Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XV (1981) págs. 87 - 112

LIMITE DE LA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n/(p:p)_n^2$

CUANDO $p \to 1^-$

por

Yu TAKEUCHI

RESUMEN. Se demuestra que si $(p:p)_n = (1-p)(1-p^2)\dots(1-p^n)$ y $\lambda = 1,2$, entonces $\lim_{p\to 1^-} \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n/(p:p)_n^{\lambda} = 0$. El caso $\lambda = 1$ no ofrece dificultades, pero el caso $\lambda = 2$ requiere un estudio cualitativo de la ecuación de recurrencia $A_{n+2}-2A_{n+1}+(1+\alpha_n)A_n=0$, en donde la sucesión (α_n) decrece hacia cero.

ABSTRACT. It is shown that if $(p:p)_n = (1-p)(1-p^2)\dots(1-p^n)$ y $\lambda = 1,2$, then $\lim_{p\to 1^-} \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n/(p:p)_n^{\lambda}$ is 0. The case $\lambda = 1$ is disposed easily, but the case $\lambda = 2$ requires a qualitive study of the sequences satisfying the equation $A_{n+2}-2A_{n+1}+(1+\alpha_n)A_n=0$ where (α_n) converges decreasingly to 0.

§1. Introducción. Las series del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n p^{2n}}{(p:p)_n^2}$$

fueron estudiadas por Ramanujan, véase [1] y [2]. En el presente artículo estudiaremos el comportamiento de las series de potencias de x

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(p:p)_n^{\lambda}} \qquad (\lambda = 1 \text{ ó } 2)$$

donde

$$(p:p)_n = (1-p)(1-p^2)(1-p^3)\ldots(1-p^n).$$

El problema fué suministrado originalmente por el profesor Joaquin Bustos (Arizona State University, USA), se trata de buscar el límite:

$$\lim_{p\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(p:p)_n^2}$$

para $0 < x < 1$. Se observa fácilmente que dicho límite es cero si se acepta el siguiente procedimiento *no justificable*. Como

$$1-p^n = (1-p)(1+p+p^2+\ldots+p^{n-1})$$

entonces

$$(p:p)_n = (1-p)^n 1(1+p)(1+p+p^2)\ldots(1+p+\ldots+p^{n-1})$$

$$\sim n!(1-p)^n \quad \text{para} \quad p \sim 1.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(p:p)_n^{\lambda}} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^{\lambda}} \left\{\frac{x}{(1-p)^{\lambda}}\right\}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^{\lambda}} y^n$$

donde

$$y = \frac{x}{(1-p)^{\lambda}}.$$

Para $\lambda = 1$ tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^n}{n!} = e^{-y} \to 0 \quad \text{cuando} \quad y \to +\infty.$$

Para $\lambda = 2$ tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^n}{(n!)^2} = J_0(2\sqrt{y}) \to 0 \text{ cuando } y \to +\infty.$$

Como $y \to +\infty$ cuando $p \to 1^-$ (para $x > 0$ fijo), entonces el límite discutido es cero para $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$.

En el presente artículo, demostraremos el resultado anterior siguiendo un camino totalmente diferente, pues no es posible dar alguna justificación del razonamiento empleado aquí.

§2. El Caso $\lambda = 1$. Sea

$$g_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(p:p)_n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(1-p)(1-p^2)\dots(1-p^n)} \tag{1}$$

entonces

$$g_p(x) - g_p(xp) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-p^n) x^n}{(1-p)(1-p^2)\dots(1-p^{n-1})(1-p^n)}$$

$$= -x\{1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(1-p)(1-p^2)\dots(1-p^n)}\} = -xg_p(x),$$

o sea $(1+x)g_p(x) = g_p(xp)$. Reemplazando x por xp^{n-1} se tiene que

$$(1+xp^{n-1})g_p(xp^{n-1}) = g_p(xp^n). \qquad (2)$$

Multiplicando miembro a miembro la igualdad (2) con respecto a n, de 1 hasta n, se obtiene:

$$(1+x)(1+xp)\dots(1+xp^{n-1})g_p(x) = g_p(xp^n)$$

ó

$$g_p(x) = \frac{g_p(xp^n)}{\prod_{k=1}^{n}(1+xp^{k-1})} \quad . \qquad (3)$$

Como $g_p(x)$ es una serie de potencias de x convergente para $-1 < x < 1$, entonces $g_p(x)$ es continua en $(-1,1)$, por lo tanto $g_p(xp^n) \to g_p(0) = 1$ cuando $n \to \infty$, puesto que $xp^n \to 0$ $(n \to \infty)$ para $0 < p < 1$. Así, de (3) obtenemos que

$$g_p(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{g_p(xp^n)}{\prod_{k=1}^{n}(1+xp^{k-1})} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1+xp^{k-1})}. \qquad (4)$$

Como

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+xp^{k-1}) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} xp^{k-1} = \frac{x}{1-p} \xrightarrow[p\to 1^-]{} +\infty$$

se tiene que

$$\lim_{p\to 1^-} g_p(x) = \lim_{p\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(p:p)_n} = 0 \quad . \qquad (5)$$

También existe el límite $\lim_{x\to 1^-} g_p(x)$, para $p < 1$ fijo, y

$$\lim_{x\to 1^-} g_p(x) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(p:p)_n} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1+p^{k-1})} . \quad (6)$$

§3. <u>El caso</u> $\lambda = 2$, <u>transformación de la serie</u>. Sea

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(p:p)_n^2} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\{(1-p)(1-p^2)..(1-p^n)\}^2}$$

$(0 < p < 1)$, (7)

entonces esta serie de potencias converge para $-1 < x < 1$. Tenemos

$$f_p(x)-2f_p(xp)+f_p(xp^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^n-2(xp)^n+(xp^2)^n)}{[(1-p)(1-p^2)..(1-p^n)]^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n (1-p^n)^2}{[(1-p)(1-p^2)..(1-p^n)]^2}$$

$$= -x\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{[(1-p)(1-p^2)..(1-p^n)]^2}\right\} = -xf_p(x),$$

o sea

$$(1+x)f_p(x) - 2f_p(xp) + f_p(xp^2) = 0. \quad (8)$$

Sean

$$a_n = f_p(xp^n) , \quad r_n = 1+xp^n \quad (n = 0,1,2,...). \quad (9)$$

Reemplazando x por xp^n en (8) se obtiene que

$$r_n a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} = 0 \quad (n = 0,1,2,\dots). \tag{10}$$

Para $n = 0$, $r_0 a_0 - 2a_1 + a_2 = 0.$

(11)

Para $n = 1$, $r_1 a_1 - 2a_2 + a_3 = 0$.

Eliminando a_1, $r_0 r_1 a_0 - (4-r_1)a_2 + 2a_3 = 0.$ (12)

Tenemos, en general, una relación entre a_0, a_n y a_{n+1} como sigue:

$$r_0 r_1 \dots r_{n-1} a_0 - A_n a_n + A_{n-1} a_{n+1} = 0 \quad (n = 1,2,3\dots). \tag{13}$$

En realidad, de (10) y (13) eliminando a_n obtenemos:

$$r_0 r_1 \dots r_n a_0 - (2A_n - r_n A_{n-1})a_{n+1} + A_n a_{n+2} = 0,$$

por lo tanto $A_{n+1} = 2A_n - r_n A_{n-1}$ $(n = 2,3,4,\dots)$, ó

$$A_{n+2} - 2A_{n+1} + (1+xp^{n+1})A_n = 0 \quad (n = 1,2,3,\dots). \tag{14}$$

De (11) y (12) tenemos:

$$A_1 = 2, \quad A_2 = 4 - r_1 = 3 - xp. \tag{15}$$

(Nota: si tomamos $A_0 = 1$ entonces (14) es también válida para $n = 0$). De (13):

$$a_0 = \frac{A_n a_n - A_{n-1} a_{n+1}}{r_0 r_1 \dots r_{n-1}}$$

$$= \frac{a_n(A_n - A_{n-1}) + A_{n-1}(a_n - a_{n+1})}{r_0 r_1 \dots r_{n-1}} . \tag{16}$$

En el siguiente parágrafo se va a demostrar que la sucesión $(A_n - A_{n-1})$ es convergente (Lema 1). Sea

$$B(p,x) = \lim_{n\to\infty}(A_n - A_{n-1}) \ , \tag{17}$$

tenemos entonces que

$$A_{n-1} = A_1 + \sum_{k=2}^{n-1}(A_k - A_{k-1}) = O(n). \tag{18}$$

Por otra parte, $f_p(x)$, una función definida por la serie convergente de potencias de x, es continua en (-1,1), luego $a_n = f_p(xp^n) \to f_p(0) = 1$ cuando $n \to \infty$. También $A_{n-1}(a_n - a_{n+1}) \to 0 \quad (n \to \infty)$ puesto que $A_{n-1} = O(n)$ y $a_n - a_{n+1} = f_p(xp^n) - f_p(xp^{n+1}) = O(p^n)$. De (16) y (17) obtenemos:

$$f_p(x) = a_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n(A_n - A_{n-1}) + A_{n-1}(a_n - a_{n+1})}{r_0 r_1 \dots r_{n-1}},$$

así:

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(p:p)_n^2} = \frac{B(p;x)}{\prod_{n=0}^{\infty} r_n} = \frac{B(p;x)}{\prod_{n=0}^{\infty}(1+xp^n)}. \tag{19}$$

§4. <u>Estudios cualitativos de la sucesión</u> (A_n). En el presente parágrafo estudiaremos las propiedades de la sucesión (A_n) dada por

$$A_{n+2} - 2A_{n+1} + (1+\alpha_n)A_n = 0 \quad (0 < \alpha_n < 1) \tag{20}$$

(más generalque la relación (14)). La sucesión (A_n) está bien determinada si se conocen los valores de A_1 y A_2 (los valores iniciales de la sucesión). Supongamos que $0 \leqslant A_1 < A_2$. De (20) ,

$$(A_{n+2}-A_{n+1}) = (A_{n+1}-A_n) - \alpha_n A_n . \qquad (21)$$

De (21) se observa que

$$(A_2-A_1) > (A_3-A_2) > (A_4-A_3) > \dots$$

o sea que $(A_{n+1}-A_n)$ es decreciente para n = 1,2,3..

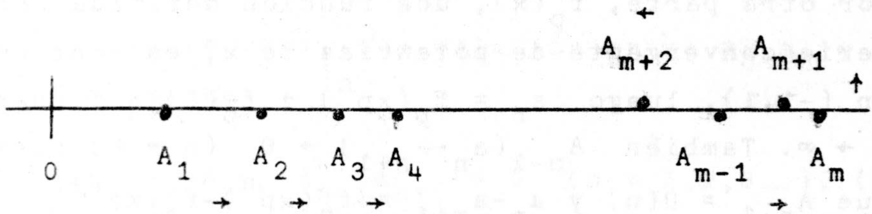

Figura 1

(i) Si la diferencia $(A_{n+1}-A_n)$ nunca llega a ser negativa, entonces la sucesión (A_n) es creciente, por lo tanto (A_n) converge ó diverge a $+\infty$. En este caso, la sucesión $(A_{n+1}-A_n)$ converge.

(ii) Supongamos ahora que para algún subíndice m la diferencia $(A_{n+1}-A_n)$ llega a ser negativa (ver Figura 1): $A_m-A_{m-1} \geqslant 0$, pero $A_{m+1}-A_m < 0$. Multiplicando (21) por -1:

$$(A_{n+1}-A_{n+2}) = (A_n - A_{n+1})+\alpha_n A_n . \qquad (22)$$

De (22) se observa (ver Figura 2) que:

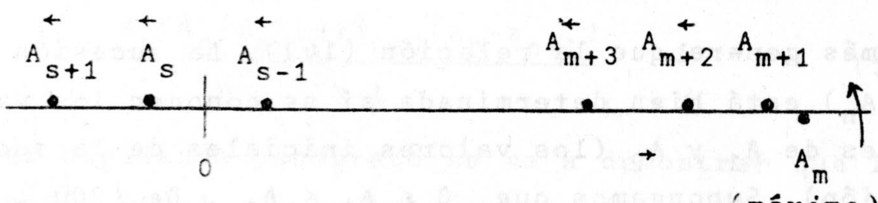

Figura 2

$$0 < (A_m - A_{m+1}) < (A_{m+1} - A_{m+2}) < (A_{m+2} - A_{m+3}) < \dots$$

Así, la sucesión $(A_n)_{n \geq m}$ es decreciente, y para algún subíndice s alcanza un valor negativo:

$$A_{s-1} \geq 0 \ , \quad 0 > A_s > A_{s+1} > A_{s+2} > \dots$$

Como $A_n < 0$ para $n = s, s+1, s+2, \dots$, se tiene por (22) que

$$(A_{s+1} - A_{s+2}) > (A_{s+2} - A_{s+3}) > (A_{s+3} - A_{s+4}) > \dots$$

Si $(A_n - A_{n+1})$ nunca llega a ser negativo, entonces la sucesión (A_n) converge ó diverge a $-\infty$ (en este caso la diferencia $(A_n - A_{n+1})$ converge), en caso contrario, para algún subíndice k la diferencia $(A_n - A_{n+1})$ va a tomar valor negativo (ver Figura 3): $A_{k-1} - A_k \geq 0$, pero $A_k - A_{k+1} < 0$.

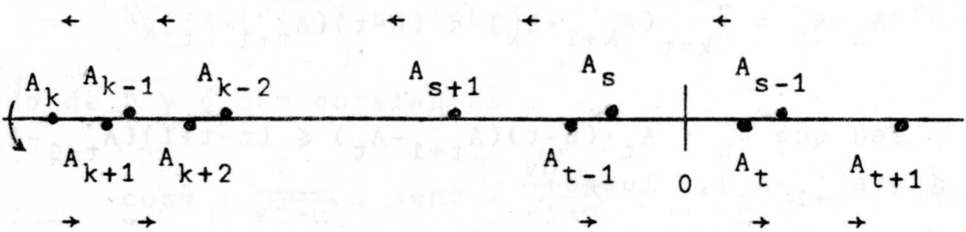

Figura 3

De esta manera, la sucesión (A_n) comienza a crecer nuevamente a partir de $n = k$, y para algún subíndice t tenemos:

$$A_{t-1} < 0 \leq A_t < A_{t+1} < \dots$$

En conclusión, la sucesión (A_n) dada por (20) es una sucesión oscilante o converge (diverge a $\pm\infty$) en forma monótona a partir de *algún término*.

Supongamos ahora que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n < +\infty , \tag{23}$$

$$A_{t-1} < 0 \leqslant A_t < A_{t+1} \text{ (para algún } t). \tag{24}$$

Sumando la igualdad (21) con respecto a n, desde $n = t$ hasta $n-1$, tenemos:

$$(A_{n+1}-A_n) = (A_{t+1}-A_t) - \sum_{k=t}^{n-1} \alpha_k A_k . \tag{25}$$

Por otra parte, como $(A_{n+1}-A_n) < (A_{t+1}-A_t)$ para $n > t$, tenemos:

$$A_n-A_t = \sum_{k=t}^{n-1}(A_{k+1}-A_k) < (n-t)(A_{t+1}-A_t),$$

o sea que $A_n < A_t+(n-t)(A_{t+1}-A_t) \leqslant (n-t+1)(A_{t+1}-A_t) \leqslant n(A_{t+1}-A_t)$, luego:

$$\sum_{k=t}^{\infty}\alpha_k A_k < \sum_{k=t}^{\infty} k\alpha_k (A_{t+1}-A_t) < +\infty .$$

De (25) se observa que $(A_{n+1}-A_n)$ nunca llega a ser negativa si

$$(A_{t+1}-A_t) \geqslant \sum_{k=t}^{\infty} \alpha_k k (A_{t+1}-A_t)$$

ó

$$\sum_{k=t}^{\infty} \alpha_k k \leqslant 1. \tag{26}$$

La condición (26) siempre se cumple para t suficientemente grande ya que la serie en (23) converge. Por lo tanto, tenemos el siguiente Lema:

LEMA 1. *Sea* (A_n) *la sucesión dada por* (20) *con la condición adicional* (23). *Entonces los términos* A_n *oscilan entre los mínimos y los máximos, y a partir de algún subíndice* A_n *es creciente (o decreciente) monótonamente. La diferencia* $(A_{n+1}-A_n)$ *converge cuando* $n \to \infty$.

§5. <u>La sucesión</u> (Y_n) <u>dada por</u> $Y_{n+2}-2Y_{n+1}+(1+\alpha)Y_n = C_n$. Sea (X_n) una sucesión dada por:

$$X_{n+2}-2X_{n+1}+(1+\alpha)X_n = 0 \quad (0 < \alpha < 1). \tag{27}$$

Por un cálculo directo se demuestra que

$$X_n = D(\sqrt{1+\alpha})^n \operatorname{sen}(n\theta+\delta), \tag{28}$$

donde D y δ son constantes y

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}. \tag{29}$$

Las dos constantes D y δ son determinadas por los dos primeros términos de la sucesión:

$$X_0 = D\operatorname{sen}\delta, \quad X_1 = D\sqrt{1+\alpha}\operatorname{sen}(\theta+\delta). \tag{30}$$

Si se conocen los valores de X_0 y X_1 *todos los valores* de la sucesión (X_n) están determinados en forma única, no sólo para n positivo *sino también para* n *negativo*. En la Figura 4 se muestra cómo se construye gráficamente la sucesión (X_n), como las *proyecciones* sobre la recta OX de los puntos espirales en el plano OXY.

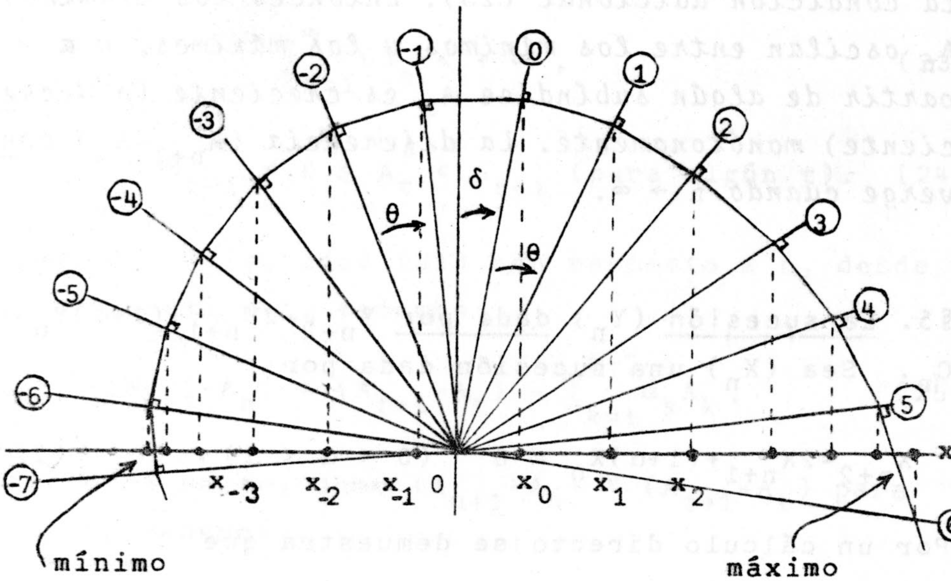

Figura 4

Si $X_{-1} < 0 \leqslant X_0 < X_1$ entonces $0 \leqslant \delta < \theta$. Sea $N = [\frac{\pi}{2\theta}]$ la parte entera de $\frac{\pi}{2\theta}$, entonces:

(i) si $N\theta+\delta > \frac{\pi}{2}$, (X_n) es creciente de $n = 0$ hasta $n = N$:

$$0 \leqslant X_o < X_1 < X_2 < \ldots < X_{N-1} \leqslant X_N \quad (> X_{N+1}),$$

(ii) si $N\theta+\delta \leqslant \frac{\pi}{2}$, (X_n) es creciente de $n = 0$ hasta $n = N+1$:

$$0 \leqslant X_o < X_1 < X_2 < \ldots < X_N \leqslant X_{N+1} \quad (> X_{N+2}).$$

También, se observa que

(i') si $(N+1)\theta-\delta > \frac{\pi}{2}$, (X_n) es decreciente de $n=-1$ hasta $n=-N$:

$$(X_0 \geqslant)\ \ 0 > X_{-1} > X_{-2} > X_{-3} > \ldots > X_{-N+1} \geqslant X_{-N}$$
$$(< X_{-N-1}),$$

(ii') si $(N+1)\theta-\delta \leqslant \frac{\pi}{2}$, (X_n) es decreciente de $n=-1$ hasta $n=-N-1$:

$$(X_0 \geqslant)\ \ 0 > X_{-1} > X_{-2} > \ldots > X_{-N} \geqslant X_{-N-1}$$
$$(< X_{-N-2}).$$

NOTA: Si $\delta = 0$ entonces se tiene (ii) y (i').

LEMA 2. *Sea* (X_n) *la sucesión dada por* (27). *Si* (Y_n) *es la sucesión determinada por:*

$$Y_{n+2}-2Y_{n+1}+(1+\alpha)Y_n = c_n \quad (n = 0,\pm1,\pm2,\pm3,..), \qquad (31)$$

con $Y_0 = X_0$, $Y_1 = X_1$, *entonces tenemos:*

$$\text{(i)}\ \ Y_n = X_n+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sum_{i=1}^{n} c_{i-1}(\sqrt{1+\alpha})^{n-i}\operatorname{sen}(n-i)\theta \qquad (32)$$
$$(n = 1,2,3,\ldots)$$

$$\text{(ii)}\ \ Y_n = X_n-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sum_{i=1}^{-n+1} c_{-i}(\sqrt{1+\alpha})^{n+i-1}\operatorname{sen}(n+i-1)\theta \qquad (33)$$
$$(n = 0,-1,-2,-3,-4,\ldots).$$

Demostración: (i) Sea $(X_n^{(i)})_n$ la sucesión determinada para cada $i \geqslant 1$ por:

$$X_{i+1}^{(i)} = c_{i-1}$$

$$X_{n+2}^{(i)}-2X_{n+1}^{(i)}+(i+\alpha)X_n^{(i)} = 0 \quad \text{si } n \geqslant i,$$

$$X_n^{(i)} = 0 \qquad \text{si } n \leqslant i,$$

entonces, por (28), se tiene que:

$$X_n^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} c_{i-1} (\sqrt{1+\alpha})^{n-i} \operatorname{sen}(n-i)\theta \qquad \text{para } n \geqslant i,$$

así: $Y_n = X_n + \sum_{i=1}^{n} X_n^{(i)}$ para $n \geqslant 0$.

Evidentemente tenemos $Y_0 = X_0$, $Y_1 = X_1$. Además

$$Y_{n+2} - 2Y_{n+1} + (1+\alpha)Y_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{X_{n+2}^{(i)} - 2X_{n+1}^{(i)} + (1+\alpha)X_n^{(i)}\} + X_{n+2}^{(n+1)}$$

$$= c_n,$$

puesto que $X_{n+2}^{(n+2)} = 0$ y $X_{n+1}^{(n+1)} = 0$.

(ii) Sea $(X_n^{(-i)})_n$ la sucesión determinada para cada $i \geqslant 1$ por:

$$\begin{cases} X_{n+2}^{(-i)} - 2X_{n+1}^{(-i)} + (1+\alpha)X_n^{(-i)} = 0 & \text{para } n \leqslant -i-1 \\ X_n^{(-i)} = 0 \quad \text{si } n \geqslant -i+1, & X_{-i}^{(-i)} = \dfrac{c_{-i}}{1+\alpha}, \end{cases} \tag{35}$$

entonces, por (28) se tiene que

$$X_n^{(-i)} = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} c_{-i} (\sqrt{1+\alpha})^{n+i-1} \operatorname{sen}(n+i-1)\theta \quad (n \leqslant -i+1),$$

así:

$$Y_n = X_n + \sum_{i=1}^{-n+1} X_n^{(-i)} \quad (\text{para } n = 1, 0, -1, -2, -3, \ldots).$$

Evidentemente tenemos: $Y_1 = X_1$, $Y_0 = X_0$. Además

$$Y_{n+2} - 2Y_{n+1} + (1+\alpha)Y_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{-n-1} \{ X_{n+2}^{(-i)} - 2X_{n+1}^{(-i)} + (1+\alpha)X_n^{(-i)} \} + (1+\alpha)X_n^{(n)}$$

$$= c_n \qquad (n = -1,-2,-3,\dots).$$

COROLARIO 1. *Sea* (X_n) *la sucesión dada por* (27). *Si la sucesión* (Y_n) *satisface la desigualdad:*

$$\begin{cases} Y_{n+2} - 2Y_{n+1} + (1+\alpha)Y_n \geqslant 0 \quad \textit{para } n = 0,1,2,\dots,k < \frac{\pi}{\theta} \\ Y_0 = X_0, \quad Y_1 = X_1 \end{cases} \tag{36}$$

entonces $Y_n \geqslant X_n$ *para* $n = 0,1,2,\dots,k,k+1,k+2$. (37)

<u>*Demostración*</u>. Sea $c_n = Y_{n+2} - 2Y_{n+1} + (1+\alpha)Y_n$ entonces $c_n \geqslant 0$ $(n = 0,1,2,\dots,k)$. Como $\operatorname{sen}(n-1)\theta \geqslant 0$ para $n \leqslant i + \frac{\pi}{\theta}$, por (32) se tiene la desigualdad (37). ■

COROLARIO 2. *Sea* (X_n) *la sucesión dada por* (27). *Si la sucesión* (Y_n) *satisface la desigualdad:*

$$\begin{cases} Y_{n+2} - 2Y_{n+1} + (1+\alpha)Y_n \leqslant 0 \quad (\text{para } n = -1,-2,-3,\dots,-m-2) \\ Y_1 = X_1, \quad Y_0 = X_0 \end{cases} \tag{38}$$

donde Y_{-m} *es el mínimo local de los valores de* Y_n (ver Fig. 5), *entonces*

$$Y_n \leqslant X_n \quad (\text{para } n = -1,-2,-3,\dots,-m,-m-1,-m-2) \tag{39}$$

Además, si X_{-m_0} *es el mínimo local de los valores de* X_n, *entonces*

$$m \geqslant m_0 - 1 \,. \tag{40}$$

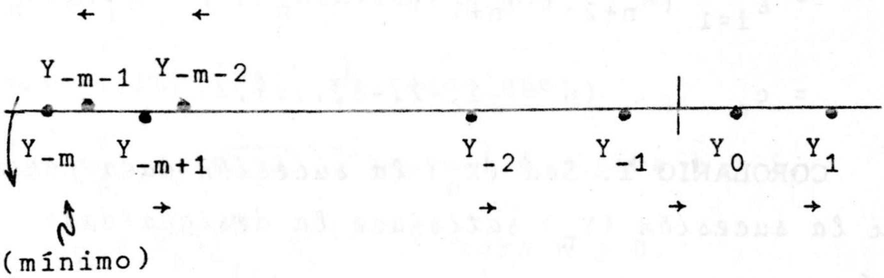

Figura 5

Demostración. De (33):

$$X_n - Y_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{i=1}^{-n+1} c_{-i} (\sqrt{1+\alpha})^{n+i-1} \operatorname{sen}(n+i-1)\theta, \tag{41}$$

por lo tanto se obtiene la desigualdad (39) en forma similar al caso del corolario 1. Por otra parte, si $N = \left[\frac{\pi}{2\theta}\right]$, la parte entera de $\frac{\pi}{2\theta}$, entonces se han observado las dos posibilidades: (i') $X_{-m_0} = X_{-N}$ ó (ii') $X_{-m_0} = X_{-N-i}$. Como $c_{-1}\sqrt{1+\alpha}^n \operatorname{sen} n\theta =$ $|c_{-1}|\sqrt{1+\alpha}^n|\operatorname{sen} n\theta|$ es creciente con respecto a n desde $n = -1$ hasta $n = -N$, entonces $(X_n - Y_n)$ aumenta cuando n recorre desde $n = -1$ hasta $n = -N$, esto implica $m \geqslant N$. Por lo tanto, se obtiene la desigualdad (40). ■

§6. Comportamiento cuantitativo de la sucesión (A_n).

Sea (A_n) la sucesión dada por

$$A_{n+2} - 2A_{n+1} + (1+\alpha_n)A_n = 0 \tag{42}$$

donde $0 < \alpha_n < 1$, (α_n) es decreciente y tiende a cero. Como hemos observado en el parágrafo 4, la sucesión (A_n) es *oscilante*, o sea que los valores de A_n

toman los mínimos y los máximos alternativamente; sean A_{m_1} el primer extremo (máximo o mínimo), A_{m_2} el segundo extremo, A_{m_k} el k-ésimo extremo, A_{m_u} el último extremo. Vamos a estudiar el movimiento de los términos de la sucesión (A_n) *en un período de oscilación*, digamos entre $A_{m_{k-1}}$, A_{m_k} y $A_{m_{k+1}}$. Para mayor sencillez supongamos que A_{m_k} es un mínimo (ver Fig.6).

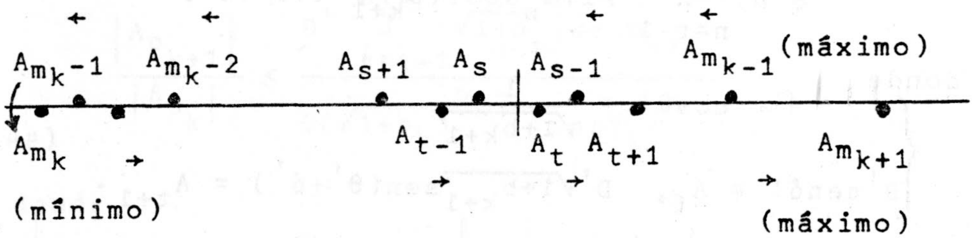

Figura 6.

En una cercanía de cada extremo A_{m_k} escogemos *adecuadamente* A_{p_k} (más precisamente, $p_k \geqslant m_k-2$) y calculamos una estimación de $|A_{p_k}|$ como sigue: Sea $b_k = \alpha_{m_k-2}$, consideremos las dos sucesiones (X_n) y (X'_n) dadas por:

$$\begin{cases} X'_{n+2} - 2X'_{n+1} + (1+b_{k+1})X'_n = 0 \quad (n = t, t+1, \dots, m_{k+1}-2) \\ X'_t = A_t, \quad X'_{t+1} = A_{t+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{n+2} - 2X_{n+1} + (1+b_k)X_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (n = t-1, t-2, \dots, m_k, m_k-1, m_k-2) \\ X_t = A_t, \quad X_{t+1} = A_{t+1}. \end{cases}$$

Para $n = t, t+1, \dots, m_{k+1}-2$ tenemos:

$$A_{n+2} - 2A_{n+1} + (1+b_{k+1})A_n = (b_{k+1} - \alpha_n)A_n \leqslant 0 ,$$

por el Corolario al Lema 2 tenemos $A_n \leqslant X'_n$ para $n = t, t+1, \dots, m_{k+1}$. Si $p_{k+1} = m_{k+1}$, $m_{k+1}-1$ ó $m_{k+1}-2$, tomando $n = p_{k+1}$ y utilizando (28) §5:

$$\begin{aligned} A_{p_{k+1}} &\leqslant D'(\sqrt{1+b_{k+1}})^{p_{k+1}-t} \operatorname{sen}\{(p_{k+1}-t)\theta' + \delta'\} \\ &\leqslant D' \prod_{n=t-1}^{p_{k+1}-2} \sqrt{1+\alpha_n} \operatorname{sen}\{(p_{k+1}-t)\theta' + \delta'\} \end{aligned} \tag{43}$$

donde

$$\begin{cases} \cos\theta' = \dfrac{1}{\sqrt{1+b_{k+1}}} \\ D'\operatorname{sen}\delta' = A_t, \quad D'\sqrt{1+b_{k+1}}\operatorname{sen}(\theta' + \delta') = A_{t+1} . \end{cases} \tag{44}$$

En caso de que $p_{k+1} > m_{k+1}$, entonces

$$\begin{aligned} A_{p_{k+1}} \leqslant A_{m_{k+1}} &= D'(\sqrt{1+b_{k+1}})^{m_{k+1}-t} \operatorname{sen}\{(m_{k+1}-t)\theta' + \delta'\} \\ &\leqslant D'\Big(\prod_{n=t-1}^{m_{k+1}-2} \sqrt{1+\alpha_n}\Big) \operatorname{sen}\{(m_{k+1}-t)\theta' + \delta'\} \\ &\leqslant D'\Big(\prod_{n=t-1}^{p_{k+1}-2} \sqrt{1+\alpha_n}\Big) \operatorname{sen}\{(m_{k+1}-t)\theta' + \delta'\} \end{aligned} \tag{43'}$$

De la misma manera, para $n = t-1, t-2, \dots, m_k, m_k-1, m_k-2$ tenemos:

$$A_{n+2} - 2A_{n+1} + (1+b_k)A_n = (b_k - \alpha_n)A_n \leqslant 0,$$

por el Corolario 2 al Lema 2 se tiene que $A_n \leqslant X_n$ ó $|A_n| \geqslant |X_n|$ para $n = t-1, t-2, \dots, m_k, m_k-1, m_k-2$.

Tomando $n = p_k$ y utilizando (28) §5:

$$|A_{p_k}| \geqslant D(\sqrt{1+b_k})^{p_k-t} |\text{sen}\{(p_k-t)\theta+\delta\}| \qquad (45)$$

donde

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+b_k}} \\ A_t = D\,\text{sen}\delta \ , \ A_{t+1} = D\sqrt{1+b_k}\,\text{sen}(\theta+\delta) \ . \end{cases} \qquad (46)$$

De (43) ó (43') y (45):

$$\frac{|A_{p_{k+1}}|}{|A_{p_k}|} \leqslant \frac{D' \prod_{n=t-1}^{p_{k+1}-2} \sqrt{1+\alpha_n}\, |\text{sen}\psi_{k+1}|}{D(\sqrt{1+b_k})^{p_k-t} |\text{sen}\varphi_k|} \qquad (47)$$

donde

$$\varphi_k = (p_k-t)\theta+\delta \ , \quad \psi_{k+1} = (p_{k+1}-t)\theta'+\delta' \ . \ \blacksquare$$

[I] <u>Una estimación de</u> D'/D. De (44) y (46):

$$D \text{ sen } \delta = D' \text{ sen } \delta'$$
$$D\sqrt{1+b_k}\,\text{sen}(\theta+\delta) = D'\sqrt{1+b_{k+1}}\,\text{sen}(\theta'+\delta') \ . \qquad (48)$$

Pero $D\sqrt{1+b_k}\,\text{sen}(\theta+\delta) = D\sqrt{1+b_k}\{\text{sen}\theta\cos\delta+\cos\theta\,\text{sen}\delta\} =$ $= D\{\sqrt{b_k}\cos\delta+\text{sen}\delta\}$, luego $D\{\sqrt{b_k}\cos\delta+\text{sen}\delta\} =$ $= D'\{\sqrt{b_{k+1}}\cos\delta'+\text{sen}\delta'\}$. Utilizando la primera igualdad de (48), obtenemos:

$$D\sqrt{b_k}\cos\delta = D'\sqrt{b_{k+1}}\cos\delta' \ . \qquad (49)$$

De (48) y (49):

$$\frac{\sqrt{b_k}}{\sqrt{b_{k+1}}} = \frac{D'}{D}\,\frac{\cos\delta'}{\cos\delta} = \frac{\tan\delta}{\tan\delta'} \ .$$

Como $b_{k+1} < b_k$ entonces tenemos que $\delta > \delta'$, luego $\cos\delta < \cos\delta'$. Por lo tanto, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{D'}{D} = \frac{\operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}\delta'} \leqslant \frac{\operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}\delta'}\,\frac{\cos\delta'}{\cos\delta} = \frac{\tan\delta}{\tan\delta'} = \frac{\sqrt{b_k}}{\sqrt{b_{k+1}}}. \blacksquare \qquad (50)$$

[II] $$\frac{1}{(\sqrt{1+b_k})^{p_k-t}} = (\sqrt{1+b_k})^{t-p_k}$$

$$= (\sqrt{1+b_{k+1}})^{t-p_k}\left\{\sqrt{\frac{1+b_k}{1+b_{k+1}}}\right\}^{t-p_k}. \qquad (51)$$

Pero:

$$\log\left\{\sqrt{\frac{1+b_k}{1+b_{k+1}}}\right\}^{t-p_k} = \frac{t-p_k}{2}\log\left\{1+\frac{b_k-b_{k+1}}{1+b_{k+1}}\right\}$$

$$\leqslant \frac{t-p_k}{2}\,\frac{b_k-b_{k+1}}{1+b_{k+1}} \leqslant a(\sqrt{b_k}-\sqrt{b_{k+1}}) \qquad (52)$$

donde a (>0) es una constante menor que 5. (véase Nota pág.107). De (51) y (52):

$$\frac{1}{(\sqrt{1+b_k})^{p_k-t}} \leqslant \prod_{n=p_k-1}^{t}\sqrt{1+\alpha_n}\exp\{a(\sqrt{b_k}-\sqrt{b_{k+1}})\},$$

De (47):

$$\frac{|A_{p_{k+1}}|}{|A_{p_k}|} \leqslant$$

$$\frac{D'}{D}\prod_{n=p_k-1}^{p_{k+1}-2}\sqrt{1+\alpha_n}\,\frac{|\operatorname{sen}\psi_{k+1}|}{|\operatorname{sen}\varphi_k|}\exp\{a(\sqrt{b_k}-\sqrt{b_{k+1}})\}. \qquad (53)$$

NOTA. Para probar (52) observe que $t-p_k \leqslant t-(m_k-2) \leqslant \frac{\pi}{2\theta} + 2$ (ver (59)), pero como

$$\theta \geqslant \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{b_k}}{\sqrt{1+b_k}} \geqslant \frac{\sqrt{b_k}}{\sqrt{2}}$$

se tiene que

$$t-p_k < \frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{b_k}} + 2 \leqslant \frac{5}{\sqrt{b_k}} ,$$

también:

$$\frac{b_k-b_{k+1}}{2} = \frac{(\sqrt{b_k}-\sqrt{b_{k+1}})(\sqrt{b_k}+\sqrt{b_{k+1}})}{2} \leqslant (\sqrt{b_k}-\sqrt{b_{k+1}})\sqrt{b_k} ,$$

por lo tanto se tiene la desigualdad (52).

[III] Como hemos observado en el parágrafo §4, Lema 1, la sucesión (A_n) es monótona a partir del último extremo A_{m_u}; para mayor sencillez supongamos que A_{m_u} es un mínimo y que (A_n) es creciente monótonamente a partir de $n = m_u$ (Fig. 7).

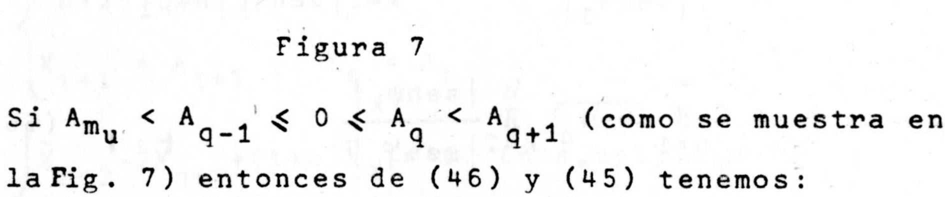

Figura 7

Si $A_{m_u} < A_{q-1} \leqslant 0 \leqslant A_q < A_{q+1}$ (como se muestra en la Fig. 7) entonces de (46) y (45) tenemos:

$$|A_{p_u}| \geqslant D(\sqrt{1+b_u})^{p_u-q} |\operatorname{sen}\varphi_u| ,$$

$$A_{q+1}-A_q = D\sqrt{1+b_u}\operatorname{sen}(\theta+\delta)-D\operatorname{sen}\delta$$

$$= D\sqrt{1+b_u}(\operatorname{sen}\theta\cos\delta+\cos\theta\operatorname{sen}\delta)-D\operatorname{sen}\delta$$

$$= D\sqrt{b_u}\cos\delta \leqslant D\sqrt{b_u}\ ,$$

por lo tanto tenemos:

$$|A_{q+1}-A_q| \leqslant \frac{\sqrt{b_u}(\sqrt{1+b_u})^{q-p_u}}{|\operatorname{sen}\varphi_u|}|A_{p_u}|$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{b_u}}{|\operatorname{sen}\varphi_u|}\ |A_{p_u}|(\prod_{n=p_u-1}^{q-2}\sqrt{1+\alpha_n})\exp\{a\sqrt{b_u}\}, \qquad (54)$$

puesto que, por [II]:

$$(\sqrt{1+b_u})^{q-p_u} \leqslant (\prod_{n=p_u-1}^{q-2}\sqrt{1+\alpha_n})\exp\{a\sqrt{b_u}\}.$$

Pero como:

$$|A_{p_u}| = |A_{p_1}|\frac{|A_{p_2}|}{|A_{p_1}|}\frac{|A_{p_3}|}{|A_{p_1}|}\cdots\frac{|A_{p_u}|}{|A_{p_{u-1}}|}\ , \qquad (55)$$

multiplicando miembro a miembro la desigualdad (47) con respecto a k, desde k = 1 hasta k = u-1, y utilizando (50), (53) y (54) obtenemos:

$$|A_{q+1}-A_q| \leqslant \frac{\sqrt{b_1}\exp\{a\sqrt{b_1}\}}{|\operatorname{sen}\varphi_1|}|A_{p_1}|\prod_{k=2}^{u}\frac{|\operatorname{sen}\psi_k|}{|\operatorname{sen}\varphi_k|}\prod_{n=p_1-1}^{q-2}\sqrt{1+\alpha_n}$$

$$\leqslant C\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+\alpha_n}\ \prod_{k=2}^{u}\frac{|\operatorname{sen}\psi_k|}{|\operatorname{sen}\varphi_k|} \qquad (56)$$

donde $C > 0$ es una constante, $C \sim |A_{p_1}|e^a \sim |A_{p_1}|e^5$.

[IV] Vamos a demostrar que podemos escoger "adecuadamente" A_{p_k} en una cercanía de cada extremo A_{m_k}

con el fin de obtener la desigualdad:

$$\frac{|\operatorname{sen}\psi_k|}{|\operatorname{sen}\varphi_k|} \leqslant 1 \quad \text{para todo } k\,. \tag{57}$$

En tal caso, como $|A_{q+1}-A_q|$ es el máximo de $|A_{n+1}-A_n|$ para $n > m_u$, entonces de (56) y (57) se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\lim_{n\to\infty}|A_{n+1}-A_n| \leqslant C\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+\alpha_n}\,. \blacksquare \tag{58}$$

<u>*Escogencia de*</u> A_{p_k}. Sea A_m un extremo, para mayor sencillez supongamos que A_m es un mínimo como se muestra en la figura 8.

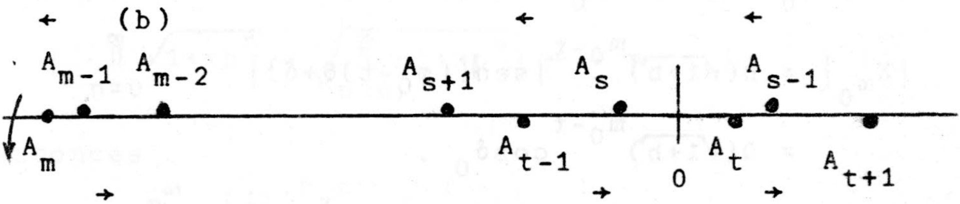

Figura 8

Sean $b = \alpha_{m-2}$, (X_n) y $(\tilde{X}_n)$ sucesiones determinadas por:

$$\begin{cases} X_{n+2}-2X_{n+1}+(1+b)X_n = 0 & (n=t-1,t-2,\dots,m,m-1,m-2) \\ X_{t+1} = A_{t+1}\,, \quad X_t = A_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{X}_{n+2}-2\tilde{X}_{n+1}+(1+b)\tilde{X}_n = 0 & (n=s,s+1,\dots,m-2) \\ \tilde{X}_s = A_s, \quad \tilde{X}_{s+1} = A_{s+1}\,. \end{cases}$$

Si X_{m_0} es el mínimo de los valores de X_n (para n =

$t-1, t-2, \ldots, m-2)$, por el Corolario 2 al Lema 2 se tiene que $m_0 > m$, $m_0 = m$, ó $m_0 = m-1$. Sea $(m_0-t)\theta+\delta = -\frac{\pi}{2} + \delta_0$ entonces $0 \leq \delta_0 < \theta$, donde $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+b}}$, puesto que X_{m_0} es un mínimo local. Consideramos los diferentes casos.

(i) $m_0 > m$. Tomemos $p = m_0-1 \geq m$. Entonces

$$|A_p| \geq |A_{m_0}| \geq |X_{m_0}| = D(\sqrt{1+b})^{m_0-t}|\operatorname{sen}(-\tfrac{\pi}{2}+\delta_0)|$$

$$\geq D(\sqrt{1+b})^{m_0-t}\cos\theta$$

$$= D(\sqrt{1+b})^{m_0-1-t} \geq D(\sqrt{1+b})^{p-t}.$$

Así, se puede *considerar* que $\operatorname{sen}\varphi = 1$.

(ii) $m_0 = m$ ó $m_0 = m-1$. Entonces

$$|X_{m_0}| = D(\sqrt{1+b})^{m_0-t}|\operatorname{sen}\{(m_0-t)\theta+\delta\}|$$

$$= D(\sqrt{1+b})^{m_0-t}\cos\delta_0 .$$

Sea $\psi = \frac{\pi}{2} - \psi_0$. Si $|\operatorname{sen}\psi| = \cos\psi_0 \leq \cos\delta_0$ entonces escogemos $p = m_0$. Si $|\operatorname{sen}\psi| = \cos\psi_0 > \cos\delta_0$, entonces $-\delta_0 < \psi_0 < \delta_0$. Como $0 \leq \delta_0 < \theta$ entonces tenemos $\cos(\delta_0-\theta) > \cos(\psi_0-\theta)$. Así,

$$|\operatorname{sen}\{(m_0-1-t)\theta+\delta\}| = \cos(\theta-\delta_0)$$

$$> \cos(\theta+\psi_0) = |\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}-\theta-\psi_0)| = |\operatorname{sen}(\psi-\theta)|.$$

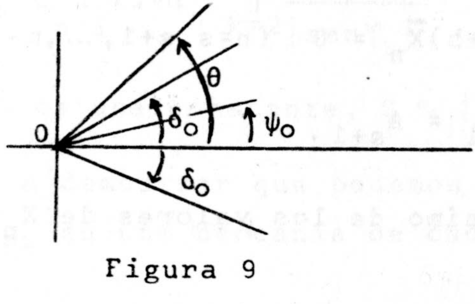

Figura 9

Escogemos entonces $p = m_0 - 1$.

De esta manera, para cualquier caso tenemos que $p \geqslant m-2$ y $|\operatorname{sen}(p-t)\theta+\delta| \geqslant |\operatorname{sen}\psi|$. Además: $p = m_0$ ó $p = m_0 - 1$, esto garantiza la desigualdad:

$$t-p \leqslant \frac{\pi}{2\theta}+2. \blacksquare \tag{59}$$

[V] De (19) del parágrafo 3 y (58):

$$|f_p(x)| \leqslant \frac{C\prod_{n=0}^{\infty}\sqrt{1+xp^n}}{\prod_{n=0}^{\infty}(1+xp^n)} = \frac{C}{\prod_{n=0}^{\infty}\sqrt{1+xp^n}}. \tag{60}$$

Pero como

$$\prod_{n=0}^{\infty}\sqrt{1+xp^n} = \sqrt{\prod_{n=0}^{\infty}(1+xp^n)} \to +\infty \qquad (p \to 1^-)$$

entonces

$$\lim_{p\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(p:p)_n^2} = \lim_{p\to 1^-} f_p(x) = 0. \tag{61}$$

para cualquier x, $0 < x < 1$.

Si tomamos $x = p^k$ en la desigualdad (60), se obtiene también:

$$\lim_{p\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n p^{kn}}{(p:p)_n^2} = 0 \qquad (k = 1,2,3,\ldots). \blacksquare \tag{62}$$

* *

BIBLIOGRAFIA

[1] George E. Andrews: *An Introduction to Ramanu-*

jan's "Lost Note Book", Amer. Math. Monthly, 86, N°2 (1979) 89-107.

[2] Richard Askey: *Ramanujan's Extensions of the Gamma and Beta Functions*, Amer.Math. Monthly, 87, N°5, (1980) 346-359.

[3] George Polya: *Problems and Theorems in Analysis*, Tomo I,

[4] Konrad Knopp: *Theory and Application of infinite series*, Blackie & Son, London and Glasgow, re-edición 1946.

[5] T.J.Bromwichi: *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, 2a. edición, Mac-Millan, London, 1955.

[6] Yu Takeuchi: *Sucesiones y Series*, Tomos I y II, Limusa, Mexico, 1976.

[7] Yu Takeuchi: "Estudios Sistemáticos de algunas sucesiones", Mat.Enseñanza Universitaria, Próximo a aparecer.

***

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E. COLOMBIA

(Recibido en abril de 1981)