Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XV (1981) págs. 157 - 165

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE BANACH-STEINHAUS

par

Khalifa EL-HALLABIA

RESUMEN. El autor demuestra un teorema sobre polinomios en espacios vectoriales topológicos que generaliza el Teorema clásico de Banach-Steinhaus para operadores lineales acotados (polinomios de grado 1). La demostración utiliza el Teorema de Baire conjuntamente con un resultado clásico de Mozar-Orlicz.

RÉSUMÉ. Nous généralisons dans cet article le théorème de Banach-Steinhaus [4].

Soient E et F des espaces vectoriels définis, dans toute la suite, sur le même corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Nous disons qu'une application $\varphi:E \to F$ est un *opérateur polynomial homogène de degré* k (on note d^o k), k = 1,2,..., si et seulement si, il existe une application k-linéaire symétrique $\tilde{\varphi}:E^k \to F$ telle que $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x,\ldots,x)$ pour tout $x \in E$. Nous appelons $\tilde{\varphi}$ *la polaire* de φ. Pour $k = 0$, φ sera une fonction constante.

REMARQUE 1. Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $\varphi : E \to F$ un opérateur polynomial homogène de $d^o\ k$, alors sa polaire $\tilde{\varphi} : E^k \to F$ est unique. (cf. [3], proposition (iii), p. 281)

LEMME*. *Soient* E, F *des espaces vectoriels topologiques sur* $\mathbb{K}$, $\varphi : E \to F$ *un operateur polynomial homogène de* $d^o\ k$, W *et* W_{2^k} *des voisinages équilibrés de* $0 \in F$ *tels que* $W_{2^k} + \dots + W_{2^k}$ (2^k *fois*) $\subset W$. *Si* V *est un voisinage équilibré de* $0 \in E$ *vérifiant* $\varphi(a+V) \subset W_{2^k}$, $a \in E$ *fixé arbitrairement, alors* $\varphi(\frac{V}{e}) \subset W$ (e *étant la base des logarithmes népériens*).

<u>*Preuve.*</u> Le lemme étant évident dans le cas $k = 0$, on suppose $k \geqslant 1$. Le théorème de Mazur-Orlicz [2] nous donne alors.

$$(*) \qquad \tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k = 0}^{1} (-1)^{k-(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)} \varphi(a + \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_k x_k),$$

pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, où $\tilde{\varphi}$ est la polaire de φ et a un point arbitraire fixé dans E. En faisant $x_1 = \dots = x_k = x$ dans (*), alors $a + (\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i) x \in a + V$ pour tout $x \in \frac{V}{k}$. D'autre part, le second membre de (*)

---

* L'arbitre a fait observer que ce lemme a déjà eté démontré; voir Backnak J. et J. Siciak: *Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces*, Studia Math. 39 (1971) 59-76.

comporte 2^k termes. Comme par hypothèse $\varphi(a+V) \subset W_{2^k}$, alors (*) donne $\varphi(x) \in \frac{1}{k!}W$ pour $x \in \frac{V}{k}$.
Par conséquent

$$\varphi(\tfrac{V}{k}) \subset \tfrac{1}{k!}W$$

où

$$\varphi(V) \subset \frac{k^k}{k!}W \subset e^k W$$

ce qui donne $\varphi(\frac{V}{e}) \subset W$. ■

THEOREME 1. *Soient* E, F *des espaces vectoriels topologiques sur* $\mathbb{K}$, $(\varphi_i)_{i\in I}$ *une famille d'opérateurs polynomiaux homogènes de* d° k, $k \in \{1,2,\ldots\}$, *de* E *dans* F, *et* $\tilde{\varphi}_i$ *la polaire de* φ_i *pour tout* $i \in I$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $(\varphi_i)_{i\in I}$ *est équicontinue dans* E.

(ii) $(\varphi_i)_{i\in I}$ *est équicontinue en* $0 \in E$.

(iii) $(\tilde{\varphi}_i)_{i\in I}$ *est équicontinue en* $(0,\ldots,0) \in E^k$.

Preuve.

(i) ⇒ (ii). Trivial.

(ii) ⇒ (iii). En effet, V étant un voisinage de $0 \in F$, il existe un voisinage équilibré V_{2^k} de $0 \in F$ tel que $V_{2^k}+\ldots+V_{2^k}$ (2^k fois) $\subset V$. De même, il existe un voisinage équilibré U_{2^k} de $0 \in E$ tel que $\varphi_i(U_{2^k}) \subset V_{2^k}$ pour tout $i \in I$. D'autre part, soit Ω_k un voisinage de $0 \in E$ tel que $\Omega_k+\ldots+\Omega_k$ (k fois) $\subset U_{2^k}$. Par ailleurs, le théorème de Mazur-Orlicz [2] donne

(*) $\tilde{\varphi}_i(x_1,\ldots,x_k) =$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k=0}^{1} (-1)^{k-(\varepsilon_1+..+\varepsilon_k)} \varphi_i(\varepsilon_1 x_1+..+\varepsilon_k x_k)$$

pour tout $i \in I$ et tout $(x_1,\ldots,x_k) \in E^k$.

Comme $\varphi_i(\varepsilon_1\Omega_k+\ldots+\varepsilon_k\Omega_k) \subset \varphi_i(\Omega_k+\ldots+\Omega_k) \subset \varphi_i(U_2k) \subset V_2k$, pour tout $i \in I$, $\varepsilon_p = 0$ où 1, $1 \leq p \leq k$, alors (*) implique $\tilde{\varphi}_i(\Omega_k\times\ldots\times\Omega_k) \subset$

$\frac{1}{k!}\{\varphi_i(\Omega_k+\ldots+\Omega_k)+\ldots+\varphi_i(\Omega_k+\ldots+\Omega_k)$ (2^k fois)$\} \subset$

$V_2k+\ldots+V_2k$ (2^k fois) $\subset V$, pour tout $i \in I$. D'ou l'équicontinuité de $(\tilde{\varphi}_i)_{i\in I}$ en $(0,\ldots,0) \in E^k$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). En effet, soit $a \in E$ fixé arbitrairement. Alors, pour tout $h \in E$, et tout $i \in I$, on a

$$(1) \qquad \varphi_i(a+h) = \tilde{\varphi}_i(a+h,\ldots,a+h)$$

$$= \tilde{\varphi}_i(a,\ldots,a) + \sum_{s=1}^{k} \binom{k}{s} \tilde{\varphi}_i(\underbrace{a,\ldots,a}_{(k-s)\text{fois}},\underbrace{h,\ldots,h}_{s \text{ fois}}).$$

D'autre part, l'équicontinuité de $(\tilde{\varphi}_i)_{i\in I}$ en $(0,\ldots,0) \in E^k$ implique celle de la famille $\{h \mapsto \tilde{\varphi}_i(a,\ldots,a,\underbrace{h,\ldots,h}_{s \text{ fois}})\}_{i\in I}$ en $0 \in E$, $1 \leq s \leq k-1$.

En effet, pour tout voisinage équilibré V de $0 \in F$, il existe un voisinage équilibré W de $0 \in E$ tel que $\tilde{\varphi}_i(W\times\ldots\times W) \subset V$, pour tout $i \in I$. D'autre part, d'après la propriété d'absorption d'un voisinage de 0 dans un espace vectoriel topologique, il existe $0 \leq \delta \leq 1$ tel que $\delta a \in W$, qui implique $\tilde{\varphi}_i(\delta a,\ldots,\delta a,\underbrace{h,\ldots,h}_{s \text{ fois}}) \in V$, pour tour $h \in W$ et tout

$i\in I$, $1\leq s\leq k-1$. Ainsi $\delta^{k-s}\tilde{\varphi}_i(a,\ldots,a,\underbrace{h,\ldots,h}_{s\text{ fois}})$ $\in V$, pout tout $i\in I$. Et, pour $h\in W_s = \delta^{k-s}W\subset W$, $1\leq s\leq k-1$, on aura $\tilde{\varphi}_i(a,\ldots,a,\underbrace{h,\ldots,h}_{s\text{ fois}})\in V$, pour tout $i\in I$, $1\leq s\leq k-1$. D'òu l'équicontinuité de $\{h\mapsto \tilde{\varphi}_i(a,\ldots,a,\underbrace{h,\ldots h}_{s\text{ fois}})\}_{i\in I}$ en $0\in E$, $1\leq s\leq k-1$.

Par suite, si V et V_k sont des voisinages équilibrés de $0\in F$ tels que $V_k+\ldots+V_k$ (k fois) $\subset V$. Alors, pour $1\leq s\leq k$, il existe un voisinage W_s de $0\in E$ tel que $\binom{k}{s}\tilde{\varphi}_i(a,\ldots,a,\underbrace{h,\ldots,h}_{s\text{ fois}})\in V_k$, pour tout $i\in I$ et tout $h\in W_s$. Soit $\Omega = \bigcap_{s=1}^{k} W_s$, alors $h\in\Omega$ implique

$$\sum_{s=1}^{k}\binom{k}{s}\tilde{\varphi}_i(a,\ldots,a,\underbrace{h,\ldots,h}_{s\text{ fois}})\in V_k+\ldots+V_k\ (k\text{ fois})\subset V\ ,$$

pour tout $i\in I$.

Et (1) donne $\varphi_i(a+h)\in\varphi_i(a)+V$, pour tout $i\in I$, $h\in\Omega$. Ainsi $\varphi_i(a+\Omega)\subset\varphi_i(a)+V$, pour tout $i\in I$. Ceci achève la preuve du théorème. ∎

Voici, maintenant, le résultat principal de cet article, qui est la généralisation suivante du théorème de Banach-Steinhaus:

THEOREME 2. *Soient* E, F *des espaces vectoriels topologiques sur* $\mathbb{K}$, E *de Baire. Soit* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *une famille d'opérateurs polynomiaus homogènes tels que* $d^{\circ}\varphi_i = k_i$, $0\leq k_i\leq k_0$, *où* $k_0\in\mathbb{N}$ *est fixé. Si* $\{\varphi_i(x)\}_{i\in I}$ *est borné dans* F, *pour tout* $x\in\Omega$, *où* Ω *est un ouvert non vide dans* E, *alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) φ_i *est continu en* $0\in E$, *pour tout* $i\in I$.

(ii) φ_i *est continu dans* E, *pour tout* $i\in I$.

(iii) $(\varphi_i)_{i\in I}$ *est équicontinue en* $0\in E$.

)iv) $(\varphi_i)_{i\in I}$ *est équicontinue dans* E.

<u>*Preuve*</u>.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Triviale.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). En effet, pour tout p tel que $0 \leqslant p \leqslant k_o$, soit $F_p = \{\varphi\in(\varphi_i)_{i\in I} : d^o\varphi = p\}$.

D'après le théorème 1, la famille F_p est équicontinue dans E. D'autre part, $(\varphi_i)_{i\in I} = \bigcup_{p=0}^{k_o} F_p$. Et, ceci implique que la famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ est équicontinue dans E. Car, a étant arbitrairement fixé dans E, et pour tout voisinage W de $0\in F$, il existe un voisinage V_p de $0\in E$ tel que

$$\varphi(a+V_p)\subset\varphi(a)+W, \text{ pour tout } \varphi\in F_p.$$

Soit $V = \bigcap_{p=0}^{ko} V_p$, alors on a $\varphi(a+V)\subset\varphi(a)+W$, pour tout $\varphi\in\bigcup_{p=0}^{k_o}F_p = (\varphi_i)_{i\in I}$. D'où l'équicontinuité de $(\varphi_i)_{i\in I}$ dans E, et (iii) $\Rightarrow$ (iv). Par conséquent, on a (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i). Montrons alors que (i) $\Rightarrow$ (iii). Soit V un voisinage de $0\in F$, et $V_{2^{k_o}}$ un voisinage équilibré fermé de $0\in F$ tel que $V_{2^{k_o}}+\dots+V_{2^{k_o}}$ (2^{k_o} fois) $\subset V$. Par hypothèse, $\{\varphi_i(x)\}_{i\in I}$ est borné pour tour $x\in\Omega$, alors il existe δ, $0<\delta<1$, tel que $\delta\varphi_i(x)\in V_{2^{k_o}}$, pour tout $i\in I$. Pour $2\leqslant k\leqslant k_o$, on a $\delta^k\varphi_i(x)\in V_{2^{k_o}}$. D'où $\varphi_i(\delta x)\in V_{2^{k_o}}$, $\varphi_i\in\bigcup_{p=1}^{k_o}F_p$. Par conséquent

$$\delta x \in V_\varphi, \text{ où } V_\varphi = \bigcap \varphi_i^{-1}(V_{2^{k_o}}), \ \varphi_i \in \bigcup_{p=1}^{k_o} F_p.$$

Donc V_φ est fermé équilibré et absorbe tout $x \in \Omega$. Par suite $\Omega \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} nV_\varphi$. Ω étant ouvert non vide dans E de Baire, ceci implique l'existence de $n_o \in \mathbb{N}$ tel que $\Omega \subset n_o V$ et par conséquent V_φ ait un point intérieur. D'où l'existence d'un point $a \in E$ et d'un voisinage équilibré W de $0 \in E$ tels que $\varphi_i(a+W)$ $V_{2^{k_o}}$, pour tout $\varphi_i \in \bigcup_{p=1}^{k_o} F_p$. Et, le lemme précédent nous donne

$$\varphi_i(\frac{W}{e}) \subset V, \text{ por tout } \varphi_i \in \bigcup_{p=1}^{k_o} F_p.$$

Enfin, on a

$$\varphi_i(\frac{W}{e}) \subset \varphi_i(0)+V, \text{ pour tout } i \in I.$$

Ainsi (i) $\Rightarrow$ (iii). D'où le théorème. ■

REMARQUE 2. Soient E, F des espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{K}$, $(\varphi_i)_{i \in I}$ une famille d'opérateurs polynomiaux continus en $0 \in E$, et $d^o\varphi_i = k_i$, avec $0 \leqslant k_i \leqslant k_0$, k_0 fixé arbitrairement dans $\mathbb{N}$. Si E est de Baire et Ω un ouvert non vide dans E tel que $\{\varphi_i(x)\}_{i \in I}$ soit borné dans F, pour tout $x \in \Omega$, alors $\{\varphi_i(x)\}_{i \in I}$ est borné dans F, pour tout $x \in E$.

Preuve. En effet, pour $1 \leqslant k_i \leqslant k_0$, le théorème 2 implique que $(\varphi_i)_{i \in I}$ est équicontinue en $0 \in E$. Par suite, pour tout voisinage équilibré V de $0 \in E$ tel que $\varphi_i(V) \subset W$, $1 \leqslant k_i \leqslant k_0$. Ainsi, pour tout $x \in E$ il existe δ, $0 < \delta < 1$, tel que $\delta x \in V$. Ceci donne $\varphi_i(\delta x) \subset W$, $1 \leqslant k_i \leqslant k_0$. Comme $\delta^{k_0} \leqslant \delta^{k_i}$, pour $1 \leqslant k_i \leqslant k_0$, alors $\delta^{k_0}\varphi_i(x) \in W$. Ceci implique que $F_{(1,k_0)}(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in (\varphi_i)_{i \in I},\ 1 \leqslant d^0\varphi \leqslant k_0\}$ est borné pour tout $x \in E$. Soit $F_0(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in (\varphi_i)_{i \in I}, d^0\varphi = 0\}$ Alors $F_0(x)$ est borné, pour tout $x \in E$. Par suite

$$\{\varphi_i(x)\}_{i \in I} = F_{(1,k_0)}(x) \cup F_0(x)$$

est borné, puisque toute réunion finie d'ensembles bornés est borné dans un espace vectoriel topologique.

REMARQUE 3. Si dans le théorème 2 on suppose les φ_i linéaires ($d^0\varphi_i = 1$), on obtient le théorème de Banach-Steinhaus classique [4]. Et, en supposant E de Banach, F normé, le théorème 2 (iii), donne le principe de la borniture uniforme.

* *

RÉFÉRENCES

[1] El-Hallabia, K., Thèse Ph.D., *Continuité des opérateurs polynomiaux dans les espaces vectoriels topologiques*, Université de Montréal, 1981.

[2] Mazur, S. et Orlicz, W., *Grundlengende Eingenschaften der polynomischen Operationen*, Studia Math. 5 (1935) 50-68, 170-189.

[3] Restrepo,G., *Continuidad de polinomios en espacios vectoriales topológicos*, Revista Colombiana de Matemática, Vol. XIII (1979) 271-310.

[4] Kelley,J.L. et Namioka, I., *Linear Topological Spaces*, Springer-Verlag, 1963.

***

a/s J.I. Nieto

Département de Mathématiques et de Statitique

Université de Montréal

Montréal, Québec H3C 3J7

CANADA.

(Recibido en abril de 1981).