

ORBITAS FRENADAS

EN SISTEMAS MECANICOS FINSLERIANOS

por

Otto Raúl RUIZ M.

ABSTRACT. Given a mechanical system (M, K, U) where M is a n -dimensional variety and the kinetic and potential energy K and U are three times differentiable, let E_0 be a potential energy value such that $\{X \in M \mid U(x) \leq E_0\}$ is homeomorphic to the n -dimensional disk, and its border B is the E_0 -equipotential surface. If (M, K, U) is a Finsler mechanical system, then any point of potential energy less than E_0 can be joined to B by an orbit of total energy E_0 which approaches a fixed point of B . If (M, K, U) is a Riemann mechanical system, the orbit can be made to turn back on itself after reaching B .

1. Modelos matemáticos de la mecánica clásica. Cuando nos introducimos en el tema de la mecánica clásica, vienen a nuestra mente naturalmente imágenes de situaciones relacionadas con el péndulo, la caída libre de un cuerpo, el sistema plane-

tario, el plano inclinado, resortes, sistemas de poleas, etc. y observamos que desde un punto de vista físico deseamos conocer cómo se modifican en el tiempo las situaciones o configuraciones de cada uno de los problemas relacionados. Así, podemos considerar la mecánica clásica como el estudio que se dedica a conocer el cambio en el tiempo de un sistema de cuerpos sometidos a fuerzas.

Para construir el modelo matemático apropiado para la mecánica, tendremos en cuenta las siguientes suposiciones.

Primera: el sistema físico puede ser descrito "localmente" por un conjunto de parámetros x_1, \dots, x_n que varían continuamente en el tiempo, o en un lenguaje más exacto, todas las posibles posiciones o configuraciones de un sistema físico determinan una variedad diferenciable M que será llamada el espacio de configuraciones.

Segunda: si $x(t)$, perteneciente a M , es la posición o la configuración de un instante t , asumimos que la curva $x(t)$ en el espacio M de configuraciones puede ser determinada a partir de un conjunto de informaciones o "estado" en un instante dado.

Tercera: el conjunto de estados es también una variedad diferenciable, que notaremos con la letra S .

Observemos que necesariamente la posición o configuración debe hacer parte de las informaciones o "estados" necesarios para conocer la evolución o el transcurso en el tiempo de una configuración dada.

El enfoque Lagrangiano de la mecánica considera $S = TM$, el espacio tangente de la variedad M , es decir, un estado consiste de la configuración y su velocidad de cambio. El enfoque

Hamiltoniano considera $S = T^*M$, el espacio cotangente de M . Cada vector cotangente en el lenguaje físico consiste de la configuración y el momentum. Estos dos enfoques se corresponden de manera natural por medio de la transformada de Legendre.

2. Principios variacionales de la mecánica y ecuaciones de movimiento de Lagrange-Euler. Supondremos adicionalmente, que las curvas $x(t)$ en el espacio M de configuraciones satisfacen el *principio de mínima acción de Hamilton*, que dice: los cambios de configuración de un sistema mecánico, corresponden a las curvas $x(t)$ en M que extremizan la funcional ϕ dada por

$$\phi(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt,$$

tomada sobre las curvas tales que $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$. L es la *función de Lagrange* $L = K - U$, donde K es una forma cuadrática positivamente definida sobre el espacio de estados $S = TM$, y U es una función a valor real definida sobre la variedad M ; K es llamada la *energía cinética* y U la *energía potencial*. En otras palabras, las soluciones de un sistema mecánico son las curvas $x(t)$ que son puntos críticos de la función ϕ , o en lenguaje variacional, puntos donde la primera variación de ϕ es igual a cero.

De acuerdo a lo anterior, concluimos que un sistema mecánico queda determinado por una tripla de objetos (M, K, U) donde M es la variedad de situaciones o configuraciones, K la energía cinética y U la energía potencial.

Resultados elementales de cálculo de variaciones nos per-

miten afirmar que una curva $x = x(t)$ es solución de un sistema mecánico dado si y sólo si satisface las siguientes ecuaciones de Lagrange-Euler:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} .$$

Las coordenadas (x, \dot{x}) representan cualquier conjunto de coordenadas locales de la variedad TM .

3. Sistemas mecánicos de Riemann y Finsler. Un sistema mecánico (M, K, U) se denomina *de Riemann*, cuando la energía cinética $K: TM \rightarrow \mathbb{R}$ proviene de una *métrica de Riemann* o *tensor de Riemann*, es decir, de una asignación diferenciable de un producto escalar a cada plano tangente $T_x M$. En coordenadas locales y en la notación de Einstein (considerando sumatoria respecto a los índices repetidos), la energía cinética K se expresa en la forma $K = g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j$.

Un sistema mecánico se denomina *de Finsler*, cuando la energía cinética K es igual a F^2 donde F es una *métrica de Finsler*, es decir, una función $F: TM \rightarrow \mathbb{R}$ que es una norma en cada plano tangente $T_x M$, y tal que las funciones

$$g_{ij}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial F^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$$

definen una forma cuadrática positivamente definida en todo punto (x, \dot{x}) con $\dot{x} \neq 0$.

NOTA. Puesto que F es una norma, F^2 es homogénea de grado 2 en \dot{x} y las funciones $g_{ij}(x, \dot{x})$ son homogéneas de grado cero en

\dot{x} , es decir, $g_{ij}(x, a\dot{x}) = g_{ij}(x, \dot{x})$ para todo $a \neq 0$, lo cual implica que las funciones g_{ij} son constantes sobre cada dirección en el plano tangente $T_x M$. Por este motivo, las funciones g_{ij} solo se pueden definir diferenciablemente en los puntos $(x, 0)$ en el caso en que ellas sean independientes de \dot{x} , lo que corresponde al caso de Riemann anteriormente citado.

Es fácil observar que en la mecánica Finsleriana, $K = F^2 = g_{ij}(x, \dot{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j$, y que el caso de Finsler es una generalización del de Riemann. Si reemplazamos la última igualdad en las ecuaciones de movimiento, obtenemos las siguientes ecuaciones en coordenadas locales:

$$\ddot{x}^r + \Gamma_{ij}^r(x, \dot{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j + g^{rk}(x, \dot{x}) U_k(x) = 0,$$

donde las funciones g^{rk} son las entradas de la matriz inversa a la matriz (g_{kj}) , las Γ_{ij}^r son las funciones de Christoffel, análogas a las de la geometría diferencial, y $U_k(x)$ es la derivada parcial $\frac{\partial U}{\partial x_k}$.

4. Ilustración intuitiva del problema propuesto y enunciado de los teoremas principales.

Para ilustrar nuestro problema, consideraremos una aplicación muy simple. Supongamos un sistema donde el conjunto de posiciones posibles está restringido a un vaso de paredes suaves como el de la Figura 1 y donde la energía potencial corresponde a la energía gravitacional. Aquí, los cortes horizontales producen arcos de Jordán que son precisamente las superficies equipotenciales.

Nuestro problema permite afirmar que si consideramos una superficie equipotencial E_0 , desde cualquier punto P de potencial menor existe una *regresión* de energía total E_0 a la super-

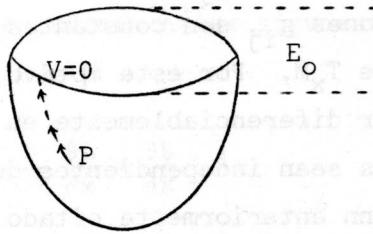


Figura 1

ficie equipotencial E_0 , es decir, existe una órbita del sistema mecánico que permite a un punto material salir del punto P y llegar con velocidad cero a la superficie E_0 y volver a P por el mismo camino con velocidad opuesta. Es fácil observar que esta situación la tenemos en el caso del péndulo. En este trabajo se generaliza esta situación para todo sistema mecánico.

En nuestro trabajo consideraremos que el sistema mecánico (M, K, U) tiene n grados de libertad, es decir, la dimensión de M es igual a n , y que las energías cinéticas y potencial K y U son tres veces diferenciables.

DEFINICION 1. Si E_0 es un valor regular de la energía potencial U , $\bar{B} = \{x \mid x \in M \text{ y } U(x) = E_0\}$ es homeomorfo al disco de dimensión n , y la frontera de \bar{B} , \dot{B} , es la superficie equipotencial de potencial E_0 , decimos que \bar{B} es un E_0 -disco potencial.

DEFINICION 2. Una E_0 -órbita frenada es una órbita de energía total E_0 que se aproxima a un punto fijo de la superficie equipotencial de potencial E_0 . Es fácil ver que un punto sobre esta órbita tiende a tomar la velocidad cero cuando se aproxima a este punto fijo.

DEFINICION 3. Una E_0 -regresión de un punto P es una E_0 -órbita frenada que pasa por el punto P y se devuelve sobre sí misma después de llegar a la superficie equipotencial correspondiente al valor E_0 .

Los dos teoremas siguientes son los resultados principales de este trabajo.

TEOREMA 1. Si (M, K, U) es un sistema mecánico de Finsler con un E_0 -disco potencial \bar{B} , para todo punto P perteneciente a $B = \{x | U(x) < E_0\}$ existe una órbita frenada de energía total E_0 , que une a P con la superficie equipotencial \bar{B} .

TEOREMA 2. Si (M, K, U) es un sistema mecánico de Riemann con un E_0 -disco potencial \bar{B} , para todo P perteneciente a B existe una E_0 -regresión de P.

Para demostrar los teoremas haremos uso de los lemas siguientes.

LEMA 1. Toda órbita de energía total E_0 , está completamente contenida en \bar{B} .

Para probar este lema basta observar que si (x, \dot{x}) es un punto de energía total E_0 , entonces $U(x) = E_0 - K(x, \dot{x})$ y $K(x, \dot{x})$ es mayor o igual a cero puesto que K es una forma cuadrática positivamente definida. Estas observaciones implican trivialmente la desigualdad $U(x) \leq E_0$, de donde se deduce que x pertenece a \bar{B} .

LEMA 2. Las velocidades de las órbitas de energía E_0 son acotadas y tienden a cero cuando la configuración se aproxima a

la frontera de \bar{B} .

Demostración. Consideremos una sumersión (imbedding) de la variedad M en un espacio euclidiano con coordenadas z . Sea $H = \{(z, \dot{z}) \mid z \in \bar{B} \text{ y } |\dot{z}| = 1\}$. Puesto que H es compacto y $K(z, \dot{z})$ es mayor que cero en H , existe un número m mayor que cero tal que $m \leq \text{mínimo } \{K(z, \dot{z}) \mid (z, \dot{z}) \in H\}$. Si (w, \dot{w}) es cualquier punto de energía E_0 , existe (z, \dot{z}) perteneciente a H , tal que $w = z$ y tal que $a\dot{z} = \dot{w}$ donde $a = |\dot{w}|$. Consideremos ahora la siguiente desigualdad: $a^2 m \leq a^2 K(z, \dot{z}) = K(w, \dot{w}) = E_0 - U(w) \leq E_0$. De esta desigualdad se desprende fácilmente que $|\dot{w}|^2 \leq E_0/m$ y $|\dot{w}|^2 \leq (E_0 - U(x))/m$, lo que implica las aserciones del lema.

5. Método general de la prueba y dificultades de la demostración. Para probar la existencia de una órbita frenada de energía E_0 a partir de un punto P perteneciente a B , geometrizarémos el problema, utilizando la métrica de Jacobi correspondiente a la energía potencial E_0 . Esta métrica viene dada por la expresión: $ds^2 = (E_0 - H)g_{ij}(x, \dot{x})dx_i dx_j$, y tiene la propiedad de que sus geodésicas parametrizadas por el arco longitud corresponden por cambio de parametrización a las órbitas de energía E_0 .

Esta métrica tiene el inconveniente de solo tener sentido en el conjunto abierto B , pues en la frontera \dot{B} , donde U es igual a E_0 la métrica de Jacobi se degenera. Por este motivo la demostración del Teorema 1 tendremos que hacerla en dos pasos fundamentales que son:

(1) Demostración de existencia de geodésicas w_a de la E_0 -métrica de Jacobi que unan a P con las superficies equipotenciales de potencial $E_0 - a$, donde a es un número positivo pequeño.

(2) Encontrar una subsucesión convergente de las geodésicas w_a halladas en la parte 1, cuando a tiende a cero.

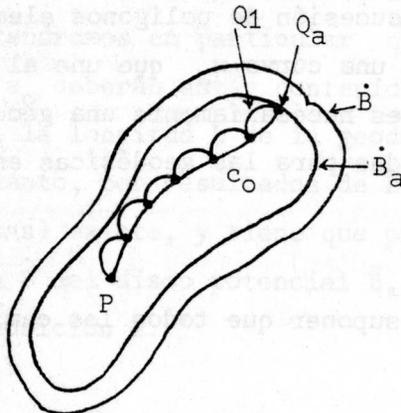
Usaremos las siguientes propiedades básicas de las geodésicas en espacios de Finsler.

Propiedad 1. Dado un conjunto compacto K contenido en M , existe un número $\epsilon > 0$ tal que dos puntos cualesquiera de K con distancia menor que ϵ son unidos por una única geodésica, llamada geodésica elemental.

Propiedad 2. Las geodésicas se pueden caracterizar por la propiedad de que existe un número $\epsilon > 0$ tal que el segmento de curva comprendido entre dos puntos cualesquiera cuya distancia es menor que ϵ corresponde a una geodésica elemental.

PROPOSICION 1. Si $\bar{B}_a = \{x \mid U(x) \leq E_0 - a\}$ y P pertenece al interior de \bar{B}_a , existe una geodésica de la E_0 -métrica de Jacobi que une a P con un punto Q de la superficie equipotencial $\dot{B}_a = \{x \mid U(x) = E_0 - a\}$

Demostración. Sea PQ_a un camino cualquiera c_0 entre P y un punto Q_a de \dot{B}_a . Sea $\epsilon > 0$ una distancia tal que toda geodésica contenida en \bar{B}_a de longitud menor que ϵ sea elemental.



Partamos ahora el camino c_0 en caminos de longitud menor que ϵ , y construyamos una poligonal de geodésicas elementales como en la figura anterior. Si recorremos la poligonal de P hacia Q_0 encontraremos un primer punto Q_1 que pertenece a la frontera \bar{B}_a . La poligonal de P a Q_1 la llamaremos c_1 . Ahora bien, si unimos los puntos medios de las geodésicas elementales de la poligonal c_1 por medio de geodésicas elementales, tendremos otra poligonal elemental entre los puntos P y Q_1 . Si recorremos ahora esta nueva poligonal a partir del punto P , encontraremos un primer punto Q_2 que nos determinará una nueva poligonal PQ_2 contenida completamente en \bar{B}_a , que llamaremos poligonal c_2 . Utilizando este mismo proceso de acortamiento, podremos determinar una sucesión de poligonales elementales $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$, contenidas en \bar{B}_a .

Observemos que por construcción estas poligonales tienen longitud menor que la longitud L_0 de c_0 . Si L_i es la longitud de c_i , podemos parametrizar las poligonales c_i por el arco longitud en el intervalo $[0, L_i]$ y definir $c_i(t) = Q_i$ para t perteneciente al intervalo $[L_i, L_0]$.

Estas poligonales forman un conjunto de funciones uniformemente acotadas puesto que sus imágenes están contenidas en \bar{B}_a . Además las funciones c_i , parametrizadas por el arco longitud en la forma arriba mencionada, forman un conjunto equicontinuo de funciones. Así, por el teorema de Arzela-Ascoli podemos asegurar la existencia de una subsucesión de poligonales elementales que converge uniformemente a una curva w_a que une al punto P con la superficie \bar{B}_a , la cual es necesariamente una geodésica en vista de las propiedades anotadas para las geodésicas en espacios de Finsler. ■

NOTA. Podemos suponer que todos los caminos iniciales c_0 ,

que unen a P con las superficies equipotenciales \dot{B}_a en la demostración anterior, son segmentos de una curva c que une a P con un punto de \dot{B} y cuya longitud en la E_0 -métrica de Jacobi es igual a un número A , obviamente mayor que las longitudes L_0 de las curvas c_0 .

PROPOSICION 2. (TEOREMA 1) *Existe una geodésica para la E_0 -métrica de Jacobi que une a P con la E_0 -superficie equipotencial \dot{B} .*

Demostración. Cada geodésica w_a es solución de las ecuaciones de movimiento para las condiciones iniciales (P, h_a) donde h_a es el vector tangente a w_a en el punto P . Puesto que las geodésicas consideradas son parametrizadas por el arco longitud, el valor absoluto de los vectores h_a es igual a uno.

En vista de la compacidad de la bola unidad en el espacio tangente $T_P M$, podemos considerar una subsucesión convergente de los vectores tangentes h_a , que podemos suponer convergente a un vector h .

Sea w la geodésica maximal correspondiente a la condición inicial (P, h) . Mostraremos ahora que la longitud L de w es necesariamente finita. Si suponemos que L es mayor que la longitud A de la curva c , el segmento de w a partir de P , de longitud \dot{x} , deberá estar contenido en un dominio \bar{B}_{a_0} para algún a_0 mayor que cero. Como las longitudes de las geodésicas w_a son menores que A , tendremos en particular que las geodésicas w_a con a menor que a_0 deberán estar contenidas en \bar{B}_{a_0} , lo cual es imposible. Así, la longitud L de la geodésica maximal w es finita, y por lo tanto, por resultados de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, $\lim_{s \rightarrow L} w(s)$ existe, y tiene que pertenecer necesariamente a la frontera \dot{B} del disco potencial \bar{B} , con lo cual queda demostrada la Proposición 2.

PROPOSICION 3. *Las geodésicas de longitud finita para la E_0 -métrica de Jacobi, contenidas en B_a , son recorridas en un tiempo finito en el sistema mecánico.*

Demostración. Observemos primeramente, que las siguientes igualdades son correctas:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (E_0 - U)g_{ij}(q, \dot{q})\dot{q}^i\dot{q}^j = (E_0 - U)K.$$

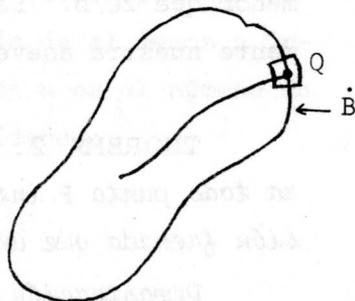
Como nuestras órbitas tienen energía total constante E_0 la energía cinética K es igual a $E_0 - U$, luego $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (E_0 - U)^2$. Si consideramos que s y t son parámetros que desarrollan las curvas en la misma dirección, podremos escribir $ds = (E_0 - U)dt$. Además, como las órbitas consideradas están contenidas en B_a se tiene que $E_0 - U > a$, de donde se desprende que $ds > a dt$. Integrando tenemos $s(t) - s(t_0) > a(t - t_0)$. Como el primer miembro de esta desigualdad es necesariamente acotado, ya que las geodésicas consideradas son de longitud finita, tenemos que los valores $(t - t_0)$ son acotados, lo que demuestra la Proposición 3.

NOTA. Para extender la Proposición 3 a la frontera \dot{B} del disco potencial \bar{B} , en el caso de Finsler, existen problemas técnicos bastante fuertes debido a que las funciones $g_{ij}(x, \dot{x})$ no están definidas para $\dot{x} = 0$. Sin embargo, para el caso de Riemann es posible enunciar la siguiente proposición.

PROPOSICION 4. *En el caso C^3 -Riemann toda geodésica finita para la E_0 -métrica de Jacobi, es recorrida en un tiempo finito en el sistema mecánico.*

Demostración. Debido a resultados elementales de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, sabemos que una geodésica maximal finita debe tener puntos límites extremos en la frontera \dot{B} . En

vista de la Proposición 3, basta observar que existen vecindades de estos puntos extremos donde un punto de energía total E_0 no puede permanecer demasiado tiempo en las vecindades consideradas sin salir de ellas.



Consideremos un punto Q perteneciente a \dot{B} , extremo de una geodésica maximal, y un sistema local de coordenadas en una vecindad de Q , z_1, \dots, z_{n-1}, z_n , donde tomamos $z_n = E_0 - U$. Si U_k es la derivada parcial de U con respecto a z_k , observamos que $U_k = 0$ para k diferente de n , y $U_n = -1$. Teniendo en cuenta estos valores, la n -ésima ecuación del movimiento queda en la forma

$$\ddot{z}^n + \Gamma_{ij}^n(z) \dot{z}^i \dot{z}^j - g^{nn}(z) = 0.$$

Nuestra vecindad puede ser considerada compacta y lo suficientemente pequeña para que en virtud del Lema 2 los valores absolutos de \dot{z} puedan considerarse lo suficientemente pequeños y la expresión

$$g^{nn}(z) - \Gamma_{ij}^n(z) \dot{z}^i \dot{z}^j$$

sea mayor que algún número b mayor que cero. Aquí hemos tenido en cuenta que la forma cuadrática (g^{ij}) es positivamente definida y por lo tanto $g^{nn}(z)$ es positiva en nuestra vecindad compacta. Así $\ddot{z}^n > b > 0$ y $|\dot{z}^n| < \epsilon$ en la vecindad considerada. Integrando \ddot{z}^n tenemos:

$$b(t_1 - t_0) < \int_{t_0}^{t_1} \ddot{z}^n dt = \dot{z}^n(t_1) - \dot{z}^n(t_0) < 2\epsilon,$$

lo que implica que el intervalo de tiempo $t_1 - t_0$, tiene que ser

menor que $2\epsilon/b$. Este hecho y la Proposición 3 implican trivialmente nuestra aseveración.

TEOREMA 2. *En el caso c^3 -Riemann podemos afirmar que para todo punto P interior al disco potencial \bar{B} existe una regresión frenada que une a P con la E_0 -superficie equipotencial \dot{B} .*

Demostración. Sea $w(s)$ nuestra geodésica finita a partir de P , y L la longitud de w . Sea $Q = \lim_{S \rightarrow L} w(s)$ perteneciente a \dot{B} . Según la Proposición 4 el movimiento \emptyset del sistema mecánico correspondiente a w es desarrollado en un tiempo finito t_0 . Podemos escoger nuestra parametrización en el intervalo $[-t_0, 0]$ tal que $\emptyset(-t_0) = P$ y $\emptyset(0) = Q$. Notemos que $\dot{\emptyset}(0) = 0$. Ahora bien, si tomamos $v(t) = \emptyset(-t)$, v definida en el intervalo $[0, t_0]$, observamos que v es también una solución tal que $v(0) = Q$ y $\dot{v}(0) = 0$. Notemos además que $v(t_0) = P$.

Teniendo en cuenta teoremas de unicidad y continuidad de soluciones para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias podemos considerar una solución h definida en el intervalo $[-t_0, t_0]$ tal que $h = \emptyset$ en $[-t_0, 0]$ y $h = v$ en $[0, t_0]$. Observemos que $h(-t_0) = P$, $h(t_0) = P$, $h(0) = Q$, el cual pertenece a \dot{B} , y $\dot{h}(0) = 0$; así, h es la regresión que satisface el enunciado del teorema.

Problemas abiertos. Algunas investigaciones que podrían continuar la línea de este trabajo podrían ser:

(a) Investigar si existen regresiones en espacios de Finsler, análogas a las encontradas en espacios de Riemann.

(b) Investigar sobre condiciones geométricas adicionales, como convexidad o simetría del potencial, que podrían implicar la periodicidad de las regresiones encontradas en el presente trabajo.

(c) Investigar por medio del cálculo de variaciones o teorías modernas de análisis global la existencia de al menos n órbitas frenadas a partir de cada punto P , donde n es el número de grados de libertad del sistema mecánico considerado.

*

BIBLIOGRAFIA

- [1] Abraham and Marsden, *Foundations of Mechanics*, W.A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts, 1967.
- [2] Arnold V., *Les Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, Editions Mir, Moscou.
- [3] Birhoff, G.D., *Dynamical Systems*, Colloq. Publ. IX, Second Ed., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.
- [4] Hermann, R., *Differential Geometry and the Calculus of Variations*, Academic Press, New York and London, 1968.
- [5] Ruiz O., *Existence of brake orbits in Finsler mechanical systems*, Lect. Notes in Math. 597, Geometry and Topology, pp. 542-567.
- [6] Rund, H., *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer Verlag.
- [7] Seifert, H., *Periodische Bewegungen Mecanischer System*, Math. Z., (1948) 197-216.
- [8] Spivak, M., *Differential Geometry I and II*, Publish or Perish, 1972.
- [9] Weinstein, A., *Periodic orbits for convex Hamiltonian Systems*, 1978, Para ser publicado.

**

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E. COLOMBIA.

(Recibido en noviembre de 1982)