Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XVI (1982) págs. 81 - 94

CRITERIOS DE CONVERGENCIA SECUENCIAL

por

Manuel SUAREZ M.

ABSTRACT. A funcion on a set X which assigns to each point x of X a collection C(x) of countable sequences is called a *convergence criterion*. Necessary and sufficient conditions are given for C to be generated by a topology, that is, for each C(x) to consists exactly of those sequences converging to x in a given topology. This is obtained by adding to three necessary conditions of Fréchet and Urysohn the following fourth condition: the sequence $(x_n : n \in \mathbb{N})$ is in C(x) whenever for each n the constant sequence with constant term x_n is in C(x). Also, special representations are given of these criteria and conversely for topologies generated by criteria.

RESUMEN. Se llama *criterio de convergencia* a una función C que a cada punto x de un conjunto X le asigna una colección C(x) de sucesiones contables. Se presentan condiciones necesarias y suficientes para que un criterio de convergencia C sea generado por una topología, ésto es, condiciones para que cada conjunto C(x) consista precisamente de aquellas sucesiones que convergen a x según alguna topología. Esto se logra adicionando a las tres condiciones de convergencia secuencial de M. Fréchet y P. Urysohn la siguiente cuarta condición: *La sucesión* $(x_n : n \in \mathbb{N})$ *es del conjunto* $C(x)$, *si para cada* n *la correspondiente sucesión constante de valor* x_n *es de* $C(x)$. También, los criterios de convergencia generados por topologías son representados como extremos inferiores de criterios especiales, y las topologías generadas por criterios se representan como extremos superiores.

§1. Introducción. Los criterios de convergencia secuencial generados por topologías y las topologías generadas por criterios han sido estudiados, entre otros, por R.M. Dudley [7], S.P. Franklin [8] y J. Kisyński [9]. Este artículo se basa en los trabajos realizados por Carlos Ruíz S. en [1] y [2]. En él se presentan dos caracterizaciones de las topologías asociadas a una noción de convergencia de sucesiones y dos caracterizaciones de los criterios de convergencia secuencial generados por una topología; una de éstas se logra adicionando a las condiciones Cv1, Cv2, Cv3 de M. Fréchet y P. Urysohn una nueva propiedad que se denota Cv4. Esta es: la sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$ C-converge a x, si para cada n la sucesión constante de término x_n C-converge a x, donde C es un criterio de convergencia secuencial. También se demuestra que estas cuatro condiciones, junto con una propiedad de "diagonalización" Cv5 (utilizada por C. Ruíz S. en [1]) caracterizan los criterios de convergencia secuencial que son generados por *espacios de Fréchet*, ésto es, por espacios topológicos en donde coinciden las nociones de adherencia y adherencia secuencial.

Agradezco al doctor Carlos Ruíz S. las indicaciones que me proporcionó para la elaboración de este trabajo y al doctor X. Caicedo por las correcciones que me sugirió al revisar el manuscrito.

§2. Definiciones y propiedades básicas. A continuación se presentan las definiciones, notaciones y propiedades básicas de la convergencia secuencial que se utilizan en las secciones siguientes. Mientras no se indique lo contrario, éstas se transcriben de C. Ruíz S., [1].

Un *criterio* C *de convergencia de sucesiones* sobre un conjunto X es una función que a cada punto x le hace corresponder una colección C(x) de sucesiones de puntos de X. De estas sucesiones se dice que C-*convergen* a x.

Una función $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se llama *propia* si el conjunto de las pre-imágenes de cada número natural es finito.

Una sucesión S' se llama una *subsucesión* de una sucesión S de puntos de X, $S:\mathbb{N} \to X$, si existe una función propia $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $S' = S \circ f$.

Para un criterio secuencial C, se enuncian a continuación las condiciones Cv1, Cv2 de M. Fréchet y la Cv3 de Uryshon.(*)

Cv1. Toda sucesión casi-constante de valor x, es C-convergente al punto x.

Cv2. Cualquier subsucesión de una sucesión C-convergente a x es C-convergente a x.

Cv3. Toda sucesión que no C-converja a un punto x tiene una sucesión, ninguna de cuyas subsucesiones C-converge al punto x.

(*) Las condiciones Cv1, Cv2 fueron presentadas por M. Fréchet en su artículo "*Sur quelques points du calcul fonctionnel*" (Rediconti del Circolo Matemático di Palermo, 22, 1906). La condición Cv3 aparece en el artículo "*Sur les classes* (α) *de M. Fréchet*" (L'enseignement Mathematique 25, 1926, 77-83), que es una nota póstuma de P. Uryshon redactada por P. Alexandroff. La versión de Cv3 que aquí se presenta es la dada por K. Kuratowski en su libro "Topologie" de 1958.

Se denota Crit(X) al conjunto de criterios secuenciales sobre X que cumplen las condiciones Cv1, Cv2.

Una sucesión S está *casi-toda contenida* en un conjunto A cuando el conjunto de índices n tales que S(n) no está en A es finito.

Se define la función $\tilde{T}$:Crit(X) $\to$ Top(X) estableciendo que un conjunto A pertenece a $\tilde{T}$(C), cuando toda sucesión que C-converja a un punto de A está casi-toda contenida en A. De A se dice que es un conjunto C-*abierto*.

Se dice que el criterio C' *domina* al criterio C (y se denota, C $\leqslant$ C') si para cada punto x, toda sucesión que C'-converge a x también C-converge a x. Se observa que esta relación es un orden en el conjunto Crit(X).

2.1 PROPOSICION. ([1]). *Sea E una colección no vacía de criterios sobre* X. *Se cumple que:*

(i) $\tilde{T}$ *es un morfismo de conjuntos ordenados.*

(ii) Sup($\tilde{T}$(E)) $\leqslant$ $\tilde{T}$(Sup(E)).

(iii) Inf($\tilde{T}$(E)) = $\tilde{T}$(Inf(E)).

(iv) *Si una topología es generada (mediante* $\tilde{T}$*) por un criterio, existe el mínimo criterio que la genera.*

Se define la función $\tilde{C}$:Top(X) $\to$ Crit(X) estableciendo que una sucesión S converge a x, según $\tilde{C}$(t), si todo abierto en t, que contenga a x, contiene a casi-toda S. De la sucesión S se dice t-*converge* al punto x.

2.2 PROPOSICION. ([1]). *Sea* $\mathcal{H}$ *una colección no vacía de topologías sobre* X. *Se cumple que:*

(i) $\tilde{C}$ *es un morfismo de conjuntos ordenados.*

(ii) $\tilde{C}$(Inf($\mathcal{H}$)) $\leqslant$ Inf($\tilde{C}$($\mathcal{H}$)).

(iii) $\tilde{C}$(Sup($\mathcal{H}$)) = Sup($\tilde{C}$($\mathcal{H}$)).

(iv) *Si un criterio es generado (mediante* $\tilde{C}$) *por una topología, existe la máxima topología que lo genera.*

Se define el operador J como el compuesto del mecanismo $\tilde{C}$ con el mecanismo $\tilde{T}$, ésto es, $J = \tilde{T}\tilde{C}$.

2.3 PROPOSICION. ([1]). *Para un conjunto* X, *el correspondiente operador* J *cumple las siguientes propiedades:*

(i) *Para cada topología* t, $t \leqslant J(t)$.

(ii) *El operador* J *es monótono.*

(iii) *Para cada topología* t, $J(J(t)) = J(t)$. *Esto es,* $JJ = J$.

(iv) *Las cuatro condiciones siguientes son equivalentes para cualquier topología* t:

- t *es un punto fijo del operador* J.
- t *es del recorrido del operador* J.
- *Algún criterio genera, mediante* $\tilde{T}$, *a la topología* t.
- t *es el extremo inferior de una colección no-vacía de puntos fijos del operador* J.

(v) *Que un subconjunto* A *de* X *sea abierto en* J(t), *significa que cada vez que una sucesión* t-*converge a un punto de* A, *necesariamente está casi-toda contenida en* A.

Los puntos fijos del operador J se llaman topologías 0-*contables.*

Se define el operador K como el compuesto del mecanismo $\tilde{T}$ con el mecanismo $\tilde{C}$, ésto es, $K = \tilde{C}\tilde{T}$.

2.4 PROPOSICION. ([1] y [3]). *Para un conjunto* X, *el correspondiente operador* K *cumple las siguientes propiedades:*

(i) *Para cada criterio* C, $K(C) \leqslant C$.

(ii) *El operador* K *es monótono.*

(iii) *Para cada criterio* C, K(K(C)) = K(C). *Esto es,* KK = K.

(iv) *Las cuatro condiciones siguientes son equivalentes para cualquier cirterio* C:

-C *es un punto fijo del operador* K.

-C *es del recorrido del operador* K.

-*Alguna topología genera, mediante* $\tilde{C}$, *al criterio* C.

-C *es el extremo superior de una colección no-vacía de puntos fijos del operador* K.

(v) *Que una sucesión* S *de puntos de* X *sea* K(C)*-convergente a un punto, significa que cada vez que un conjunto* C*-abierto contenga al punto, necesariamente contiene a casi-toda* S.

§3. <u>Topologías 0-contables.</u> En esta sección se presentan dos caracterizaciones de las topologías 0-contables. Estas se logran expresando las topologías J(t) como el extremo superior de colecciones especiales de topologías 0-contables.

3.1 PROPOSICION. *Para cada topología* t *sobre un conjunto* X *se cumple que* $J(t) = \mathrm{Sup}\,\{J(t_x) | x \in X\}$ *donde* $t_x = \{A \in t | x \in A\} \cup \{\phi\}$.

<u>*Demostración.*</u> Puesto que $t = \mathrm{Sup}\{t_x | x \in X\}$ y el mecanismo $\tilde{C}$ conmuta con extremos superiores (Proposición 2.2, (iii)) se tiene que

$$\tilde{C}(t) = \mathrm{Sup}\{\tilde{C}(t_x) | x \in X\} .$$

Y de la Proposición 2.1, (ii), $\mathrm{Sup}\{J(t_x) | x \in X\} \subseteq J(t)$. No es difícil demostrar que una sucesión S es $\tilde{C}(t_x)$-convergente a un punto u, únicamente si cada subsucesión de S admite una sucesión

$\tilde{C}(t)$-convergente a alguno de los puntos x,u. Sea A un conjunto abierto en J(t) que contiene a x. Si A no es abierto en $J(t_x)$, existe una sucesión S y existe un punto u de A tales que S es $\tilde{C}(t_x)$-convergente al punto u y S no está casi-toda contenida en A. Luego hay una sucesión T (subsucesión de S) de puntos del complementario de A y hay una sucesión T' (subsucesión de T) que $C(t_x)$-converge al punto x o al punto u. Como A es un abierto de J(t), por la Proposición 2.3, (v) se deduce, en las dos posibilidades, que T' está casi-toda contenida en A. Lo cual es contradictorio. ■

3.2 PROPOSICION. *Para que una topología* t *sea* 0-*contable es condición necesaria y suficiente que cada topología* t_x *sea* 0-*contable.*

Demostración. Como $t = \mathrm{Sup}\{t_x \mid x \in X\}$, la Proposición 3.1 permite afirmar que la condición es suficiente. Para ver que la condición es necesaria, supóngase que hay un punto x cuya topología t_x no es 0-contable. Entonces la Proposición 2.3 (i) asegura la existencia de un conjunto no vacío A que es abierto en $J(t_x)$ pero que no lo es en t_x. Como A contiene al punto x, A no es abierto en t. Pero A es abierto en J(t), luego las topologías t y J(t) son distintas. ■

3.3 PROPOSICION. *Para cada topología* t *sobre un conjunto* X *se cumple que* $J(t) = \mathrm{Sup}\{J(t^x) \mid x \in X\}$ *donde* $t^x = \{A \in t \mid x \notin A\} \cup \{X\}$.

Demostración. Como $t = \mathrm{Sup}\{t^x \mid x \in X\}$, de la Proposición 2.2 (iii) se tiene que $\tilde{C}(t) = \mathrm{Sup}\{\tilde{C}(t^x) \mid x \in X\}$. Y de la Proposición 2.1 (ii), $\mathrm{Sup}\{J(t^x) \mid x \in X\} \subseteq J(t)$. No es difícil ver que $\tilde{C}(t^x)(x) = \mathrm{Suc}(X)$ y para u distinto de x, $\tilde{C}(t^x)(u) = \tilde{C}(t)(u)$. Sea A un abierto en J(t) distinto de X, luego existe $x \notin A$. Si A no es abierto en $J(t^x)$, por la Proposición 2.3 (v), existe una sucesión S y un punto u de A de tal manera que S es $\tilde{C}(t^x)$-convergente a u y S no está casi-toda contenida en A. Como x es distinto de u, $\tilde{C}(t^x)(u) = \tilde{C}(t)(u)$. Luego A no es abierto en $J(t)$. Contradicción. En consecuencia A es abierto en $J(t^x)$ y A pertenece al conjunto $\mathrm{Sup}\{J(t^x) \mid x \in X\}$. ■

3.4 PROPOSICION. *Para que una topología* t *sea* 0-*contable es condición necesaria y suficiente que cada topología* t^x *sea* 0-*contable.*

<u>*Demostración*</u>. Como $t = \mathrm{Sup}\{t^x \mid x \in X\}$, la Proposición 3.3 permite afirmar que la condición es suficiente. Para ver que la condición es necesaria, supóngase que hay un punto x cuya topología t^x no es 0-contable. Entonces la Proposición 2.3 (i) asegura la existencia de un conjunto A, distinto de X, abierto en $J(t^x)$ pero que no es abierto en t^x. Como A no contiene al punto x, A no es abierto en t. Pero A es abierto en $J(t)$, luego las topologías t, $J(t)$ son distintas. ■

§4. <u>Criterios 0-contables</u>. En esta sección se presentan tres caracterizaciones de los criterios de convergencia secuencial asociados a una topología.

4.1 DEFINICION. Un criterio de convergencia secuencial se llama 0-*contable* (resp. criterio de *Fréchet*, criterio 1-*contable*, criterio 2-*contable*) si es generado, mediante $\tilde{C}$, por una topología (resp. una topología de Fréchet, una topología 1-contable, una topología 2-contable).

Las Proposiciones 2.4 (iv) y 2.3 (iv) permiten observar que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de criterios 0-contables (resp., de criterios de Fréchet, de criterios 1-contables, de criterios 2-contables) y el conjunto de topologías 0-contables (resp. de topologías de Fréchet, de topologías 1-contables, de topologías 2-contables) sobre un conjunto X. También se observa que las siguientes relaciones

2-contable $\Rightarrow$ 1-contable $\Rightarrow$ Fréchet $\Rightarrow$ 0-contable ,

se verifican cuando estas condiciones se refieren tanto a topologías (lo cual es bien conocido) como a criterios de convergencia secuencial sobre un conjunto X.

4.2 PROPOSICION. *Para cada criterio* C *sobre un conjunto* X *se tiene que* $K(C) = \text{Inf}\{K(C_x) | x \in X\}$, *donde* $C_x(x) = C(x)$ *y para* u *distinto de* x, $C_x(u)$ *es el conjunto de sucesiones casi-constantes de valor* u.

<u>*Demostración*</u>. Para un punto x se verifica que $\tilde{T}(C_x) = \{A \in P(X) | x \notin A\} \cup \{A \in P(X) | x \in A \text{ y } A \text{ cumple la condición (1)}\}$.

Condición (1): "Si S es una sucesión C-convergente a x, entonces S está casi-toda contenida en A". Fácilmente se demuestra que $K(C_x) = K(C)_x$, cualquiera que sea x. Lo cual demuestra la proposición, pues el criterio K(C) es igual a $\text{Inf}\{K(C)_x | x \in X\}$. ∎

4.3 PROPOSICION. *Para que un criterio* C *de convergencia secuencial sea* 0*-contable es condición necesaria y suficiente que cada criterio* C_x *sea* 0*-contable.*

<u>*Demostración*</u>. Como $C = \text{Inf}\{C_x | x \in X\}$, la Proposición 4.2 permite afirmar que la condición es suficiente. La necesidad se tiene de la Proposición 4.2 y de la igualdad $K(C_x) = K(C)_x$. ∎

4.4 NOTACION. Para un punto x y un criterio C sobre un conjunto X, se denota $v(x;C)$ al conjunto de puntos z, tales que la sucesión constante de valor z es C-convergente a x.

4.5 PROPOSICION. *La igualdad* $v(x;C) = v(x;K(C))$ *se verifica para cada punto* x *y cada criterio* C *(que cumplas las condiciones* Cv1, Cv2).

Demostración. Como $v(x;C)$ es un subconjunto de $v(x;K(C))$ (Proposición 2.4 (i)), sólo falta demostrar que si una sucesión constante es K(C)-convergente a x, también es C-convergente a x. Supóngase que existe un punto z tal que la correspondiente sucesión constante K(C)-converge a x, pero no C-converge a x. Entonces cualquier conjunto A que sea abierto en $\tilde{T}(C_x)$ y que contenga a x, también debe contener al punto z. Como el conjunto $A \setminus \{z\}$ contiene a x y la sucesión constante de valor z es $K(C_x)$-convergente a x, se tiene que $A \setminus \{z\}$ no es abierto en $\tilde{T}(C_x)$. Luego se garantiza la existencia de una sucesión S que C-converge a x y que no está casi-toda contenida en $A \setminus \{z\}$. Además, S está casi-toda contenida en el conjunto $\{z\}$. Luego la sucesión constante de valor z es C-convergente al punto x. Contradicción. ∎

4.6 PROPOSICION. *Sea* C *un criterio de convergencia secuencial que cumple las condiciones* (Cv1, Cv2), Cv3. *Cada vez que el conjunto* $v(x;C)$ *sea finito, el criterio* C_x *es* 0*-contable.*

Demostración. Sea x un punto para el cual existe una sucesión S que K(C)-converge a x y que no C-converge a x. Como el criterio C cumple las condiciones Cv1, Cv2 y Cv3, se garantiza la existencia de una sucesión T que cumple las siguientes propiedades: T es una subsucesión de S, T no es C-convergente a x, ninguna subsucesión de T es C-convergente a x, ningún término de T toma el valor x, T es K(C)-convergente a x.

Sea A un abierto de $\tilde{T}(C_x)$ que contenga a x. Como el conjunto $A \setminus \{T(n) \mid n \in N\}$ no puede ser de $\tilde{T}(C_x)$, se garantiza la existencia de una sucesión V^1 que cumple las siguientes condiciones: V^1 es C-convergente a x, V^1 es una sucesión de puntos de A y del conjunto $\{T(n) | n \in N\}$. Como V^1 no puede ser una subsucesión de T, entonces existe un punto z_1, distinto de x, que pertenece a $\{T(n) | n \in N\}$ y tal que la sucesión constante de valor z_1 es subsucesión de V^1 y es C-convergente a x.

De la Proposición 4.5 se deduce que el conjunto $\{T(n) | n \in N\}$ es infinito, pues de lo contrario existiría una sucesión constante (subsucesión de T) C-convergente a x. Luego existe una sucesión T^1 (subsucesión de T) tal que ninguno de sus términos toma el valor z_1. Al aplicar el procedimiento anterior a la sucesión T^1, se encuentra un punto z_2, distinto de z_1, que pertenece a $\{T(n) | n \in N\}$ y tal que la sucesión constante de valor z_2 es C-convergente a x. De esta manera se obtiene un conjunto $\{z_i | i \in N\}$ infinito (y de puntos distintos) tal que cada uno de sus elementos z_i pertenece a $\{T(n) | n \in N\}$ y la correspondiente sucesión constante C-converge a x. Es decir, el conjunto v(x;C) es infinito. ■

Se observa que las Proposiciones 4.5 y 4.6 permiten encontrar fácilmente un criterio de convergencia secuencial que muestre que las condiciones Cv1, Cv2, Cv3 no son suficientes para que un criterio sea 0-contable. Y también, introducir la condición Cv4, que se enuncia a continuación para un criterio C y cada punto x.

Cv4. *Cualquier sucesión casi-toda contenida en* v(x;C) *es* C-*convergente a* x.

4.7 PROPOSICION. *Un criterio de convergencia secuencial que cumpla las condiciones* (Cv1, Cv2), Cv3 *y* Cv4, *es* 0-*contable.*

Demostración. Sea C un criterio que cumple las condiciones Cv1, Vc2, Cv3, Cv4. Si se supone que C no es 0-contable, la Proposición 4.3 permite afirmar que existe un punto x tal que el criterio C_x no es 0-contable. Por la demostración de la Proposición 4.6, se garantiza la existencia de una sucesión V que no C-converge a x, y que para cada n la sucesión constante de valor V(n) es C-convergente a x. Pero como el criterio C cumple la condición Cv4, la sucesión V es C-convergente a x. Contradicción. ■

Es bien conocido que las propiedades Cv1, Cv2, Cv3 son condiciones necesarias para que un criterio de convergencia secuencial sea 0-contable y fácilmente se demuestra que la condición Cv4 también lo es. De esta observación y de la Proposición 4.7 se obtiene la siguiente caracterización de los criterios 0-contables.

4.8 TEOREMA. *Para que un criterio de convergencia secuencial sea* 0-*contable, es condición necesaria y suficiente que cumpla las propiedades* (Cv1, Cv2), Cv3, Cv4.

En [9], J. Kisyński demostró que si un criterio secuencial C satisface las condiciones Cv1, Cv2, Cv3 y la unicidad de límites, entonces es generado por una topología. Lo cual es un corolario del Teorema 4.8, pues la unicidad de límites implica que v(x;C) tiene un sólo punto y en consecuencia se verifica inmediatamente la condición Cv4.

Para un criterio C, se enuncia a continuación la condición Cv5, denotada en [1] por C4 y considerada por Dudley en [7] y por Kelley para el caso de redes en [6].

Cv5. *Cada vez que una función* $S:\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to X$ (*bisucesión*) *cumpla que para cada número natural* n, *la sucesión* $S(n,-):\mathbb{N} \to X$ *es* C-*convergente a* x_n *y los términos* x_n *forman una sucesión* C-*convergente a* x, *entonces existe una aplicación* $\varphi:\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *tal que la sucesión* $S\varphi:\mathbb{N} \to X$ *es* C-*convergente a* x.

Se usa la definición 4.1 en la siguiente proposición de C. Ruíz S. [2], y que fué considerada para redes por Kelley en [6].

4.9 TEOREMA. *Para un criterio* 0-*contable* C, *las siguientes condiciones son equivalentes:*
La topología $\tilde{T}(C)$ *es de Fréchet.*
El criterio C *cumple la condición* Cv5.

De los Teoremas 4.8 y 4.9 se obtiene la siguiente caracterización de los criterios de Fréchet.

4.10 TEOREMA. *Para que un criterio de convergencia secuencial sea de Fréchet, es condición necesaria y suficiente que cumpla las propiedades* (Cv1, Cv2), Cv3, Cv4, Cv5.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Ruíz, S.C., *Topología o Convergencia,* Fascículo 1, UPTC, Tunja, 1975.
[2] Ruíz, S.C., "A propósito de la adherencia secuencial". Conferencia presentada en el XI Congreso Nacional de Matemáticas - Bucaramanga, 1979.
[3] Ruíz, S.C. y Suárez, M.M., *Topología o Convergencia,* Fascícu-

lo 2, UPTC. Tunja, X Coloquio Col. Mat. 1980.
[4] Restrepo, S.G., *Convergencia de sucesiones en espacios de Banach*. Rev. Col. Mat. XIII (1979) 155-169.
[5] Caicedo, F.X., *Conjuntos secuencialmente cerrados*. Rev. Col. Mat. XIV (1980) 111-130.
[6] Kelley, J.L., *Topología General*, EUDEBA, 2a. Ed., 1975.
[7] Dudley, R.M., *On sequential convergence*. Trans. of the A.M.S. Vol. 112 (1964) 483-507.
[8] Franklin, S.P., *Spaces in which sequences suffice*. Fundamenta Mathematical, LVII (1965) 107-115.
[9] Kisyński, J., *Convergence of type* L. Coll. Math. 7 (1960) 250-211.

* *

Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Tunja, COLOMBIA.

(Recibido en octubre de 1981).