F(\lambda)$ es analítica en $\lambda = 0$. Definamos

$$H(\lambda) = <g,F(\lambda)> = <g,\lambda R(\lambda;T)'f>$$
$$G(\lambda) = <g,\delta_T(\tfrac{1}{\lambda})\ F(\lambda)>.$$

(i) Sea $\varepsilon > 0$. Por (1.5-a) y el hecho de que $\delta_T(\lambda)$ es una función entera de orden menor o igual a 2, existe una sucesión $0 < r_1 < r_2 <\dots$ que diverge a ∞ tal que

$$\min_{|\lambda|=r_k} |\delta_T(\tfrac{1}{\lambda})| > \exp(-r_k^{-(2+\varepsilon)}).$$

(ii) De la definición de resolvente se tiene

$$\delta_T(x)(I-xT)^{-1} = \delta_T(x)I + x\Delta_T(x).$$

Usando las desigualdades de Carleman (1.4-a) y (1.4-b) se tiene

$$\|\delta_T(x)(I-xT)^{-1}\| \leq \exp\left[\tfrac{1}{2}C(4+|x|\,|||T|||_M)^2\right].$$

(iii) Haciendo $s_k = \frac{1}{r_k}$, entonces $s_k \to 0$ y por (i) y (ii):

$$\max_{|\lambda|=s_k} |H(\lambda)| = \max_{|\lambda|=s_k} \frac{|G(\lambda)|}{|\delta_T(\frac{1}{\lambda})|}$$

$$\leq R\exp\left[\tfrac{1}{2}C\left(4+\frac{|||T|||_M}{s_k}\right)^2 + \frac{1}{s_k^{2+\varepsilon}}\right],$$

donde R es una constante. Entonces para s_k suficientemente pequeño se tiene, por el principio del máximo,

$$|H(\lambda)| = O(\exp|\lambda|^{-(2+\varepsilon)}) \quad \text{cuando } \lambda \to 0.$$

Como ε está a nuestra disposición, lo elegimos de tal manera que el ángulo en el origen de cualquiera de los sectores en que el plano complejo está dividido sea menor que $\frac{\pi}{2+\varepsilon}$. Como sobre los arcos $\mathcal{H}_i$, por la hipótesis de la proposición, se tiene

$$|H(\lambda)| \leq \|g\|_M \|f\|_M |\lambda|\, \|R(\lambda;T)\| \leq C_1,$$

entonces el principio de Phragmen - Lindelöf (1.5-b) implica que $H(\lambda)$ es analítica en $\lambda = 0$.

(iv) $F(\lambda)$ tiene una expansión de Laurent alrededor de 0:

$$F(\lambda) = \sum_k a_k \lambda^k.$$

Entonces para $g \in L_M$, $H(\lambda)$ tiene la expansión alrededor de 0:

$$H(\lambda) = \sum_k \langle g, a_k \rangle \lambda^k.$$

Como $H(\lambda)$ es analítica en $\lambda = 0$, entonces $\langle g, a_k \rangle = 0$ para todo $k < 0$. El teorema de Hahn-Banach implica ahora que $a_k = 0$ para todo $k < 0$ y por consiguiente $F(\lambda)$ es analítica en $\lambda = 0$.

(c) De las partes (a) y (b) se concluye que $F(\lambda)$ es una función entera. De la identidad

$$T'R(\lambda;T')f = \lambda R(\lambda;T')f - f$$

se sigue que la función $T'R(\lambda;T')f$ es entera. Por otra parte

$$\|T'R(\lambda;T')\| \leq \|T'\| \|R(\lambda;T')\| \to 0$$

cuando $|\lambda| \to \infty$. Entonces por el teorema de Liouville

$$R(\lambda;T')T'f = T'R(\lambda;T')f \equiv 0.$$

Para $|\lambda| > \|T'\|$ se tiene entonces

$$0 = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(T')^n}{\lambda^{n+1}} T'f$$

y por consiguiente $T'f = 0$. Finalmente, si $Tg \in R(T)$ entonces

$$\langle Tg, f \rangle = \langle g, T'f \rangle = 0,$$

o sea $f \in R(T)^{\perp}$. En resumen hemos mostrado que si $f \in (\overline{S_p(T)})^{\perp}$ entonces $f \in R(T)^{\perp}$, o sea $(\overline{S_p(T)})^{\perp} \subsetneq$

$R(T)^{\perp}$, lo cual implica $R(T) \subseteq \overline{S_p(T)}$.

TEOREMA. *Con las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene* $\overline{S_p(T)} = L_M$.

Demostración.

(a) Vamos a mostrar que $L_N = N(T') + \overline{R(T')}^{\omega}$

Sean $f \in L_N$ y $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C}$, $\lambda_n \to 0$ a lo largo de uno de los arcos $\mathcal{H}_i$. Por la hipótesis del teorema, la sucesión $\{\lambda_n R(\lambda_n;T')f\} \subseteq L_N$ es acotado. Como M satisface la condición Δ_2 entonces por (1.1-b) L_M es separable y por consiguiente la topología débil de $L_N = L_M'$ (que coincide con la topología débil estrella, pues L_M es reflexivo) es metrizable. Entonces por el teorema de Alaoglu se puede suponer que $\lambda_n R(\lambda_n;T')f \overset{\omega}{\to} h \in L_N$, débilmente.

(i) Sea $g \in L_M$ arbitrario, entonces:

$$\begin{aligned}
|\langle g,T'h\rangle| = |\langle Tg,h\rangle| &= \lim_{n\to\infty} |\langle Tg,\lambda_n R(\lambda_n;T')f\rangle| \\
&= \lim_{n\to\infty} |\langle \lambda_n R(\lambda_n;T)Tg,f\rangle| \\
&= \lim_{n\to\infty} |\langle \lambda_n^2 R(\lambda_n;T)g,f\rangle - \lambda_n\langle g,f\rangle| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| \, \|g\|_M \|f\|_N \|\lambda_n R(\lambda_n;T)\| \\
&\quad + \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| \|g\|_M \|f\|_N \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Entonces $T'h = 0$.

(ii) Sea $\varphi \in {}^{\perp}R(T')$, entonces

$$\langle \varphi, f-h\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \varphi, f - \lambda_n R(\lambda_n;T')f\rangle$$

$$= - \lim_{n\to\infty} \langle \varphi, T' R(\lambda_n;T')f\rangle = 0.$$

Por consiguiente $f-h \in ({}^{\perp}R(T'))^{\perp} \subseteq ({}^{\perp}\overline{R(T')}^{\omega})^{\perp} = \overline{R(T')}^{\omega}$ (la última igualdad se sigue de [9] pág. 229-230).

Finalmente, como $f = h+(f-h)$, por (i) y (ii) se tiene

$$L_N = N(T')+\overline{R(T')}^{\omega}.$$

(b) Como L_N también es reflexivo y $\|R(\lambda;T)\| = \|R(\lambda;T')\|$, aplicando la proposición anterior a T' se obtiene

$$R(T') \subseteq \overline{S_p(T')} \subseteq \overline{S_p(T')}^{\omega}.$$

Además como $N(T') \subseteq \overline{S_p(T')}^{\omega}$, de la parte (a) se sigue que $L_N = \overline{S_p(T')}^{\omega}$.

(c) Aplicando el resultado de la parte (b) a T' se tiene

$$L_M = \overline{S_p(T'')}^{\omega} = \overline{S_p(T)}^{\omega}$$

ya que L_M es reflexivo. Finalmente, como las adherencias débil y fuerte de un subespacio son iguales, se tiene

$$L_M = \overline{S_p(T)} .$$

2.3. La nulidad de las trazas de las potencias de un operador cuasi-nilpotente.

DEFINICION. Un operador $T : E \to F$ se llama *cuasi-nilpotente* si $\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n} = 0$. Equivalentemente, si el espectro se reduce a cero.

En [2], pág. 1032, se demuestra que si un operador T de Hilbert-Schmidt es cuasi-nilpotente entonces la traza de T^2 es cero. A continuación presentaremos una generalización de este hecho.

TEOREMA. *Sean* $L_M(X,\Omega,\mu)$ *un espacio de Orlicz reflexivo y* $T \in D_M$ *cuasi-nilpotente, entonces* $\sigma_2 = Tr(T^2) = 0$.

Demostración. Por la desigualdad de Carleman (1.4-a) la función entera $\delta_T(\lambda)$ es de orden menor o igual a 2. Por otra parte sus ceros son precisamente los inversos de los autovalores diferentes de cero de T (ver [11] pág. 484). Si estos autovalores son $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\ldots$, usando la proposición 2.1 y el teorema de factorización de Hadamard (1.5-d), $\delta_T(\lambda)$ se puede escribir en la forma

$$\delta_T(\lambda) = \exp(g(\lambda))\prod_{n=1}^{\infty}(1-\lambda\lambda_n)\exp(\lambda\lambda_n) ,$$

donde $g(\lambda)$ es un polinomio de grado menor o igual a dos. Usando el hecho de que $\delta_T(0) = 1$, $\delta_T'(0) = 0$ y $\delta_T''(0) = -T_r(T^2)$, se concluye que $g(\lambda) \equiv 0$. Ahora si T es cuasi-nilpotente su espectro se reduce a cero, entonces $\delta_T(\lambda) \equiv 1$. Esto implica que $\delta_n = 0$ para todo $n \geqslant 1$. En particular, $\sigma_2 = -\frac{1}{2}\sigma_2 = 0$, o sea $T_r(T^2) = \sigma_2 = 0$.

COROLARIO. *Con las mismas hipótesis del teorema anterior se tiene:*

$$\|R(\lambda;T)\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\exp\left[\tfrac{1}{2}C\left(4+\frac{|||T|||_M}{|\lambda|}\right)^2\right].$$

Demostración. Aplique la desigualdad que aparece en la parte (b-ii) de la demostración de la proposición 2.2 y observe que $R(\lambda;T) = \lambda^{-1}(I-\lambda^{-1}T)^{-1}$ y $\delta_T(\lambda) \equiv 1$.

***

BIBLIOGRAFIA

[1] Agmon,S.: *Lecture notes on elliptic boundary value problems*. Van Nostrand Mathematical Studies, 1965.

[2] Dunford,N., Schwartz,J.: *Linear Operators, part* II. Interscience Publishers, 1963.

[3] Kato,T.: *Perturbation theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, New-York, 1966.

[4] Krasnosel'skii,M. and Rutickii,Y : *Convex Functions and Orlicz spaces*. P. Noordhoff, 1961.

[5] Markushevich,A.: *Theory of functions of a complex variable,* Vol. II. Prentice-Hall, 1965.

[6] Nowosad,P. and Tovar,R.: *Spectral Inequalities and* G-*Functions* (a aparecer en: Linear Algebra and its applications).

[7] ————————————.: *The Carleman-Smithies theory of integral operators for reflexive Orlicz spaces*. Integral Equations and Operator Theory, Vol. 2-3 (1979).

[8] Smithies,F.: *Integral equations*. Cambridge University Press, 1958.

[9] Taylor,A.: *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley Sons, New York, 1958.

[10] Titchmarsh,E.: *The theory of functions*. Clarendon Press, Oxford, 1932.

[11] Zaanen,A.: *Linear Analysis*. North-Holland Publishing Company, 1953.

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E. COLOMBIA

(Recibido en octubre de 1980).