Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XVI (1982) 141 - 150

UNITÉ ET SEMI-NORMES DANS LES ALGÈBRES LOCALEMENT CONVEXES

par

Mohamed OUDADESS*

RESUMEN. Se demuestra que el problema siguiente propuesto por W. Żelazko tiene una respuesta negativa. ¿Puede definirse la topología de un álgebra (topológica) localmente convexa con identidad por medio de una familia de seminormas $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tales que $p_\lambda(e) = 1$ para todo λ, donde e es la identidad? ("Selected topics in topological algebras", Lec. Notes Series Nº 31 (1971) Aarhus Universität). Por otra parte, se demuestra que la respuesta es positiva para las álgebras localmente A-convexas.

__Introduction.__ L'objet de cet article est de montrer que la réponse à un problème de Żelazko est en général négative.

W. Żelazko a posé dans [8], page 78, le problème suivant: "est-ce que la topologie d'une algèbre (topologique) localement

---

* Boursier du projet "centres pédagogiques régionaux, Maroc". Project conjoint M.A.I.Q. - A.C.D.I.

convexe unitaire peut être définie par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ telle que $p(e) = 1$, pour tout λ (où e est l'unité de l'algebre)"?

Par définition la multiplication dans une algèbre topologique est globalement continue.

Nous examinons d'abord le "problème de Żelazko" dans le cas des algèbres localement A-convexes (où la multiplication est seulment séparément continue). La réponse est positive et on en déduit que toute algèbre localement A-convexe dont la topologie est la topologie localement A-convexe la plus fine est une algèbre localement multiplicativement convexe.

Ensuite nous donnons une réponse négative au problème de Żelazko.

Nous rappelons maintenant les définitions dont nous aurons besoin. Une algèbre topologique est une algèbre E (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) qui est en même temps un espace vectoriel topologique (e.v.t.) telle que la multiplication est (globalement) continue.

Si $\mathcal{V}$ est une base de voisinages de 0, dans A, $(x,y)\mapsto xy$ continue signifie que pour tout $U\in\mathcal{V}$, il existe $V\in\mathcal{V}$ tel que $V^2\subset U$ (c'est la continuité en (0,0), qui est équivalente à la continuité partout).

Une algèbre topologique localement convexe (a.l.c.) est une algèbre topologique qui est en même temps un espace vectoriel topologique localment convexe (e.l.c.). On sait que dans ce cas la topologie peut être défine par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Le fait que la multiplication est continue s'écrit ici: pour tout λ, il existe λ' telle que $p_\lambda(x\cdot y) \leq p_{\lambda'}(x)\cdot p_{\lambda'}(y)$, pour tout x et tout y.

Une algèbre localement A-convexe (a.l.A-convexe) est une algèbre qui est en même temps un e.l.c. tel que la multiplication est séparément continue. Dans ce cas sa topologie peut être définie par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ telle que: pour tout x et tout λ, il existe un nombre $M(\lambda,x) > 0$ tel que $p_\lambda(x\cdot y) \leqslant M(\lambda,x)\cdot p_\lambda(y)$, pour tout y. On dit que E est uniformément A-convexe si pour tout x il existe $M(x) > 0$ tel que $p_\lambda(x\cdot y) \leqslant M(x)\cdot p_\lambda(y)$ pour tout y et tout λ. Elle est dite localement multiplicativement convexe (l.m.c.) si $p_\lambda(x\cdot y) \leqslant p_\lambda(x)\cdot p_\lambda(y)$ pour tout x,y et tout λ. Dans ce cas la multiplication est continue. Si $(E;\|\cdot\|)$est une algèbre normée unitaire, il existe une norme $\|\cdot\|'$ équivalente à $\|\cdot\|$ telle que $\|e\|' = 1$. Si $(E;(p_\lambda)_\lambda)$ est une a.o.m.c. ou une a.l.u.A-convexe on peut considérer que $p_\lambda(e) = 1$, pour tout λ.

Je remercie M. le Professeur José I. Nieto pour ses encouragements et pour de nombreuses et stimulantes discussions.

1. Algèbres localement A-convexes.

Cochran, Akkar et d'autres chercheurs qui se sont intéressés aux a.l.A-convexes ne disent rien sur les valeurs des p_λ en e. Comme nous allons le voir cette question est importante pour la nature topologique de l'algèbre.

PROPOSITION 1. *Soit* (E,τ) *une a.l.A-convexe unitaire alors* τ *peut être définie par une famille de semi-normes,* $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *, telle que* $p_\lambda(e) = 1$, *pour tout* λ.

Preuve. Soit $(p'_\lambda)_\lambda$ une famille de semi-normes définissant τ. Il suffit de remarquer que $p'_\lambda(e) \neq 0$, pour tout λ et de poser $p_\lambda = [p'_\lambda(e)]^{-1}\cdot p'_\lambda$. Par définition:

$$\forall\lambda,\ \forall x,\ \exists M(\lambda,x) > 0 : p'_\lambda(x\cdot y) \leqslant M(\lambda,x)\cdot p'_\lambda(y),\ \forall y .$$

Fixant λ et prenant $y = e$, on s'aperçoit que si $p_\lambda'(e) = 0$ alors $p_\lambda(x) = 0$, pour tout x. On exclut un tel p_λ'.

Nous obtenons maintenant un théorème sur la topologie de E.

THÉORÈME 1. *Toute a.l.A-convexe unitaire* (E,τ) *peut être munie d'une topologie d'a.l.m.c.* τ' *plus fine que* τ.

Preuve. Soit $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de semi-normes définissant λ et telle que $p_\lambda(e) = 1$ pour tout λ. On a

$$p_\lambda(x\cdot y) \leqslant M(\lambda,x)\cdot p_\lambda(y) \quad , \text{ pour tout } y. \tag{1}$$

Posons

$$q_\lambda(x) = \inf\{M(\lambda,x) : p_\lambda(x\cdot y) \leqslant M(\lambda,x)\cdot p_\lambda(y), \text{ pour tout } y\}$$

$$r_\lambda(x) = \sup\{p_\lambda(x\cdot y) : p_\lambda(y) \leqslant 1\}.$$

Montrons que :

$$q_\lambda(x) = r_\lambda(x).$$

Si $p_\lambda(y) \leqslant 1$, on a d'après (1), $p_\lambda(x\cdot y) \leqslant M(\lambda,x)$ d'où $r_\lambda(x) \leqslant q_\lambda(x)$. Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, il suffit de montrer que :

$$p_\lambda(x\cdot y) \leqslant r_\lambda(x)\cdot p_\lambda(y) \quad , \text{ pour tout } y.$$

Si $p_\lambda(y) = 0$, on a d'apres (1), $p_\lambda(x\cdot y) = 0$ et l'inégalité est vérifiée.

Si $p_\lambda(y) \neq 0$, on a $p_\lambda(x\cdot \frac{y}{p_\lambda(y)}) \leqslant r_\lambda(x)$, d'où l'inégalité.

Il est clair que q_λ est une semi-norme d'espace vectoriel; c'est en fait une semi-norme d'algebre. En effet:

$$\begin{aligned} q_\lambda(x\cdot z) &= \sup\{p_\lambda(x\cdot z\cdot y) : p_\lambda(y) \leqslant 1\} \\ &\leqslant M(\lambda,x)\cdot q_\lambda(z). \end{aligned}$$

D'ou

$$q_\lambda(x\cdot z) \leqslant q_\lambda(x)\cdot q_\lambda(z).$$

Par ailleurs

$$p_\lambda(x) \leqslant q_\lambda(x), \quad \text{pour tout } x \text{ et tout } \lambda. \tag{2}$$

Soit τ' la topologie sur E définie par $(q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. τ' est une topologie d'a.l.m.c. et d'après (2) on a $\tau \subset \tau'$.

On constate que si τ est séparée alors τ' l'est aussi.

COROLLAIRE 1. (Théorème de Gelfand-Mazur). *Toute a.l. A-covexe (complexe) unitaite séparée qui est aussi un corps est isomorphe à* $\mathbb{C}$.

<u>*Preuve*</u>. Car le résultat est vrai pour les a.l.m.c. séparées.

COROLLAIRE 2. *Toute a.l. A-convexe unitaire munie da sa topologie d'a.l. A-convexe la plus fine est en fait une a.l.m.c.*

<u>*Preuve*</u>. Car une a.l.m.c. est une a.l.A-convexe.

2. <u>Algèbres topologiques localement convexes.</u>

THÉORÈME 2. *Soit* (E,τ) *une a.l.c. unitaire dont la topologie* τ *peut être définie par une famille de semi-normes,* $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, *telle que* $p_\lambda(e) = 1$, *pour tout* λ. *Alors* E *peut être munie d'une topologie d'a.l.m.c.* τ' *plus fine que* τ.

<u>*Preuve*</u>. Par la définition même d'une a.l.c.; pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe $\lambda' \in \Lambda$ tel que

$$p_\lambda(x\cdot y) \leqslant p_{\lambda'}(x)\, p_{\lambda'}(y) \quad , \text{ pour tout } x \text{ et tout } y. \tag{1}$$

Par hypothèse $p_{\lambda'}(e) = 1$ et donc

$$p_\lambda(x) = p_{\lambda'}(x) \text{ , pour tout } x.$$

Etant donné que λ' dépend de λ, posons $p_{\lambda'}(x) = M(\lambda,x)$, alors (1) devient

$$p_\lambda(x \cdot y) \leqslant M(\lambda,x) \cdot p_{\lambda'}(y) \text{ , pour tout } y.$$

Pour chaque x, posons

$$q_{\lambda,\lambda'}(x) = \inf\{M(\lambda,x) : p_\lambda(x\cdot y) \leqslant M(\lambda,x)\cdot p_{\lambda'}(y), \text{ pour tout } y\}.$$

Comme dans le Théorème 1, on vérifie que

$$q_{\lambda,\lambda'}(x) = \sup\{p_\lambda(x\cdot y) : p_{\lambda'}(y) \leqslant 1\}$$

et que $q_{\lambda,\lambda'}$ est une semi-norme d'algèbre. De plus $p_\lambda \leqslant q_{\lambda,\lambda'}$. Soit τ' la topologie définie par la famille de semi-normes $(q_{\lambda,\lambda'})_\lambda$, où $\lambda' = \lambda'(\lambda)$ est l'une des semi-normes vérifiant (1); τ' est localement multiplicativement convexe et $\tau \subset \tau'$.

COROLLAIRE. (Réponse au problème de Żelazko). *Soit* (E,τ) *une a.l.c. unitaire séparée qui ne peut être munie d'aucune topologie séparée d'a.l.m.c. Si* $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *est la famille de semi-normes définissant* τ, *alors il existe au moins* $\lambda_0 \in \Lambda$ *tel que* $p_{\lambda_0}(e) \neq 1$.

EXEMPLE 1. Soit $\mathbb{C}(X)$ le corps des fractions rationnelles à une indéterminée. Williamson a montré (cf. [6]) qu'il existe sur $\mathbb{C}(X)$ une topologie localement convexe métrisable (non complète) compatible avec la structure algébrique (i.e. on a une a.l.c.). Mais il ne peut exister sur $\mathbb{C}(X)$ aucune topologie d'a.l.m.c. séparée à cause du Théorème de Gelfand-Mazur (cf [6] ou [8]). Donc $\mathbb{C}(X)$ est une a.l.c. dont la topologie ne peut être définie par aucune famille $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de semi-normes telle que $p_\lambda(e) = 1$, pour tout λ.

EXEMPLE 2. La topologie de $\mathbb{C}(X)$ dans l'exemple 1 n'est pas complète. Nous donnons maintenant un exemple de corps muni d'une topologie d'a.l.c. complète. Soit $0 < p < 1$ et soit $\sum(p)$ l'ensemble des suites positives décroissantes $\alpha = (\alpha_k)_{-\infty}^{+\infty}$ telles que $\alpha_k = p^k$ pour tout $k > 0$. On notera par W_p l'espace des séries

$$\|x\|_\alpha = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_n|\cdot\alpha < \infty \quad , \text{ pour tout } \alpha \in \textstyle\sum(p).$$

On montre (cf [8], Lemme 10.10) que pour tout $\alpha \in \sum(p)$, il existe $\beta \in \sum(p)$ tel que $\alpha_{k+i} \leqslant \beta_k \cdot \beta_i$, pour tout k et tout i; et l'on a alors $\|x\cdot y\|_\alpha \leqslant \|x\|_\beta \cdot \|y\|_\beta$

W_p est une a.l.c. pour la multiplication (de Cauchy) des séries. En fait W_p consiste en les fonctions méromorphes n'ayant aucun pôle dans le disque $\{t : |t| < p\}$, sauf en 0. De plus $W_p \subset W_q$ si $q < p$, et c'est une injection continue.

$W = \bigcup_{0<p<1} W_p$ est complet pour la topologie limite inductive. W est une a.l.c. commutative unitaire qui est aussi un corps. D'après le Théorème de Gelfand-Mazur, elle ne peut être munie d'aucune topologie l.m.c. séparée.

3. B_0-__algèbres__. Nous allons maintenant donner un exemple de B_0-algèbre (i.e. une a.l.c. métrisable complète) qui ne peut être munie d'aucune topologie d'a.l.m.c. séparée, ce qui montrera, compte tenu du Theorème 2, qu'une affirmation dans [7] est inexacte à savoir que la topologie d'une B_0-algèbre unitaire peut être définie par une famille de semi-normes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $p_n(e) = 1$, pour tout n.

Pour les détails de cet exemple voir [8]. Soit $(a_{n,k})$,

$1 \leqslant n < \infty$, $-\infty < k < \infty$ une matrice infinie à termes réels positifs. Supposons que pour tout n il existe $n' \geqslant n$ tel que

$$a_{n',k}\, a_{n',\ell} \geqslant a_{n,k+\ell} \quad \text{pour tout } k \text{ et tout } \ell. \tag{1}$$

Désignons par $K(a_{n,k})$ l'algèbre des séries formelles de Laurent

$$x = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_k t^k \text{ telle que } \|x\|_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{n,k} \cdot |x_k| < \infty \text{, pour tout } n.$$

C'est une algèbre pour la multiplication de Cauchy. En effet on vérifie que :

$$\|x \cdot y\|_n \leqslant \|x\|_{n'} \cdot \|y\|_{n'} \tag{2}$$

où n' est l'entier vérifiant (1).

$K(a_{n,k})$ est une B_0-algèbre. C'est une a.l.m.c. si $n' = n$ dans (2). Soit $W = K(a_{n,k})$ avec

$$a_{n,k} = \begin{cases} (1-k)^{n(1-k)} & \text{pour } k \leqslant -1 \\ 1 & \text{pour } k = 1 \\ (1+k)^{-\frac{1+k}{n}} & \text{pour } k \geqslant 1 \end{cases}$$

On montre que (1) est vérifiée avec $n' = 4n$. On montre aussi que W contient une sous-algèbre W_1 isomorphe au corps de toute les fonctions rationnelles $\mathbb{C}(X)$ considéré à l'exemple 1.

S'il existait une topologie l.m.c. τ' telle que $\tau \subset \tau'$, alors W_1 munie de la topologie induite par τ' serait une a.l.m.c. séparée (complexe) et donc $W_1 \simeq \mathbb{C}$, alors $\mathbb{C}(X) \simeq \mathbb{C}$.

4. <u>Algèbres non unitaires</u>. Soit E une algèbre non unitaire et $\tilde{E} = E \times \mathbb{C}$ l'algèbre unitaire obtenue à partir de E par adjonction d'une unité.

Si $(p_\lambda)_\lambda$ est une famille de semi-normes définissant la topologie E, alors la topologie de $\tilde{E}$ peut être définie par $(\tilde{p}_\lambda)_\lambda$ telle que $\tilde{p}_\lambda((x,\alpha)) = p_\lambda(x) + |\alpha|$; $e = (0,1)$ est l'élément unité de $\tilde{E}$ et on a:

$$\tilde{p}_\lambda((0,1)) = 1, \quad \text{pour tout } \lambda.$$

Si $(E;(p_\lambda)_\lambda)$ est une a.l.A-convexe (resp. une a.l.c.) alors il en est de même de $(\tilde{E},(\tilde{p}_\lambda)_\lambda)$.

Comme corollaire du Théoreme 2 on a que si (E,τ) est une a.l.c. unitaire telle que $p_\lambda(e) = 1$, pour tout λ, où $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ définit τ, alors E ne contient aucune sous-algèbre, autre que $\mathbb{C}e$, qui soit un corps: et c'est effectivement le cas pour $\tilde{E}$.

PROPOSITION 2. $\tilde{E}$ *ne contient aucune sous-algèbre, autre que* $\mathbb{C}e$*, qui soit un corps.*

Preuve. D'abord aucun $x = (x,0) \in E$ nést inversible dans $\tilde{E}$, car E est un idéal de $\tilde{E}$. Si K était un corps, qui soit en même temps une sous-algèbre de $\tilde{E}$, il existerait (x,α), $x \neq 0$ et $\alpha \neq 0$ tel que $(x,\alpha) \in K$, on aurait $\alpha^{-1}(x,\alpha) \in K$; or $(0,1) \in K$ et donc $(\alpha^{-1}x,1) - (0,1) = \alpha^{-1}x \in K$; $\alpha^{-1}x = (\alpha^{-1}x,0) \neq 0$, serait donc inversible. Contradiction.

5. Finesse de la Topologie τ'. Soit (E,τ) une a.l. A-convexe unitaire. Au Théorème 1, nous avons mis en évidence une topologie l.m.c. τ' plus fine que τ. Nous noterons τ' par $M(\tau)$.

PROPOSITION 3. $M(\tau)$ *est la moins fine parmi les topologies l.m.c. plus fines que* τ.

Preuve. Soit $(p_\lambda)_\lambda$ une famille de semi-normes définissant τ.

$M(\tau)$ est défine par $(q_\lambda)_\lambda$ telle que $q_\lambda(x) = \sup\{p_\lambda(x\cdot y) : p_\lambda(y) \leqslant 1\}$. Soit $(r_\mu)_\mu$ définissant une topologie τ'' l.m.c. plus fine que τ. Pour tout p_λ, il existe r_μ et $k_\mu > 0$ tels que $p_\lambda \leqslant k_\mu \cdot r_\mu$. Alors $q_\lambda \leqslant k_\mu \cdot \sup\{r_\mu(y) : p_\lambda(y) \leqslant 1\} \cdot r_\mu$.

REMARQUE. La topologie $M(\tau)$ l.m.c. plus fine que τ est en un sens duale de la toplogie $m(\tau)$ de A.C. Cochran (cf [4]); $m(\tau)$ est la plus fine parmi les toplogies l.m.c. moins fine que τ; $M(\tau)$ a l'avantage d'être séparée si τ l'est.

*

RÉFÉRENCES

[1] Akkar, M., "Etude spectrale et structures d'algèbres topologiques et bornologiques complètes". Thèse Sc. Math. Univ. Bordeaux I (1976).

[2] Akkar, M., *Sur certaines algèbres de fonctions munies de normes particulières*. C.R. Acad. Sc. Paris, t280 (1975) Serie A, 345-348.

[3] Cochran, A.C., Keown, R., Williams, C.R., *On a class of topological algebras*. Pacific J. Math. 34 (1970) 17-25.

[4] Cochran, A.C., *Representation of A-Convex algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973) 473-479.

[5] Warner, S., *Inductive limits of normed algebras*. Transactions of Amer. Math. Soc., 82 (1956) 190-216.

[6] Williamson, H., *On topologising the field* C(t). Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 5 (1954) 729-734.

[7] Rolewicz, S., and Zelzko, W., *Some problems concerning* B_0*-algebras*. Tensor 13 (1963) 265-279.

[8] Żelazko, W., *Selected topics in topological algebras*. Lecture Notes series, Nº 31 (1971) Aarhus Universität.

*

Département de Mathématiques et de Statistique
Université de Montréal. C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, Québec. CANADA H3C 3J7.

(Recibido en abril de 1982).