Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XVII (1983), págs. 17 - 36

RELACIONES ENTRE LOS GRUPOS DE BRAUER DE ANILLOS CONMUTATIVOS Y CIERTOS ANILLOS COCIENTES

por

Paulina CASAL

ABSTRACT. Let S be a commutative R-algebra, R a commutative ring, then the application of R-algebras $A \mapsto A \otimes_R S$ induces a homomorphism $Br(R) \to Br(S)$ between the Brauer groups of R and S, respectively. It is known that the homomorphism $Br(R) \to Br(R/m)$ is an isomorphism when R is a complete local ring with maximal ideal m. This article shows that $Br(R) \to Br(R/I)$ is an isomorphism whenever I is a nil-ideal and also when I is contained in the Jacobson radical of R and R is complete in the I-adic topology.

Introducción. Sea A un álgebra sobre un anillo conmutativo R, S una R-álgebra conmutativa y sea Br(R) el grupo de Brauer de R. La aplicación $A \mapsto A \otimes_R S$ induce un homomorfismo de grupos $Br(R) \to Br(S)$. Es conocido que el homomorfismo

$Br(R) \to Br(R/m)$ es un isomorfismo si R es un anillo completo local y m el ideal maximal de R ([AG]). F. DeMeyer demostró que este homomorfismo es sobreyectivo para ciertos anillos locales. Por otro lado, no es inyectivo para $R = Z_{(p)}$, la localización de los números enteros en un primo impar ([OS] cap.5).

Aquí demostramos que el homomorfismo $Br(R) \to Br(R/I)$ es un isomorfismo si I es un ideal nilpotente. Este resultado se generaliza: es un isomorfismo si I es un nilideal. Finalmente, también obtenemos que $Br(R) \to Br(R/I)$ es un isomorfismo si I es un ideal contenido en el radical de Jacobson de R y R es I-adicalmente completo.

Preliminares. Se designará siempre por N el conjunto de los números naturales, por R un anillo unitario conmutativo, por I un ideal fijo en R, por $\bar{R}$ el anillo cociente R/I y por $\otimes$ el producto tensorial $\otimes_R$. Para cada R-módulo M, $\bar{M}$ designará el módulo cociente M/IM. Radical querrá decir *radical de Jacobson* o sea la intersección de todos los ideales maximales de un anillo.

Los resultados siguientes sobre módulos son bien conocidos o son consecuencias fáciles de las definiciones (ver por ejemplo [Bo], [Ba] o [OS]).

1. Sea P un R-módulo. Entonces los $\bar{R}$-módulos $\bar{P} = P/IP$ y $\bar{R}\otimes P$ son isomorfos.

2. Sean P y Q dos R-módulos, Φ y Ψ las proyecciones canónicas de P a $\bar{P}$ y de Q a $\bar{Q}$, y sea $f:P \to Q$ un homomorfismo de R-módulos. Si se define $\bar{f} = 1_{\bar{R}}\otimes f$, se tiene $\bar{f}\cdot\Phi = \Psi\cdot f$.

3. Un R-módulo P es finitamente generado proyectivo si y sólo si existen un R-módulo Q y un número natural n tales que $P\oplus Q \cong R^n$. Consecuencia: si P es un R-módulo finitamente generado proyectivo, $\bar{P}$ es un $\bar{R}$-módulo finitamente generado proyectivo.

4. Sean P y Q dos R-módulos finitamente generados proyectivos, I un ideal contenido en el radical de R y sea $g:\bar{P} \to \bar{Q}$ un homomorfismo de $\bar{R}$-módulos. Entonces:

a- existe un homomorfismo de R-módulos $f:P \to Q$ tal que $\bar{f} = g$;

b- si f_1 y f_2 son dos homomorfismos de P en Q con $\bar{f}_1 = \bar{f}_2 = g$; entonces la imagen de una clase residual mod IP por f_1 y f_2 es la misma clase residual mod IQ;

c- si $\bar{f}$ es sobreyectivo, f también es sobreyectivo;

d- si $\bar{f}$ es inyectivo y $\bar{P}$ es isomorfo a un factor directo de $\bar{Q}$, entonces f es inyectivo.

De (c) y (d) se concluye que f es un isomorfismo si $\bar{f}$ es un isomorfismo.

5. Sea Q un $\bar{R}$-módulo finitamente generado proyectivo, I un ideal nilpotente. Entonces existe un R-módulo finitamente generado proyectivo P tal que $\bar{P} = Q$. Si además Q es fiel, es decir si $rq = 0$ para cada $q \in Q$ con $r \in R$ implica $r = 0$, P es fiel.

6. Si P es un R-módulo finitamente generado proyectivo, el R-módulo $End_R(P)$ de todos los endomorfismos de P también es finitamente generado proyectivo. Además $\overline{End_R(P)} \cong End_{\bar{R}}(\bar{P})$.

1. Algebras central separables o Algebras de Azumaya.

Todas las álgebras que se consideran son asociativas. Sea A un R-álgebra asociativa unitaria, '•' la multiplicación de A. Por A^o se designa el *álgebra opuesta* de A, es decir el álgebra que se obtiene si sobre el conjunto A se da la adición de A y la multiplicación '*' se define por $a*b = b\bullet a$. Por A^e se designa el producto tensorial $A^e = A \otimes A^o$. Cada R-álgebra asociativa A es un A^e-módulo si se define $(x\otimes y)a = x\cdot a\cdot y$ para todo $a,x,y \in A$. El núcleo del homomorfismo de A^e-módulos $p:A^e \to A$ dado por $p(a\otimes b) = a\cdot b$ se denota por $J(A)$. Las siguientes definiciones se encuentran en [KO].

DEFINICION 1.1. Una R-álgebra A se llama *separable sobre* R, si A es proyectivo como A^e-módulo.

El *centro* de un álgebra asociativa es el conjunto $C(A) = \{x \in A | x\cdot a = a\cdot x \ \forall x \in A\}$.

DEFINICION 1.2. Una R-álgebra A se llama *central separable* o *álgebra de Azumaya* si satisface las condiciones siguientes.

(**1**) A es fiel, es decir, para $r \in R$, $ra = 0$ para cada $a \in A$ implica $r = 0$.

(**2**) A es separable sobre R.

(**3**) $C(A) = R$.

PROPIEDADES (Ver por ejemplo [KO] y [OS]).

1. *El álgebra* A *es separable sobre* R *si y sólo si existe un elemento* e *en* A^e *que cumple las condiciones* $p(e) = 1$ *y* $(1\otimes a^o)e = (a\otimes 1^o)e$ *para cada elemento* a *de* A. *El elemento* e *es idempotente*, ya que $e^2-e = ((e-1)\otimes 1)e$, y $p((e-1)\otimes 1) = p(e)-1 = 0$, es decir $(e^2-e) \in J(A)e$, y $J(A)e = 0$ (si $a\cdot b = 0$, $(a\otimes b^o)e = (a\otimes 1^o)(1\otimes b^o)e = (a\otimes 1^o)(b\otimes 1^o)e = (ab\otimes 1^o)e = 0$).

2. *Si* A *es separable sobre* R, *el centro de* A *es* eA. Pues $(ea)b = (1\otimes b^o)ea = (b\otimes 1^o)ea = b(ea)$ para todo $a,b \in A$; y si $x \in C(A)$, $e = \sum_i c_i\otimes d_i$, entonces $ex = \sum_i c_i x d_i = \sum_i c_i d_i x = p(e)x = x$.

3. *Sea* A *un álgebra central separable sobre* R. *Entonces* A *es*

un R-*módulo finitamente generado proyectivo y* $A = R\oplus B$, *para algún* R-*módulo* B.

4. *Si* A *es un álgebra central separable sobre* R *y* S *es una* R-*álgebra conmutativa, entonces* $S\otimes A$ *es central separable sobre* S.

2. Grupos de Cohomología de álgebras central separables.

Un *complejo positivo* es una familia de R-módulos C_n, $n \in \mathbb{N}$, junto con una familia de R-homomorfismos $d_n : C_n \to C_{n-1}$ con la propiedad de que $d_{n-1} \cdot d_n = 0$. El n-*ésimo grupo de homología* se define por $H_n(C) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$. El complejo C se llama *acíclico*, si $H_n(C) = 0$ para cada $n \geqslant 0$ y *proyectivo* si C_n es proyectivo para cada $n \geqslant 0$. Una *resolución proyectiva* de un R-módulo A es un complejo proyectivo y acíclico P con $H_o(P) \cong A$.

Sea M un R-bimódulo, P una resolución proyectiva del R-módulo A

$$P: \ldots \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_1 \to P_o \to 0 .$$

A partir del complejo dual

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(P_o, M) \overset{\partial^0}{\to} \operatorname{Hom}_R(P_1, M) \overset{\partial^1}{\to} \ldots .$$

se define el n-*ésimo grupo de cohomología:*

$$H^n(A,M) = H^n(P,M) = \operatorname{Ker}\partial^n / \operatorname{im}\partial^{n-1} .$$

Se demuestra que los grupos de cohomología son independientes de la resolución P de A.

En lo que sigue se utilizarán dos resoluciones de un álgebre central separable A, el *complejo estandar* S(A) y el *comple-*

jo estandar normalizado N(A).

<u>*El complejo estandar*</u> S(A). Sea A un R-álgebra y sea $S_{-1}(A) = A$, $S_n(A) = A \otimes S_{n-1}(A)$ para $n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, es decir $S_n(A)$ es el producto tensorial de A sobre R de orden n+2. Sea $\hat{S}_n(A)$ el producto tensorial de orden n de A, o sea

$$S_n(a) = A^e \otimes \hat{S}_n(A).$$

Sobre $S_n(A)$ se define una estructura de A-bimódulo y un R-homomorfismo $s_n : S_n(A) \to S_{n+1}(A)$ por $s_n(a) = 1 \otimes a$. Recursivamente definimos para $n \geqslant 0$ los A-homomorfismos por la izquierda $d_n : S_n(A) \to S_{n-1}(A)$ por

$$(1)\ d_o(a \otimes b) = ab \text{ en } A,$$
$$(2)\ d_{n+1} s_n x + s_{n-1} d_n x = x, \quad \text{para } x \in S_n(A), \quad n \geqslant 0.$$

Los d_n también son A-homomorfismos por la derecha. Se verifica que $d_n \cdot d_{n+1} = 0$ y con (2) se concluye que el complejo es acíclico. Si A es un R-módulo proyectivo, S(A) es una resolución A^e-proyectiva de A.

Para los grupos de cohomología se utiliza el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_R(\hat{S}_n(A), M) \cong \mathrm{Hom}_{A^e}(S_n(A), M).$$

Los elementos del primer grupo son funciones R-lineares de n variables de A en M. Se tiene:

$$(\partial f)(a_1, \ldots, a_{n+1}) = a_1 f(a_2, \ldots, a_{n+1}) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (-1)^i f(a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(a_1, \ldots, a_n) a_{n+1}.$$

<u>*El complejo estandar normalizado*</u> N(A). Sea A una R-álge-

bra, $C = \mathrm{coker}(R \to A)$, $\hat{N}_o(A) = R$, $\hat{N}_n(A) = C \otimes \hat{N}_{n-1}(A)$ para $n > 0$ y $N_n(A) = A \otimes \hat{N}_n(A) \otimes A$. Se definen estructuras de A^e-módulos por

$$(b \otimes d)(a_1 \otimes c \ldots \otimes a_2) = (ba_1) \otimes c \otimes \ldots \otimes (a_2 d) ,$$

y R-homomorfismos $s_n : N_n(A) \to N_{n+1}(A)$ por $s_n(x) = 1 \otimes q(x)$, donde $q(x)$ es la imagen de x en $\hat{N}_{n+1}(A) \otimes A$. Recursivamente se definen como A-homomorfismos por la izquierda

$$d_o(a \otimes b) = ab, \quad d_{n+1} s_n x + s_{n-1} d_n x = q(x).$$

Los d_n también son A-homomorfismos por la derecha.

Por inducción se demuestra que el complejo $N(A)$ es acíclico

$n = 0$: $(ac)b = a(cb)$ en A,

$n > 0$: $d_n d_{n+1} s_n = d_n q - d_n s_{n-1} d_n = (q - d_n s_{n-1}) d_n = s_{n-2} d_{n-1} d_n$,

la última expresión es cero por hipótesis y la imagen de s_n genera N_{n+1} como módulo por la izquierda, luego $d_n d_{n+1} = 0$.

Falta demostrar que $\ker d_n \subset \mathrm{im}\, d_{n+1}$.

$n = 0$: $\mathrm{im}\, d_1$ es el A^e-módulo generado por todos los elementos $a \otimes 1 - 1 \otimes a$, $a \in A$, que es $J(A) = \ker d_o$.

$n > 0$: sea $x \in \ker d_n$, entonces $d_{n+1}(1 \otimes q(x)) = q(x) \in \mathrm{im}\, d_{n+1}$ y $\mathrm{im}\, d_{n+1} \subset \ker d_n$. Ahora $x = \sum_i (a_i \otimes u_i \otimes v_i \otimes \ldots \otimes b_i)$ con $a_i, b_i \in A$, $u_i, v_i \in C$ y con $a_i = r_i + c_i$, entonces $x = \sum_i (r_i \otimes u_i \otimes \ldots \otimes b_i) + q(x) = 1 \otimes y + q(x)$ con $y \in \hat{N}_n \otimes A$. $x \in \ker d_n$ y $q(x) \in \ker d_n$ implica $1 \otimes y \in \ker d_n$ y $d_n(1 \otimes q(y)) = d_n(1 \otimes y) = y - 1 \otimes q(d_{n-1}(y)) = 0$.

Como $1 \otimes q(d_{n-1}(y)) \notin \hat{N}_n(A) \otimes A$, se tiene $y = 0$ y $x = q(x) \in \mathrm{im}\, d_{n+1}$.

Si C es un R-módulo proyectivo, entonces $N(A)$ es una resolución A^e-proyectiva de A (para más detalles ver [CE]).

Por medio del complejo estandar se computan fácilmente los grupos H^o y H^1 de un álgebra central separable. Si A es un álgebra central separable, entonces es proyectiva como R-módulo y S(A) es una resolución A^e-proyectiva de A. El complejo dual es

$$0 \to \mathrm{Hom}_{A^e}(A\otimes A,M) \to \mathrm{Hom}_{A^e}(A\otimes A\otimes A,M) \to \ldots$$

y por los isomorfismo $\mathrm{Hom}_{A^e}(S_n(A),M) \to \mathrm{Hom}_R(\hat{S}_n(A),M)$ se pasa al complejo

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(R,M) \xrightarrow{\partial_0} \mathrm{Hom}_R(A,M) \xrightarrow{\partial_1} \mathrm{Hom}_R(A\otimes A,M) \to \ldots$$

Un elemento f de $\mathrm{Hom}_R(R,M)$ está determinado por $f(1) = m$; $(\partial^o f)(a) = am-ma$. Obtenemos $H^o(A,M) \cong \ker\partial^o = M^A$, donde $M^A = \{m \in M | am = ma \ \forall a \in A\}$.

Como $(\partial^1 f)(a,b) = af(b)-f(ab)+f(a)b$,

$$\ker\partial^1 = \{f \in \mathrm{Hom}_R(A,M) \mid f(ab) = af(b)+f(a)b\} = \mathrm{Der}_R(A,M)$$

$$\mathrm{im}\partial^0 = \{f \in \mathrm{Hom}_R(A,M) \mid f(a) = am-ma\} = \mathrm{Derint}_R(A,M)$$

$$H^1(A,M) \cong \mathrm{Der}_R(A,M)/\mathrm{Derint}_R(A,M).$$

Para un álgebra central separable A existe sin embargo otra resolución más sencilla.

$$0 \to 0 \to \ldots \to J(A) \to A^e \to 0 .$$

El complejo dual es

$$0 \to \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e,M) \to \mathrm{Hom}_{A^e}(J(A),M) \to 0 \to 0 \ldots$$

y

$$H^o(A,M) = \ker(\mathrm{Hom}_{A^e}(A^e,M) \to \mathrm{Hom}_{A^e}(J(A),M)).$$

Pero $f \in \mathrm{Hom}_{A^e}(J(A),M)$ es cero si y sólo si es cero para todos los elementos de la forma $b\otimes 1^{o}-1\otimes b^{o}$ y f está determinado por $f(1\otimes 1^{o}) = m$; $f = 0$ quiere entonces decir $bm = mb$ para cada b en A, y esto es equivalente a $m \in M^{A}$: $H^{o}(A,M) \cong M^{A}$. Evidentemente $H^{k}(A,M) = 0$ para $k > 0$.

3. El homomorfismo entre los grupos de Brauer Br(R) y Br(R/I).

Dos R-álgebras central separables se llaman *similares*, $A_1 \sim A_2$, si existen dos R-módulos fielmente proyectivos P_1, P_2 tales que

$$A_1 \otimes \mathrm{End}_R(P_1) \cong A_2 \otimes \mathrm{End}_R(P_2).$$

La relación $\sim$ es una relación de equivalencia entre álgebras central separables sobre un anillo R.

El producto tensorial de dos álgebras central separables sobre R es otra álgebra central separable sobre R. Este producto define una multiplicación sobre el conjunto de las clases de equivalencia de álgebras central separables sobre R. Se obtiene hasta un grupo conmutativo: la clase de R es el elemento neutro y la clase de A^{o} es el elemento inverso de la clase de A. Este grupo se llama *grupo de Brauer* y se designa por Br(R).

Si A es un álgebra central separable sobre R y S es una R-álgebra conmutativa, entonces $A\otimes S$ es un álgebra central separable sobre S, es decir, la aplicación $A \mapsto A\otimes S$ induce un homomorfismo de los grupos $\mathrm{Br}(R) \to \mathrm{Br}(S)$.

TEOREMA 3.1. *Si* I *es un ideal nilpotente del anillo* R, *el homomorfismo* $\mathrm{Br}(R) \to \mathrm{Br}(R/I)$ *es un isomorfismo.*

Demostración. Primero suponemos que $I^2 = 0$, y demostramos que el homomorfismo es sobreyectivo.

a) *Existencia de un álgebra* A *con* $\bar{A} = B$ *para* $B \in Br(R/I)$.
Sea B central separable sobre $\bar{R}$. Entonces B es un $\bar{R}$-módulo finitamente generado proyectivo, y como I es nilpotente, por la propiedad (5) de módulos existe un R-módulo finitamente generado proyectivo A tal que $(R/I)\otimes A \simeq \bar{A} \simeq B$. $\bar{A}\otimes_{\bar{R}}\bar{A}$ también es proyectivo sobre $\bar{R}$ (propiedad (7)) y es isomorfo a $\overline{A\otimes A}$:

$$\bar{A}\otimes_{\bar{R}}\bar{A} \cong \bar{A}\otimes_{R}\bar{A} \cong ((R/I)\otimes A)\otimes((R/I)\otimes A) \cong (R/I)\otimes(A\otimes A) \cong \overline{A\otimes A}.$$

Sea m' la multiplicación en $\bar{A}$, $m':\bar{A}\otimes\bar{A} \to \bar{A}$ es un $\bar{R}$-homomorfismo sobreyectivo. Por la propiedad (4) de módulos existe un R-homomorfismo sobreyectivo $m:A\otimes A \to A$ con $\bar{m} = m'$. Pero m en general no cumple la ley asociativa. Hacemos la modificación siguiente: sea $f(a,b,c) = m(a,m(b,c))-m(m(a,b),c)$; $f:A\otimes A\otimes A \to IA$ ya que f es cero mod I. Como $f(I(\bar{A}\otimes\bar{A}\otimes\bar{A})) \subset I^2A = 0$ y como $\overline{A\otimes A\otimes A}$ es isomorfo a $\bar{A}\otimes\bar{A}\otimes\bar{A}$, es posible considerar f como aplicación de $\bar{A}\otimes\bar{A}\otimes\bar{A}$ en IA.

El álgebra $\bar{A}$ es central separable y por lo tanto $S(\bar{A})$ es una resolución proyectiva de $\bar{A}$. Si demostramos que IA es un $\bar{A}$-bimódulo podemos utilizar el hecho de que $H^3(\bar{A},IA) = 0$. Para $x \in IA$, $\bar{a} \in \bar{A}$ definimos $\bar{a}x = m(a,x)$ y $x\bar{a} = m(x,a)$. Ahora $I^2A = 0$ y ésto está bien definido. Hay que demostrar que $(x\bar{a})\bar{b} = x(\bar{a}\cdot\bar{b})$ o sea $m(m(x,a),b) = m(x,m(a,b))$ y lo análogo por la izquierda. Para $x \in IA$, $m(m(x,a),b) \in IA$ y $m(x,m(a,b)) \in IA$ y por lo tanto $d = m(m(x,a),b)-m(x,m(a,b)) \in IA$. La multiplicación $m' = \bar{m}$ es asociativa, luego $d = 0 (\mathrm{mod}\ I)$ y d es un elemento de $I^2A = 0$. Un cómputo análogo muestra que IA es un $\bar{A}$-módulo por la izquierda.

Ahora

$$\begin{aligned}(\partial f)(a,b,c,d) &= af(b,c,d)-f(ab,c,d)+f(a,bc,d)-f(a,b,cd)+f(a,b,c)d \\ &= a(b(cd))-a((bc)d)-(ab)(cd)+((ab)c)d+(a(bc))d +\end{aligned}$$

$$+ a((bc)d)+(ab)(cd)+a(b(cd))+(a(bc))d-((ab)c)d$$

$$= 0, \quad \text{donde} \quad ab = m(a,b),$$

y $H^3(\bar{A},IA) = 0$ implica $f = \partial g$ para un $g:\bar{A}\otimes\bar{A} \to IA$. Poniendo $g(x) = 0$ para $x \in I(A\otimes A)$, g se extiende a $A\otimes A$. El homomorfismo m-g es la multiplicación requerida en A. Es claro que $\overline{m-g} = m'$, y m-g es asociativo por lo siguiente:

$$(m-g)(a,(m-g)(b,c))-(m-g)((m-g)(a,b),c)$$

$$= m(a,m(b,c))-m(a,g(b,c))-g(a,m(b,c))+g(a,g(b,c))$$

$$- m(m(a,b),c)+m(g(a,b),c)+g(m(a,b),c)-g(g(a,b),c) = 0 \ ,$$

ya que

$$m(a,m(b,c))-m(m(a,b),c)) = f(a,b,c) = \partial g(a,b,c)$$

$$= m(a,g(b,c))-g(m(a,b),c)$$

$$+ g(a,m(b,c))-m(g(a,b),c)$$

y

$$g(a,g(b,c)) = g(g(a,b),c) \in I^2A = 0.$$

Para demostrar que en A existe un elemento neutro para la multiplicación hay que utilizar el complejo estandar normalizado. $\bar{A}$ central separable implica $\bar{A} = \bar{R}\oplus\bar{C}$. El $\bar{R}$-módulo $\bar{C}$ es proyectivo. Por las propiedades (4) y (5) de módulos y por 5.4 y 5.6 de [OS] existe un R-módulo C y un elemento e de A con $e^2 = e$ y $\bar{e} = 1$ en $\bar{A}$ tales que $A = Re\oplus C$. Definimos $m:A\otimes A \to A$ por

$$m(re+a,se+b) = rse+rb+sa+m''(a,b), \quad \text{con } \bar{m}'' = m'.$$

Entonces $\bar{m} = m'$ (la multiplicación de $\bar{A}$) y con $x = re+a$:

$$m(e,x) = m(e+0,re+a) = re+a+0 = x$$

$$m(x,e) = m(re+a,e+0) = x, \quad \text{para cada } x \in A.$$

Sea otra vez $f(a,b,c) = m(a,m(b,c))-m(m(a,b),c)$. Si a, b ó c es igual a e, entonces $f(a,b,c) = 0$, luego $f(a,b,c) = f(u,v,w)$ si $a = re+u$, $b = se+v$, $c = te+w$, $u,v,w \in C$. Consideramos f como aplicación de $C\otimes C\otimes C$ en IA y puesto que $f(I(C\otimes C\otimes C)) \subset I^2A = 0$, como aplicación de $\bar{C}\otimes\bar{C}\otimes\bar{C}$ en IA. Utilizando que $N(\bar{A})$ es una resolución proyectiva de $\bar{A}$, que $H^3(\bar{A},IA) = 0$ y que $Hom_{\bar{A}}e(N_n(\bar{A}),IA) = Hom_{\bar{R}}(\hat{N}_n(\bar{A}),IA)$ se concluye como antes que $f = \partial g'$, $g':\bar{C}\otimes\bar{C} \to IA$. g' se extiende a $C\otimes C$ y $g:A\otimes A \to A$ se define por $g(a,b) = g'(u,v)$ con u y v como antes.

También se tiene $f = \partial g$. Con $a = re+u$, $b = se+v$, $c = te+w$, observando que $g(a,b) = 0$ si $u = 0$ ó $v = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}
g(a,b,c) &= m((re+u),g(v,w))-g(rv+su+m(u,v),w) \\
&\quad + g(u,sw+tv+m(v,w))-m(g(u,v),te+w) \\
&= g(rv,w)+m(u,g(v,w))-g(rv+su+m(u,v),w) \\
&\quad + g(u,sw+tv+m(v,w))-m(g(u,v),w)-g(u,tv) \\
&= \partial g'(u,v,w) = f(u,v,w) = f(a,b,c).
\end{aligned}$$

Ahora $g(e,a) = g(a,e) = 0$ para cada $a \in A$ implica $(m-g)(e,a) = (m-g)(a,e) = a$ para cada $a \in A$.

b) <u>*La multiplicación en A es determinada por la multiplicación en $\bar{A}$*</u>. Sean m_1 y m_2 dos multiplicaciones en A con $\bar{m}_1 = \bar{m}_2 = m'$, y sean A_1 y A_2 las álgebras correspondientes. Consideramos $m_1-m_2:A_1\otimes A_1 \to A_2$ y como antes $m_1-m_2:\bar{A}_1\otimes\bar{A}_1 \to IA_2$. Ahora

$$\begin{aligned}
\partial(m_1-m_2)(a,b,c) &= m_1(a,b,c) - m_2(a,b,c) \\
&= m_2(a,m_1(b,c))-m_1(m_1(a,b),c) \\
&\quad + m_1(a,m_1(b,c))-m_2(m_1(a,b),c)
\end{aligned}$$

$$- m_2(a,m_2(b,c))+m_2(m_1(a,b),c)$$

$$- m_2(a,m_1(b,c))+m_2(m_2(a,b),c)$$

$$= 0 \ ,$$

luego $(m_1-m_2)(a,b) = \partial h(a,b)$ con $h:\bar{A}_1 \to IA_2$. Extendemos h a A_1 y definimos $k:A_1 \to A_2$ por $k = 1+h$.

k *es un isomorfismo de* R-*álgebras*: $h^2(A_1) \subset I^2A_2 = 0$ implica que $1-h$ es el inverso de k. Falta demostrar que $k(a\bullet b) = k(a)*k(b)$ con $a\bullet b = m_1(a,b)$ y $a*b = m_2(a,b)$:

$$k(a\bullet b) = a\bullet b + h(a\bullet b)$$

$$\partial h(a,b) = a*h(b) - h(a\bullet b) + h(a)*b \ ,$$

y por otro lado

$$\partial h(a,b) = a\bullet b - a*b \ ,$$

luego

$$\begin{aligned} k(a)*k(b) &= a*b + a*h(b) + h(a)*b + h(a)*h(b) \\ &= a*b + h(a\bullet b) + \partial h(a,b) \\ &= a*b + h(a\bullet b) + a\bullet b - a*b = k(a\bullet b). \end{aligned}$$

c) *Si $\bar{A}$ es separable sobre $\bar{R}$, entonces* A *es separable sobre* R. Es suficiente demostrar que existe un elemento $e \in A^e$ con $p(e) = 1$ y $J(A)e = 0$. Sea $\bar{e}$ el elemento análogo de $\bar{A}$, idempotente. $I^2 = 0$ implica que existe un elemento idempotente e' de A^e con $\bar{e}' = \bar{e}$. $p(\bar{e}) = 1$ en $\bar{A}$, luego $p(e') \in 1+IA^e$ y $p(e')$ es unidad porque $(IA^e)^2 = I^2A^e = 0$. Si definimos

$$e = (p(e')^{-1}\otimes 1)e'(p(e')\otimes 1)$$

tenemos el elemento buscado.

d) *Si $\bar{A}$ es central separable, A es central separable*. Sea $e \in A^e$ como en (c), C(A) el centro de A. Como A es separable, $C(A) = eA$. Por hipótesis $C(\bar{A}) = \bar{R}$ y por otro lado $C(\bar{A}) = \overline{C(A)}$. Ahora, $C(A) = eA \subset R+IA$ y

$$e\cdot eA = eA \subset eR+eIA = R+IeA \subset R+IR+I^2A = R+I = R,$$

y evidentemente $R \subset C(A)$, es decir $C(A) = R$. El R-módulo A es fiel por la propiedad (5) de módulos.

Con esto hemos demostrado que el homomorfismo $Br(R) \to Br(R/I)$ es sobreyectivo si $I^2 = 0$. Sea ahora I nilpotente, $I^k = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$, $R/I^{n-1} \cong (R/I^n)/(I^{n-1}/I^n)$ y $(I^{n-1}/I^n)^2 = 0$. Sea A_1 una R/I-álgebra central separable. Existe entonces un álgebra A_2 central separable sobre R/I^2, tal que

$$(R/I)\otimes_{R/I^2}A_2 \cong A_1,$$

una R/I^3-álgebra central separable A_3 tal que

$$(R/I^2\otimes_{R/I^3}A_3 \simeq A_2 \text{ y } (R/I)\otimes_{R/I^2}(R/I^2)\otimes_{R/I^3}A_3 \simeq A_1,$$

etc. Al fin, existe un álgebra A_k central separable sobre $R/I^k = R$ tal que

$$(R/I)\otimes_{R/I^2}(R/I^2)\otimes\ldots\ldots\otimes(R/I^{k-1})\otimes_{R/I^k}A_k \simeq (R/I)\otimes A_k \simeq A_1.$$

Finalmente, el homomorfismo $Br(R) \to Br(R/I)$ es inyectivo si I es nilpotente. El elemento neutro de Br(R/I) es la clase de $End_{\bar{R}}(P)$, P un $\bar{R}$-módulo finitamente generado proyectivo y fiel. Sea $\bar{A} = End_{\bar{R}}(P)$, existe un R-módulo finitamente generado proyectivo y fiel Q tal que $\bar{Q} = P$. $End_{\bar{R}}(P)$ y $End_R(Q)$ son proyectivos y $\bar{A} = \overline{End_R(Q)}$, ésto implica que los R-módulos A y $End_R(Q)$ son isomorfos y la clase de A es el elemento neutro de Br(R).

TEOREMA 3.2. *Sea* I *un nilideal en* R. *El homomorfismo* $Br(R) \to Br(R/I)$ *es un isomorfismo.*

Demostración. El anillo R/I se denotará ahora por S. Sea B un álgebra central separable sobre S, $B = S \oplus C$. Primero demostramos que existe una R-álgebra A tal que $S \otimes A \cong B$. El S-módulo C es finitamente generado proyectivo y por lo tanto imagen de un endomorfismo idempotente $q: S^m \to S^m$ para un cierto $m \in N$. Sea (a_{ij}) la matriz de q respecto a la base canónica de S^m y sea S_1 el subanillo de S generado por los elementos a_{ij}, es decir $S_1 = S_o(a_{ij})$, donde S_o es el anillo primo de S. La restricción de q a S_1^m es un S_1-endomorfismo idempotente $q_1: S_1^m \to S_1^m$ y su imagen $C_1 = \operatorname{im} q_1$ es un S_1-módulo finitamente generado proyectivo con $C \cong S \otimes_{S_1} C_1$.

Sea $B_1 = S_1 \oplus C_1$. Entonces

$$S \otimes_{S_1} B_1 \cong S \oplus C = B.$$

B_1 es la imagen de $q_1': S_1^{m+1} \to S_1^{m+1}$ cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (a_{ij}) \end{pmatrix}$$

y B_1 es generado por $q_1'(e_1), \ldots, q_1'(e_{m+1})$. La multiplicación en B_1 es dada por

$$q(e_i)q(e_j) = \sum_{k=1}^{m+1} b_{ijk} q(e_k).$$

Por S_2 designamos el anillo generado por S_1 y todos los elementos b_{ijk} en S. $B_2 = S_2 \otimes_{S_1} B_1$ en una S_2-álgebra que es subálgebra de B y $B_2 \cong S_2 \oplus C_2$ con $C_2 = S_2 \otimes_{S_1} C_1$. Además

$$S \otimes_{S_2} B_2 \cong S \otimes_{S_2} S_2 \otimes_{S_1} B_1 \cong S \otimes_{S_1} B_1 \cong B.$$

Sean c_{ij} y d_{ijk} elementos de R cuyas proyecciones en S son los elementos a_{ij} y b_{ijk} y sea R_2 el subanillo generado por los elementos c_{ij} y d_{ijk} en R. Entonces $S_2 = R_2/I_2$ con $I_2 = R_2 \cap I$. El anillo R_2 es noetheriano, I es nilideal y por lo tanto el ideal I_2 es nilpotente. Por el Teorema 3.1 existe un R_2-álgebra A_2 tal que

$$(R_2/I_2)\otimes_{R_2} A_2 = B_2.$$

Sea $A = R\otimes_{R_2} A_2$. Entonces

$$A/IA \cong (R/I)\otimes_R R\otimes_{R_2} A_2 \cong (R/I)\otimes_{R_2} A_2.$$

Por otro lado

$$B \simeq S\otimes_{S_2} B_2 \cong (R/I)\otimes_{R_2/I_2}(R_2/I_2)\otimes_{R_2} A_2 \cong (R/I)\otimes_{R_2} A_2, \text{ y } A/IA \cong B.$$

Como en el Teorema 3.1, se demuestra que A es separable.

El centro de B_2 es S_2 y por lo tanto R_2 es el centro de A_2 y

$$C(A) = C(R\otimes_{R_2} A_2) = R\otimes_{R_2} C(A_2) = R.$$

De la misma manera que en el Teorema 3.1 se sigue que el homomorfismo $Br(R) \to Br(R/I)$ es inyectivo.

Para demostrar el último teorema necesitamos los lemas siguientes.

LEMA 3.3. *Sea* R *un anillo conmutativo* I*-adicalmente completo y sea* A *una* R*-álgebra finitamente generada como* R*-módulo. Entonces* A *es* $\mathfrak{a}$*-adicalmente completa con* $\mathfrak{a} = IA$.

LEMA 3.4. *Sea* A *un* R*-álgebra* $\mathfrak{a}$*-adicalmente completa y sea* $\bar{A} = A/\mathfrak{a}$*. Si* f *es un elemento idempotente de* $\bar{A}$*, entonces existe un elemento idempotente* e *de* A *tal que* $\bar{e} = f$.

Las demostraciones se encuentran en [OS] cap.5, definiciones y más información sobre álgebras $\mathfrak{A}$-adicalmente completas en [Bo].

TEOREMA 3.5. *Sea* I *un ideal contenido en el radical del anillo conmutativo* R *y sea* R I-*adicalmente completo. Entonces el homomorfismo* Br(B) $\rightarrow$ Br(R/I) *es un isomorfismo.*

<u>*Demostración*</u>. Por el Teorema 3.1, el isomorfismo $R/I^{n-1} \cong (R/I^n)/(I^{n-1}/I^n)$ y puesto que $(I^{n-1}/I^n)^2 = 0$, tenemos $Br(R/I^n) \cong Br(R/I)$ para cada $n \in N$ con $n > 1$.

a) *Sea* A_1 *un álgebra central separable sobre* R/I. *Existe un* R-*álgebra* A *tal que* $A/IA \cong A_1$. Para cada $n > 1$ existe una R/I^n-álgebra A_n tal que

$$A_n/(I^{n-1}/I^n)A_n \cong A_{n-1}.$$

Sea p_{mn} la proyección de A_m a A_n, $m \geqslant n$. Tenemos $p_{rs} = p_{ts}p_{rt}$ para $r \geqslant t \geqslant s$. Formamos el límite inverso $A = \varprojlim A_i$. R es completo y por lo tanto A es una R-álgebra, finitamente generada como R-módulo. La aplicación canónica $f: A \rightarrow A_1$ es sobreyectiva, es un homomorfismo de anillos y un dimorfismo, es decir $f(ra) = \bar{r}f(a)$ para $a \in A$, $r \in R$.

Si sobre A_1 definimos una estructura de R-módulo por $ra = \bar{r}a$ para $a \in A$, $r \in R$, entonces f es un homomorfismo de R-álgebras. Ahora

$$\mathrm{Ker}\, f = \varprojlim \ker(A_n \rightarrow A_1) = \varprojlim (I/I^n)A_n = (\varprojlim I/I^n)A = IA$$

luego $A/IA \cong A_1$.

b) A *es separable sobre* R. Por el Lema 3.3 el álgebra A^e es IA^e-adicalmente completa. En A_1^e existe un elemento f con

$\bar{p}(f) = 1$ y $(1\otimes a)f = (a\otimes 1)f$ para cada elemento $a \in A_1$. Ahora

$$A_1^e = (A/IA)^e = A^e/IA^e$$

y por el Lema 3.4 existe un elemento idempotente e de A^e tal que $\bar{e} = f$. $p(e) = 1+ia$ con $i \in I$, $a \in A$, pues A es IA-adicalmente completa y $1 = (1+ia)(1-ia-i^2a^2-\ldots)$, y $(1-ia-i^2a^2\ldots)$ es un elemento de A. Luego p(e) es una unidad. Lo que queda se demuestra exactamente como en el caso I nilpotente.

c) *El centro de* A *es* R. Esto es consecuencia inmediata de la definición del límite inverso.

d) *El homomorfismo* $Br(R) \to Br(R/I)$ *es inyectivo*. Sólo hay que demostrar que si P es un R/I-módulo finitamente generado proyectivo, entonces existe un R-módulo Q, finitamente generado proyectivo, tal que $\bar{Q} \cong P$. El resto se demuestra como antes.

Sea entonces P un R-módulo finitamente generado proyectivo y sea $M_n(R)$ el álgebra de todas las matrices n×n. P = im p para un elemento idempotente de $M_n(R/I)$; $M_n(R)$ es finitamente generado como R-módulo y por el Lema 3.3, $IM_n(R)$ es $M_n(I)$-adicalmente completo. Por el isomorfismo $M_n(R/I) = M_n(R)/M_n(I)$ y por el Lema 3.4 existe un elemento idempotente q de $M_n(R)$ tal que $\bar{q} = p$. El R-módulo Q = im q es finitamente generado proyectivo y $\bar{Q} \cong P$.

APLICACION. El anillo R[[x]] es (x)-adicalmente completo y $R[[x]]/(x) \cong R$. Por el Teorema 3.5 los grupos Br(R[[x]]) y Br(R) son isomorfos.

* *

BIBLIOGRAFIA

[AG] Auslander, M. and Goldman, O., *The Brauer group of a commutative ring*, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960) 367-409.

[Ba] Bass, H., *Algebraic* K-*Theory*, Benjamin, New York, 1968.

[Bo] Bourbaki, N., *Algèbre Commutative*, Capítulos 1-7, Hermann, Paris, 1965.

[CE] Cartan, H. and Eilenberg, S., *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton, 1956.

[KO] Knus, M.-A. et Ojanguren, M., *Théorie de la Descente et Algèbres d'Azumaya*, Lecture Notes in Mathematics 389, Springer-Verlag, Berlin.

[OS] Orzech, M. and Small, C., *The Brauer group of commutative rings*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, 1975.

* *

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
Apartado Aéreo 2188
Cali, COLOMBIA.

(Recibido en Octubre de 1982).