Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XV (1981) págs. 81 - 86

σ-ADITIVIDAD DE CONJUNTOS DESPRECIABLES EN ESPACIOS DE RIESZ

por

Nicolás M. ZALOTE

RESUMEN. Sea μ una medida positiva sobre un espacio de Riesz E de funciones con valores reales, definidas sobre un conjunto X. En [2] la σ-aditividad para conjuntos μ-despreciables, se deduce del teorema de Beppo-Levi. En el presente trabajo se prueba que tal propiedad puede obtenerse sin la participación directa de los teoremas generales de convergencia. Para lograr este fin, se introduce la clase M de las funciones μ-convenientes, que resulta ser un útil paso intermedio entre el espacio E y el espacio de integración. Por razones de brevedad la definición de medida se ha modificado convenientemente.

ABSTRACT. Let μ be a positive measure on a Riesz space E of real-valued functions defined on a set X. In [2] the σ-additivity for negligible sets is derived from the Beppo-Levi theorem. In this paper it is shown that such property can be obtained without the participation of the general convergence theorems. This result has been achieved by the introduction of the class M of μ-convenient functions, which proves a useful step between E

and the integration space L. **For the sake of** brevity, the notion of **measure** has been suitably altered.

E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de funciones $f:X \to \mathbb{R}$, con la propiedad: $f_1, f_2 \in E \Rightarrow \mathrm{Sup}\{f_1, f_2\} \in E$.

Un elemento f de E se dice que es *positivo* ($f \geqslant 0$) si $f(x) \geqslant 0$, para todo x de E.

μ representa una forma lineal sobre E con la condición: $f \geqslant 0 \Rightarrow \mu(f) \geqslant 0$ (forma lineal positiva), y que satisface además un postulado de continuidad que daremos más adelante.

Se dice que una sucesión $\{f_i\}$, formada por elementos positivos de E, es μ-*conveniente* si es monótona creciente y los valores $\mu(f_i)$ están acotados.

A un subconjunto N de X lo llamaremos μ-*despreciable* si existe una sucesión μ-conveniente $\{f_i\}$ tal que: $x \in N \Rightarrow \lim_{i\to\infty} f_i(x) = \infty$. En este caso diremos que N *está definido por* $\{f_i\}$.

Son inmediatas las siguientes propiedades para conjuntos μ-despreciables:

(I) El conjunto ϕ es μ-despreciable, definido por cualquier $\{f_i\}$ μ-conveniente.

(II) La reunión finita de conjuntos μ-despreciables es un conjunto μ-despreciable.

(III) Todo subconjunto de un conjunto μ-despreciable es a su vez μ-despreciable.

Una propiedad P(x), $x \in X$, tiene lugar μ-pp si existe un conjunto μ-despreciable N tal que P(x) es cierta para $x \in X-N$.

Esto visto, el postulado de continuidad para μ

lo podemos enunciar como sigue: *si* $\{f_i\}$ *es una sucesión cualquiera de elementos de* E, *se debe cumplir*

$$\lim_{i\to\infty} f_i = 0 \ \mu\text{-pp} \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \mu(f_i) = 0.$$

Una función $F:X \to \bar{\mathbb{R}}^+$ se dirá que es μ-*conveniente* si existe una sucesión μ-conveniente $\{f_i\}$, que llamaremos definidora de F, tal que $F(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$, para todo x de X.

Si F es una función μ-conveniente, definida por la sucesión μ-conveniente $\{f_i\}$, el conjunto $N = \{x\in X | \lim_{i\to\infty} f_i(x) = F(x) = \infty\}$ es obviamente μ-despreciable y como consecuencia resulta que las funciones μ-convenientes convergen μ-pp en $\mathbb{R}$. Además, del postulado de continuidad se infiere con facilidad que si $\{f_i\}$ define a la función μ-conveniente F, existe $\lim_{i\to\infty} \mu(f_i)$ en $\mathbb{R}^+$ y es independiente de $\{f_i\}$. La μ-integral de F se obtiene entonces por extensión natural: $\mu(F) = \lim_{i\to\infty} \mu(f_i)$, en donde $\{f_i\}$ es cualquier sucesión μ-conveniente definidora de F.

Sea M la clase de las funciones μ-convenientes. Se tiene entonces que:

$$F_1,F_2 \in M \quad y \quad a_1,a_2 > 0 \Rightarrow a_1F_1+a_2F_2 \in M.$$

Pero la propiedad más importante de M es la de ser dicha clase cerrada respecto del mismo proceso que ha servido para definir los elementos que la componen, según se prueba a continuación:

PROPOSICION 1. *Si $\{F_i\}$ es una sucesión creciente de funciones μ-convenientes con sus μ-integrales $\mu(F_i)$ acotadas, la función* $F = \lim_{i\to\infty} F_i$ *es asimismo μ-conveniente.*

<u>*Demostración*</u>. Sea $\{f_{ij}\}$ una sucesión μ-conveniente definidora de F_i para $j \to \infty$. Hagamos $f_i = \operatorname{Sup}\{f_{1i},\ldots,f_{ii}\}$, la sucesión $\{f_i\}$ es creciente. Además, de $f_i \leqslant F_i$ se deduce que $\mu(f_i) \leqslant C < \infty$ y en consecuencia $\{f_i\}$ es una sucesión μ-conveniente. Sea F^* la función μ-conveniente definida por $\{f_i\}$. Como $f_{ij} \leqslant f_j \leqslant F$ $(i \leqslant j)$, se deduce, por paso al límite para $j \to \infty$, que $F_i \leqslant F^* \leqslant F$, y de aquí que $F = F^*$, tomando límite para $i \to \infty$. ∎

Finalmente, pasemos a establecer las relaciones existentes entre las funciones μ-convenientes y los conjuntos μ-despreciables.

Una función μ-conveniente *está asociada* al conjunto μ-despreciable N si existe una sucesión μ-conveniente $\{f_i\}$ definidora a la vez de N y de F. Se tienen las propiedades siguientes:

(1) *Si* F *es μ-conveniente, está asociada al conjunto μ-despreciable* $\{x \in X \mid F(x) = \infty\}$.

(2) *Toda función finita μ-conveniente* F *está asociada al conjunto vacío* ϕ *y solamente a él.* En efecto, supongamos que F está asociada al conjunto μ-despreciable N y sea $\{f_i\}$ una sucesión μ-conveniente, definidora a la vez de N y de F. Entonces, la proposición: $\lim_{i\to\infty} f_i(x) = F(x) = \infty$, es cierta solamente cuando $N = \phi$.

(3) *Si la función μ-conveniente* F *está asociada al conjunto μ-despreciable* N, *la nueva función μ-conveniente* aF $(a > 0)$, *está igualmente asociada a* N. En efecto, sea $\{f_i\}$ una sucesión μ-conveniente definidora a la vez de N y de F. La nueva sucesión μ-conveniente $\{af_i\}$ es definidora de N y de la función μ-conveniente aF.

(4) *Si* N *es un conjunto μ-despreciable y si* $\varepsilon > 0$, *se puede encontrar una función μ-conveniente* F *asociada a* N *y tal que* $\mu(F) < \varepsilon$. En efecto, sea $\{f_i\}$ una sucesión μ-conveniente asociada a N. La función F_1 definida por $F_1(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$ es μ-conveniente y está asociada a N. Si $\mu(F_1) = 0$, entonces basta hacer $F = F_1$. Si $\mu(F_1) > 0$, sea $F = \frac{a}{\mu(F_1)} F_1$, con $0 < a < \varepsilon$.

La σ-aditividad para conjuntos μ-despreciables se demuestra ahora como sigue:

PROPOSICION 2. *Si* $\{N_i\}$ *es una colección enumerable de conjuntos μ-despreciables, la reunión* $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ *es asimismo μ-despreciable.*

Demostración. A cada N_i se le puede asociar, en virtud de (4), una función μ-conveniente F_i tal que $\mu(F_i) < \frac{1}{2}^i$. El conjunto μ-despreciable $\bigcup_{j=1}^{i} N_j$ tiene entonces por función μ-conveniente asociada la definida por $\tilde{F}_i = \sum_{j=1}^{i} F_j$. La sucesión $\{\tilde{F}_i\}$ de funciones μ-convenientes es creciente y tiene sus μ-integrales acotadas. En virtud de la proposición 1, la función $\tilde{F} = \lim_{i\to\infty} \tilde{F}_i$ es μ-conveniente, y haciendo entonces uso de (1) resulta que el conjunto $N = \{x \in X | \tilde{F}(x) = \infty\}$ es μ-despreciable. Finalmente, $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ es un conjunto μ-despreciable por ser un subconjunto de N. ∎

* *

BIBLIOGRAFIA

[1] Bass, J., *Cours de Mathématiques* (Tome III), Massón et Cie. ed., 1971, Paris.

[2] Zamansky, M., *Introduction à l'algèbre et l'analyse modernes* (Deuxième édition), Dunod, 1963, Paris.

* * *

Departamento de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Matemáticas
Universidad de la Laguna
Tenerife, Islas Canarias
ESPAÑA.

(Recibido en abril de 1981).