Revista Colombiana de Matemáticas

Vol. XVII (1983), págs. 73 - 98

OPERADORES INTEGRALES DE HAMMERSTEIN, SU ESPECTRO Y APLICACIONES

por

Mario ZULUAGA URIBE

RESUMEN. En este artículo se estudia la existencia de soluciones de la ecuación $u = BF(u)-\lambda F(u)$ donde B es un operador lineal continuo y autoadjunto, F un operador no lineal y potencial. Cuando $\lambda = 0$ estudiamos el interesante caso de B no completamente continuo. También se estudia la ecuación $u = sBF(u)$, $s \in \mathbb{R}$. Estos resultados nos dan respuestas sobre la existencia de soluciones de problemas elípticos

$$-\Delta u = \lambda g(x,u) \text{ en } \Omega$$
$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es una región acotada. Las técnicas empleadas son variacionales: técnicas de reducción desarrolladas en [8] y teoría de puntos críticos de Liusternik-Schnirelman en la versión dada en [6].

ABSTRACT. In this paper we study the existence of solutions to the equation $u = BF(u)-\lambda F(u)$ where B is a selfadjoint continuous linear operator, and F is a potential nonlinear operator. The interesting case when B is not completely continuous is considered for $\lambda = 0$. We also study the existence of multiple solutions to the equation $u = sBF(u)$, $s \in \mathbb{R}$. These results are applied to the elliptic problem

$$-\Delta u = \lambda g(x,u) \text{ in } \Omega$$

$$u = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

where Ω is a bounded region in $\mathbb{R}^n$. To study the abstract problem, we use variational methods. Specifically, we use reduction thechniques as developed in [8] and the Liusternik-Schnirelman critical point theory as in [6].

§1. **Introducción**. Consideremos la ecuación

$$BF(u) = u \tag{1.1}$$

cuando $B:H \to H$ es un operador lineal continuo y autoadjunto definido sobre H, que será un espacio de Hilbert real,y el operador $F:H \to H$ es no lineal, continuo y potencial, ésto es, existe $f:H \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$.

La ecuación (1.1) ha sido ampliamente estudiada desde el punto de vista de diferentes técnicas no lineales como teoría de grado, teoría de puntos fijos, teoría de operadores maximales monótonos, métodos variacionales, etc. Ver por ejemplo [7] y [10]. En este artículo estudiaremos (1.1) desde el punto de vista variacional.

Cuando B es un operador cuasi positivo o cuasi negativo la ecuación ha sido estudiada en [11]. Cuando B tiene espectro positivo y negativo en número infinito y B es completamente continuo, ha sido estudiada en [3]. Aquí estudiaremos una forma más general de la ecuación (1.1), a saber:

$$BF(u) = u + \lambda F(u) \tag{1.2}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Para el caso $\lambda = 0$ y B completamente continuo obtenemos el Teorema 3.9 que ofrece condiciones sobre f, diferentes a las dadas en el Teorema 3.2 de [3], para garantizar la existencia de la solución. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ cualquiera, obtenemos el Teorema 3.10, en el cual se levanta la restricción de que B sea completamente continuo. En el Teorema 3.11 estudiamos la existencia de soluciones no nulas del problema (1.2).

Con el uso del Teorema 3.9 y la teoría de puntos críticos de Liusternik-Schnirelman, en la versión dada por D. Clark en [6], estudiamos el problema

$$u = sB(\lambda)F(u) \tag{1.3}$$

donde $B(\lambda) = B-\lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$, y obtenemos el Teorema 4.3 sobre existencia de soluciones múltiples del problema (1.3).

Finalmente en los Teoremas 5.1 a 5.5 damos algunas aplicaciones a las ecuaciones integrales de Hammerstein y a las ecuaciones diferenciales parciales elípticas.

El método que empleamos aquí ha sido desarrollado por A. Lazer y otros en [8], A.Castro y A.Lazer en [5] y A. Castro en [3].

En este trabajo, $f:H \to \mathbb{R}$ será siempre de clase C^1, $F = \nabla f$ y B será lineal, continuo y autoadjunto; otras propiedades de B serán señaladas explícitamente en cada caso.

§2. Definiciones preliminares.

DEFINICION 2.1. Un operador $B:H \to H$, lineal, se dice *positivo* si $\langle Bu,u\rangle \geq 0$ para todo $u \in H$, donde $\langle \; , \; \rangle$ denota el producto interno en H. Cambiando $\geqslant$ por $\leqslant$ se define B como *negativo*.

DEFINICION 2.2. Un operador $N:H \to H$, continuo, no necesariamente lineal, se dice *completamente continuo* si para cada $E \subset H$, acotado, $\overline{N(E)}$ es compacto.

DEFINICION 2.3. Un operador $N:H \to H$ se dice *fuertemente continuo* si para toda $\{x_n\} \subset H$ tal que $\{x_n\}$ converge débilmente a $x_0 \in H$ $(x_n \rightharpoonup x_0)$ entonces $N(x_n) \to N(x_0)$.

Recordemos que $x_n \rightharpoonup x_0$ significa que para todo $v \in H$, $\langle x_n - x_0, v\rangle \to 0$.

OBSERVACION. Un operador fuertemente continuo es completamente continuo, mas no recíprocamente, véase [11],p.14. En el caso de que N sea lineal, ambas definiciones coinciden.

Si en la Definición 2.3 en lugar de $N(x_n) \to N(x_0)$ decimos que $N(x_n) \rightharpoonup N(x_0)$ entonces se dice que N es *débilmente continuo*. En el caso en que N sea un funcional, esto es, $N:H \to \mathbb{R}$, continuidad fuerte y débil son conceptos equivalentes en virtud de que en $\mathbb{R}$ las topologías fuerte y débil coinciden.

DEFINICION 2.4. Un operador $N:H \to H$ se dice *diferenciable en* $x \in H$, si existe un operador lineal continuo $N'(x):H \to H$ tal que

$$N(x+h) - N(x) = N'(x)(h) + \alpha(x,h)$$

para todo $h \in H$, y

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\alpha(x,h)\|}{\|h\|} = 0$$

Si $N'(x)$ es continuo, con respecto a x, para todo $x \in H$ decimos que N es de clase C^1 en H y escribimos $N \in C^1$.

Si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|h\| < \delta$, $h \in H$, implica que $\|\alpha(x,h)\| < \varepsilon\|h\|$ cualquiera que sea $x \in H$, decimos que N es *uniformemente diferenciable*.

DEFINICION 2.5. Un elemento $x \in H$ se dice un *punto crítico de* $N:H \to H$ si $N'(x) = 0$. Si $N:H \to \mathbb{R}$, por el teorema de representación de Riez:

$$N'(x)(y) = \langle\nabla N(x),y\rangle$$

para cada $y \in H$, donde $\nabla N(x) \in H$ es fijo.

RAIZ CUADRADA PRINCIPAL DE OPERADORES AUTOADJUNTOS. Sea $B:H \to H$ lineal, continuo y autoadjunto. El operador B^2 es positivo y autoadjunto. Es bien conocido que B^2 tiene una raíz cuadrada positiva y autoadjunta que la notamos $\sqrt{B^2}$. Definimos dos operadores B^+ y B^- de $H \to H$ así:

$$B^+ = \frac{\sqrt{B^2} + B}{2} \tag{2.1}$$

$$B^- = \frac{\sqrt{B^2} - B}{2} \tag{2.2}$$

Es fácil verificar que B^+ y B^- son operadores lineales autoadjuntos y positivos que satisfacen:

$$B^+ B^- = B^- B^+ = 0 \tag{2.3}$$

$$B = B^+ - B^-. \tag{2.4}$$

Sea $A^+ = \sqrt{B^+}$ y $A^- = \sqrt{B^-}$. Entonces al operador

$$A = A^+ - A^- \tag{2.5}$$

lo llamamos la *raíz cuadrada principal* de B.

LEMA 2.1. *Sea* $E:H \to H$ *la proyección sobre el núcleo de* B^+. *Sea* $p_1 = I-E$. *Entonces se cumplen las siguientes igualdades:*

$$A^-p_1 = p_1A^- = 0, \tag{2.6}$$

$$A^+p_1 = p_1A^+ = A^+. \tag{2.7}$$

Demostración. El operador E, pertenece a la resolución de la identidad del operador B. Por hechos bien conocidos en la teoría espectral para operadores autoadjuntos, se sabe que A^+, A^-, p_1 conmutan. (Ver [2] cap.27).

De (2.3) se deduce que $EB^- = B^-$, luego $p_1B^- = 0$ y de aquí se obtiene (2.6). También, $B^+E = 0$ y de esto obtenemos que $B^+p_1 = B^+$. Luego (2.7) es cierto.

DEFINICION 2.6. Un funcional $f:H \to \mathbb{R}$ se dice *débilmente inferiormente semicontinuo* (D.I.S.C.) si para cada $\{x_n\} \subset H$ tal que $x_n \rightharpoonup x_0$ entonces $f(x_0) < \underline{\lim} f(x_n)$. Si $\overline{\lim} f(x_n) \leqslant f(x_0)$ diremos que f es *débilmente superiormente semicontinuo* (D.S.S.C.).

§3. **Existencia de soluciones**. Si $B:H \to H$ es lineal, continuo y audoadjunto tenemos, con la misma notación de la sección anterior:

LEMA 3.1. *Sea* $\phi:H \to \mathbb{R}$ *definido por* $\phi(u) = 2f(Au) - \|p_1u\|^2 + \|p_2u\|^2$. *Entonces*

$$\nabla\phi(u) = 2\left[AFA(u) - (p_1 - p_2)(u)\right] \tag{3.1}$$

donde $p_2 = I - p_1$, $f: H \to \mathbb{R}$, $F(u) = \nabla f(u)$ *y* A *es la raíz cuadrada principal de* B.

Demostración. Es suficiente observar que por el caracter autoadjunto de A se tiene que $\nabla(f \circ A)(u) = AFA(u)$. Para los detalles referimos a [11] pág.81.

LEMA 3.2. *Un elemento* $u \in H$ *es un punto crítico de* ϕ *si y sólo si* u *es solución de la ecuación*

$$AFA(u) = (p_1 - p_2)(u). \tag{3.2}$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Lema 3.1 y la definición de punto crítico.

LEMA 3.3. *La ecuación* (3.2) *tiene solución si y sólo si la ecuacion* (1.1) *tiene solución.*

Demostración. Sea u solución de (3.2), multiplicando a ambos lados de la igualdad por $A^+ + A^-$ y haciendo uso de (2.5), (2.6) y (2.7) obtenemos que Au es solución de (1.1). Recíprocamente, sea u solución de (1.1). Como $B^+B^- = 0$ entonces $A^+A^- = 0$. De (2.4) y (2.5) se tiene:

$$AF(u) = AF(BF(u)) = AFA(A^+F(u) + A^-F(u)).$$

Por otro lado, de (2.6) y (2.7) se obtiene que

$$AF(u) = A^+F(u) - A^-F(u) = (p_1 - p_2)(A^+F(u) + A^-F(u)).$$

De las dos igualdades anteriores se obtiene que $A^+F(u) + A^-F(u)$ es solución de (3.2). ■

Sean X, Y dos subespacios de H definidos por:

$$X = p_1(H), \qquad Y = p_2(H) \tag{3.3}$$

donde $p_2 = I - p_1 = E$. Es claro que X y Y son ortogonales y que $H = X \oplus Y$.

LEMA 3.4. *Sea* $f: H \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *sobre* H *tal que* f *es convexo* ($f(\alpha u+\beta v) \leq \alpha f(u) + \beta f(u)$ si $\alpha+\beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$). *Entonces para* ϕ *definida en el Lema 3.1 se satisface:*

$$<\nabla\phi(x+y_1) - \nabla\phi(x+y_2), y_1-y_2> \;\geq\; 2\|y_1-y_2\|^2, \tag{3.4}$$

para cada $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$.

Demostración. Puesto que f es convexo entonces $\nabla f = F$ es monótono ($<Fu_1-Fu_2, u_1-u_2> \geq 0$); ver [12] pág.99. De la igualdad (3.1) se sigue el lema. ∎

Para cada $x \in X$ definimos $\phi_x: Y \to \mathbb{R}$ así:

$$\phi_x(y) = \phi(x+y) \tag{3.5}$$

donde el funcional ϕ es el que se definió en el Lema 3.1.

TEOREMA 3.5. *Supongamos que* $f: H \to \mathbb{R}$ *satisface las hipótesis del Lema 3.4. Para cada* $x \in H$ *el funcional* $\phi_x: Y \to \mathbb{R}$ *tiene un único punto crítico, que corresponde a un punto de mínimo.*

Demostración. Es claro que ϕ y ϕ_x son de clase C^1. La unicidad del punto crítico es una consecuencia de (3.4), observando que $<\nabla\phi_x(y), z> = <\nabla\phi(x+y), z>$, para cada $z \in Y$.

La desigualdad (3.4) asegura que $\nabla\phi_x$ es extrictamente monótono, entonces ϕ_x es estrictamente convexo, esto a su turno es equivalente a

$$\phi_x(y) - \phi_x(y_0) > <\nabla\phi_x(y_0), y-y_0> \tag{3.6}$$

para cada $y, y_0 \in Y$ (véase [12] pág.98). La desigualdad (3.6) implica que ϕ_x es D.I.S.C. (Def.2.6). Véase [11] pág.74.

Sea $y_0 \in Y$ fijo. De la desigualdad (3.4) y la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene que

$$\begin{aligned}\phi_x(y)-\phi_x(y_0) &= \int_0^1 \langle\nabla\phi_x(y_0+t(y-y_0)),\ y-y_0\rangle dt \\ &\geq \|y-y_0\|^2 - \|\nabla\phi_x(y_0)\|\|y-y_0\|.\end{aligned} \tag{3.7}$$

De la desigualdad (3.7) se deduce la existencia de $R > 0$ tal que para todo $y \in Y$, $\|y\| = R$, $\phi_x(y) > \phi_x(y_0)$.

Puesto que ϕ_x es D.I.S.C., sobre conjuntos cerrados y acotados ϕ_x alcanza valores de mínimo (ver [11] pág.78). Del hecho de que $\phi_x(y) > \phi_x(y_0)$ cuando $\|y\| = R$, para algún $R > 0$, se obtiene que ϕ_x tiene un punto de mínimo en el interior de $\overline{B(0,R)}$, luego ϕ_x tiene un punto crítico. ∎

Todo lo que hemos hecho hasta ahora permanece válido si cambiamos B por $B(\lambda) = B-\lambda I$ y E por $E(\lambda)$, donde $E(\lambda)$ es la proyección sobre el $\mathrm{Nuc}(B(\lambda)^+)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. El conjunto $\{E(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ es conocido como la resolución de la identidad del operador B. Sea

$$M = \sup_{\|u\|=1} \langle Bu,u\rangle \tag{3.8}$$

$$m = \inf_{\|u\|=1} \langle Bu,u\rangle.$$

Es bien conocido (ver [2] cap.27) que el espectro de B esta contenido en $[m,M]$ y para $\lambda \geq M$, $E(\lambda) = I$.

COROLARIO 3.6. *Supongamos que* $f:H \to H$ *satisface las hipótesis del Teorema 3.5. Sea* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > M$, *entonces el problema*

$$A(\lambda)\circ F\circ A(\lambda)(u) = (p_1-p_2)u \tag{3.9}$$

tiene una única solución.

Demostración. Primero, observemos que $A(\lambda)$, se define análogamente a como se definió A en (2.5), cambiando B por $B(\lambda)$ y E por $E(\lambda)$. El funcional ϕ definido en el Lema 3.1 dependerá ahora de $A(\lambda)$ y $E(\lambda)$ y por el Lema 3.2 sus puntos críticos son las soluciones de (3.9).

Es claro que con estos cambios el Teorema 3.5 prevalece. Puesto que $\lambda \geqslant M$ entonces $E(\lambda) = I$, así que $p_1 = 0$ y $p_2 = I$, entonces $X = \{0\}$ y $Y = H$, resultando que $\phi_0 = \phi$. Del Lema 3.2 y el Teorema 3.5 se sigue el Corolario 3.6. ∎

<u>Nota</u>. Suponiendo las hipótesis del Corolario 3.6 del Lema 3.3 se sigue que el problema $(B-\lambda I)Fu = u$ tiene solución para $\lambda \geqslant M$.

ESCOLIO 3.7. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.5. Supongamos que* B *es un operador negativo. Entonces el problema* (1.1) *tiene solución. Si además* B *es inyectivo, la solución es única.*

Demostración. Si B es negativo, la constante M de la identidad (3.8) es menor o igual que cero. Tomemos $\lambda = 0$ en el Corolario 3.6. Del Lema 3.3 se obtiene la existencia de una solución del problema (1.1).

Por otro lado, si B es inyectivo, $A^+ + A^-$ es inyectivo. Sean $u_1, u_2 \in H$ soluciones del problema (1.1), del Lema 3.3 se sigue que $(A^+ + A^-)F(u_1)$ y $(A^+ + A^-)F(u_2)$ son soluciones de la ecuación (3.2). Del Corolario 3.6 se sigue que $(A^+ + A^-)F(u_1) = (A^+ + A^-)F(u_2)$ y de aquí se sigue que $F(u_1) = F(u_2)$ y por lo tanto se tiene, en virtud de que u_1, u_2 son soluciones de (1.1), que $u_1 = u_2$.

Del Teorema 3.5 se desprende la existencia de una aplicación $T:X \to Y$ definida por $T(x)$ como el único punto crítico de la aplicación ϕ_x, $x \in X$, definida en (3.5).

La aplicación $T(x)$ puede caracterizarse así: $y = T(x)$ sí y sólo si

$$<\nabla\phi(x+y),v> = 0 \tag{3.10}$$

para todo $v \in Y$.

LEMA 3.8. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.5 y que* $B:H \to H$ *es un operador lineal, autoadjunto y completamente continuo. Entonces la aplicación* $T:X \to Y$, *caracterizada por 3.10, satisface:*

a) *Para cada* $\{x_n\} \subset X$ *tal que* $x_n \to x_0$, *existe una subsucesión* $T\{x_{n_k}\} \subset \{T(x_n)\}$ *tal que* $T(x_{n_k}) \to T(x_0)$.

b) T *es continua.*

Demostración. Que B sea completamente continuo significa que si $x_n \to x_0$ entonces $B(x_n) \to B(x_0)$. También, $A = A^+ - A^-$ es completamente continuo, ver [10] pág.59. De (3.1) se desprende que $\nabla\phi$ envía conjuntos acotados en conjuntos acotados. De (3.10) y (3.4) aplicada a $y_2 = 0$, $y_1 = T(x)$, se obtiene que $\|\nabla\phi(x)\|\|T(x)\| \geqslant -<\nabla\phi(x), T(x)> \geqslant 2\|T(x)\|^2$ y por lo tanto $\|\nabla\phi(x)\| \geqslant 2\|T(x)\|$. De esto se desprende que T envía conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Supongamos que $x_n \to x_0$, entonces $\{x_n\}$ es acotada y $\{T(x_n)\}$ también. Luego existen $\{T(x_{n_k})\} \subset \{T(x_n)\}$ y $y_0 \in Y$ tales que $T(x_{n_k}) \to y_0$ y por lo tanto $AFA(x_{n_k} + T(x_{n_k})) \to AFA(x_0+y_0)$.

Para cada $y \in Y$, $<\nabla\phi(x_{n_k}+T(x_{n_k})),y>$ converge a $2<AFA(x_0+y_0) - (p_1-p_2)(x_0+y_0),y> = <\nabla\phi(x_0+y_0),y>$. De (3.10) se deduce que $y_0 = T(x_0)$. Ahora

$$<\nabla\phi(x_{n_k}+T(x_{n_k}), T(x_{n_k})-T(x_0)> = 0 \qquad (3.11)$$

$$<\nabla\phi(x_0+T(x_0)), T(x_{n_k})-T(x_0)> = 0. \qquad (3.12)$$

A (3.12) le restamos (3.11) y obtenemos, con la ayuda de (3.1):

$$<AFA(x_0+T(x_0)) - AFA(x_{n_k}+T(x_{n_k})), T(x_{n_k})-T(x_0)>$$
$$= \|T(x_{n_k}) - T(x_0)\|^2.$$

De la acotación de $\{T(x_{n_k})\}$ se sigue que $\|T(x_{n_k})-T(x_0)\| \to 0$ y hemos aprobado la afirmación (a).

Puesto que toda subsucesión $\{T(x_{n_k})\} \subset \{T(x_n)\}$ débilmente convergente es fuertemente convergente al mismo límite $T(x_0)$ entonces T es continua. ∎

Nota. Si en el Teorema 3.5 suponemos que $f:H \to \mathbb{R}$ es además fuertemente continuo y uniformemente diferenciable, podemos, en el Lema 3.8, suprimir la hipótesis de que B sea completamente continuo y el Lema 3.8 subsiste. Esto, en virtud de que $\nabla f = F$ es fuertemente continuo, ver [10], pág.73.

TEOREMA 3.9. *Sea* $B:H \to H$ *un operador lineal autoadjunto y completamente continuo. Sea* $f:H \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *que satisface:*

a) f *es convexo,*

b) *para cada* $\alpha, c, d \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, *existe* $k > 0$ *tal que*

$$|f(u)| \leq \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + c\|u\| + d, \quad \textit{para} \quad \|u\| \geq k.$$

Entonces el problema (1.1) *tiene solución.*

Demostración. Definimos $G:X \to \mathbb{R}$ así: $G(x) = \phi(x+T(x))$, donde T es la aplicación caracterizada en (3.10) y $\phi:H \to \mathbb{R}$

es el funcional del Lema 3.1. De la condición (a) se sigue, por el Teorema 3.5, que

$$G(x) \leqslant \phi(x) \tag{3.13}$$

para cada $x \in X$.

Sea $\alpha > 0$ tal que $\alpha\|A\|^2 < 1$. Puesto que $\phi(x) = 2f\circ A(x) - \|x\|^2$, de la condición (b) se obtiene:

$$\phi(x) \leqslant (\alpha\|A\|^2-1)\|x\|^2+2c\|x\|+2d \quad \text{para } \|x\| \geqslant k,$$

k depende de α,c,d. Esto implica que $\phi(x) \to -\infty$ si $\|x\| \to \infty$, y de (3.13) obtenemos que $H(x) \to -\infty$ si $\|x\| \to \infty$.

De la continuidad completa de B y de la validez del Lema 3.8, se sigue que $G(x) = 2f\circ A(x+T(x)) - \|x\|^2 + \|T(x)\|^2$ es D.S.S.C. (Def.2.6). Puesto que $G(x) \to -\infty$ si $\|x\| \to \infty$, entonces para algún $R > 0$ y sobre alguna $\overline{B(0,R)}$, $G(x)$ alcanza un máximo en su interior; sea x_0 ese punto de máximo. Si ∇G existe entonces $\nabla G(x_0) = 0$ y el punto $x_0 + T(x_0)$ es el punto crítico de ϕ, así:

$$\begin{aligned}<\nabla\phi(x_0+T(x_0)),\ x+y> &= <\nabla\phi(x_0+T(x_0)),y> + <\nabla G(x_0),x> \\ &= 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Del Lema 3.2 y Lema 3.3 se obtiene que $A(x_0+T(x_0))$ es solución del problema (1.1).

Usando el hecho de que f es de clase C^1 y que $\phi(x+y) \geqslant \phi(x+T(x))$, se puede ver que

$$\lim_{t\to 0} \frac{G(x+th)-G(x)}{t} = <\nabla\phi(x+T(x)),h>.$$

De la continuidad de ϕ y de T, se sigue que G es diferenciable según Fréchet. Para los detalles referimos al lector a [3]. Así queda probado el Teorema 3.9.

TEOREMA 3.10. *Sea* $B:H \to H$ *lineal continuo y autoadjunto. Sea* $f:H \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *tal que:*

a) f *es convexo, fuertemente continuo y uniformemente diferenciable.*

b) *La condición* (b) *del Teorema 3.9.*

Entonces el problema (1.2) *tiene solución.*

Demostración. Es suficiente observar que con la condición (a) el Lema 3.8 subsiste. El resto del teorema sigue los mismos pasos del Teorema 3.9.

TEOREMA 3.11. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.10, además, supongamos que:*

a) f *es de clase* C^2,

b) $\nabla f(0) = F(0) = 0$,

c) $\|A(\lambda)F'(0)A(\lambda)\|_X > 1$.

Entonces el problema (1.2) *tiene una solución no nula.*

Demostración. En virtud de la condición (b) se sigue que la ecuación (1.2) tiene a cero como solución. También, por el Teorema 3.10, existe $x_0 \in X$ tal que $A(\lambda)(x_0+T(x_0))$ es solución de (1.2), donde x_0 es un punto de máximo de $G(x)$. Esto es:

$$\begin{aligned}\phi(x_0+T(x_0)) = G(x_0) &= \max_{x\in X} G(x) = \max_{x\in X} \phi(x+T(x))\\ &= \max_{x\in X}\min_{y\in Y} \phi(x+y).\end{aligned}$$

De ésto se desprende que $\phi(x_0+T(x_0)) \geqslant \phi(x+T(x_0))$, para todo $x \in X$, y puesto que ϕ es de clase C^2 entonces $\langle D^2\phi(x_0+T(x_0))(x),x\rangle \leqslant 0$ para cada $x \in X$. Por otro lado:

$$\frac{1}{2}\langle D^2\phi(0)(x),x\rangle = \langle A(\lambda)F'(0)A(\lambda)(x),x\rangle - \|x\|^2.$$

De la condición (c) se deduce la existencia de $x_1 \in X$ tal que

$\langle A(\lambda)F'(0)A(\lambda)(x_1),x_1\rangle > \|x_1\|^2$. Luego $\langle D^2\phi(0)(x_1),x_1\rangle > 0$. Comparando con la desigualdad $\langle D^2\phi(x_0+T(x_0))(x),x\rangle \leq 0$ se obtiene que $x_0+T(x_0) \neq 0$. De la condición (b) y de (3.10) se sigue que $T(0) \neq 0$ y entonces $x_0 \neq 0$. Puesto que $A^+(\lambda)(x_0)\neq 0$, entonces $A(\lambda)(x_0+T(x_0)) \neq 0$, luego $A(\lambda)(x_0+T(x_0))$ es la solución no nula buscada. ■

Nota. Si cambiamos la condición (b) por (b'): *el operador* $B(\lambda)$ *es inyectivo*, la afirmación del Teorema 3.11 prevalece.

§4. El espectro del operador de Hammerstein.

Sea Z un espacio de Banach, por S(Z) denotamos la familia de subconjuntos de Z−{0} que son cerrados y simétricos respecto al origen.

DEFINICION 4.1. El conjunto $A \in S(Z)$ se dice que tiene *género* n, $n \in \mathbb{N}$, (denotado $\Gamma(A) = n$), si n es el menor natural para el cual existe una función continua e impar $g:A \to \mathbb{R}^n-\{0\}$.

Si $A = \phi$ entonces definimos $\Gamma(A) = 0$. Si para ningún n existe una tal g entonces definimos $\Gamma(A) = \infty$.

Para las propiedades del género referimos al lector a [4].

Sea $G:Z \to \mathbb{R}$ una función par. Sea $a \in \mathbb{R}$, definimos $G_a = \{x \in Z, G(x) \leq a\}$. Para G continua definimos:

$$i_1(G) = \lim_{a\to 0^-} \Gamma(G_a)$$

$$i_2(G) = \lim_{a\to -\infty} \Gamma(G_a)$$

El siguiente teorema debido a D. Clark puede verse en [6], Teorema 9.

TEOREMA 4.2. *Sea* $G:Z \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1, *par*, $G(0) = 0$ *y tal que satisface la condición de Palais-Smale (P-S): "Cada* $\{x_n\} \subset Z$ *tal que* $G(x_n)$ *es acotada y* $G'(x_n) \to 0$ *tiene una subsucesión convergente". Si* $i_1(G) > i_2(G)$ *entonces para cada entero* m *tal que* $i_1(G) \geqslant m > i_2(G)$ *existe un par* $\{x_m, -x_m\} \subset Z$, *de puntos críticos de* G, *tales que* $G(x_m) = \operatorname{Inf}_{\Gamma(A)\geqslant m} \sup_{x\in A} G(x)$.

TEOREMA 4.3. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.9. Sea* $N = \dim X = \dim(I-E)(H)$, *donde* E *es la proyección sobre el núcleo de* B^+. *Supongamos, además que* $f:H \to \mathbb{R}$ *satisface:* (a) f *es estrictamente convexa,* (b) f *es par. Entonces para todo* $n \leqslant N$ *si* $N < \infty$, *ó para todo* $n \in \mathbb{N}$ *si* $N = \infty$, *existe* $s(n) \geqslant 0$ *tal que para* $s > s(n)$ *el problema*

$$u = sBF(u) \tag{1.1*}$$

tiene $2n + 1$ *soluciones.*
Además, si $\dim(I-E^-)(H) = M$, *donde* E^- *es la proyección sobre el núcleo de* B^- *y si* f *satisface* (a) *y* (b), *entonces para* $m \leqslant M$ *si* $M < \infty$, *ó para* $m \in \mathbb{N}$ *si* $M = \infty$, *existe* $s'(m) \leqslant 0$ *tal que para* $s < s'(m)$ *el problema* $(1.1)^*$ *tiene* $2m + 1$ *soluciones.*

<u>Nota</u>. Si en lugar de las hipótesis del Teorema 3.9 asumimos las hipótesis del Teorema 3.10 más las condiciones adicionales (a) y (b) sobre f, entonces obtenemos un resultado análogo para el problema $u = sB(\lambda)F(u)$.

Demostración. No perdemos generalidad si suponemos que $f(0) = 0$. La condición (b) implica que $\nabla f = F$ es impar y por lo tanto $F(0) = 0$ y así 0 es una solución de $(1.1)^*$.

El problema $(1.1)^*$ lo podemos escribir así

$$u = BF_s(u) \tag{1.1}^{**}$$

donde $F_s = s\,F = \nabla(s\,f)$.

Para $s > 0$, el funcional sf es estrictamente convexo, par, y $sf(0) = 0$. Puesto que f satisface la condición (b) del Teorema 3.9 entonces sf también la satisface, de aquí que para $s > 0$ el problema $(1.1)^{**}$ tiene solución.

Siguiendo los argumentos empleados en el Teorema 3.9 vemos que las soluciones de $(1.1)^{**}$ provienen de los puntos críticos del funcional $G_s : X \to \mathbb{R}$ definido por $G_s(x) = 2(sf)\circ A(x+T_s(x)) + |T_s(x)|^2 - |x|^2$, donde $T_s(x) \in Y$ es el punto donde el funcional $\phi_{s,x} : Y \to \mathbb{R}$, definido por $\phi_{s,x}(y) = 2(sf)\circ A(x+y) - |x|^2 + |y|^2$, alcanza su único valor mínimo.

De la desigualdad $\|\nabla\phi_s(x)\| \geqslant 2\|T_s(x)\|$ obtenida en el Lema 3.8 y puesto que $F_s(0) = 0$, se sigue que $T_s(0) = 0$, de donde $G_s(0) = 0$. Lo mismo que en el Teorema 3.9, G_s es también de clase C^1. Veamos que G_s es par. Puesto que f es par, ϕ_s es par, entonces $G_s(x) = \phi_s(x+T_s(s)) = \inf_{y\in Y} \phi_s(x+y) = \inf_{y\in Y} \phi_s(-x-y) = \inf_{y\in Y} \phi_s(-x+y) = G_s(-x)$, como queríamos.

Veamos que G_s satisface la condición (P-S). Sea $\{x_n\} \subset X$ tal que $\{G_s(x_n)\}$ es acotado y $G_s'(x_n) \to 0$. Un cálculo nos muestra que

$$\nabla G_s(x_n) = 2\left[p_1 AF_s A(x_n + T_s(x_n)) - x_n\right] \tag{4.1}$$

donde p_1 denota la proyección sobre X.

Debido a que $G_s(x_n) \to -\infty$ si $\|x_n\| \to \infty$, entonces $\{x_n\}$ es acotada. De la continuidad completa de A, se sigue que existe $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ tal que $p_1 AF_s A((x_{n_k} + T_s(x_{n_k}))$ converge. Puesto que $\nabla G_s(x_n) \to 0$, de (4.1) se obtiene que $\{x_{n_k}\}$ converge fuertemente. Queda probado que G_s satisface la condición (P-S). Estamos ya en condiciones de aplicar el Teorema 4.2 a $-G_s$.

Como $-G_s(x) \to +\infty$ si $\|x\| \to \infty$, entonces $i_2(-G_s) = 0$. Veamos que para $n < N$ existe $s(n)$ tal que para $s > s(n)$ $i_1(-G_s) \geq n$.

Sea $X_n \subset X$ un subespacio con $\dim X_n = n$. Llamemos $S(\rho,n) = S_\rho \cap X_n$, donde $S = \{x \in X : \|x\| = \rho\}$. De las condiciones (a) y (b) y puesto que $f(0) = 0$, se desprende que $f(x+y) > 0$ para $x \in S(\rho, n)$, $y \in Y = P_2(H)$. Llamemos:

$$d = \underset{(x,s)\in S(\rho,n)\times\mathbb{R}^+}{\mathrm{Inf}} f\circ A(x+T_s(x))$$

1º) Si $d > 0$, sea s_1 tal que $s_1 > \frac{\rho^2}{d}$. Entonces $G_s(x) > 0$, para $x \in S(\rho,\mu)$, $s > s_1$,

2º) Si $d = 0$, en este caso $\{T_s(x)\}$, $(x,s) \in S(\rho,n)\times\mathbb{R}^+$, no es acotada, ya que si lo fuera podríamos escoger una sucesión $\{x_n+T_{s_n}(x_n)\}$ tal que $f\circ A(x_n+T_{s_n}(x_n)) \to 0$ y $x_n+T_{s_n}(x_n) \rightharpoonup x_0+y_0$, con $\|x_0\| = \rho$, ya que en X_n las convergencias débil y la fuerte coinciden. Como $f\circ A$ es fuertemente continúa, entonces $0 = f\circ A(x_0+y_0) > 0$, que es contradictorio.

Tomemos $(A_1,W_1) \subseteq S(\rho,n)\times\mathbb{R}^+$ tal que para $(x,s) \in (A_1,W_1)$, $\|T_s(x)\|^2 > \rho$, y llamemos (A_2,W_2) a su complemento. Sea

$$d_1 = \underset{(x,s)\in(A_2,W_2)}{\mathrm{Inf}} f\circ A(x_0+T_s(x))$$

Razonando como antes, vemos que $d_1 > 0$.

Sea entonces $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que $s_1 > \frac{\rho^2}{d}$. Entonces para $x \in S(\rho,n)$ y $s > s_1$, si $(x,s) \in (A_1,W_1)$ se sigue que $G_s(x) > 0$, y si $(x,s) \in (A_2,W_2)$ entonces $2sf\circ A(x+T_s(x)) > \rho^2$ y por lo tanto $G_s(x) > 0$. Hemos probado que existe $s_1 \in \mathbb{R}^+$, que depende de ρ y de n, tal que si $s > s_1$, $G_s(x) > 0$ para $x \in S(\rho,n)$. Es bien sabido (ver [4]) que $\Gamma(S(\rho,n)) = n$, esto implica que $i_1(-G_s) \geqslant n$ para $s > s_1$.

Llamemos $s(n) = \operatorname*{Inf}_{\rho>0} \{s_1(\rho,n)\}$, entonces $i_1(-G_s) \geqslant n$ para $s > s(n)$.

El Teorema 4.2 garantiza la existencia de 2n puntos críticos de G_s, $\{x_k,-x_k : k = 1,2,...,n\}$. Como vimos en el Teorema 3.9, $\{\pm x_k+T_s(\pm x_k): k = 1,2,...,n\}$ son los puntos críticos de ϕ_s y por el Lema 3.3, $\{A^+(\pm x_k)-A^-T_s(\pm x_k): k = 1,2,..,n\}$ son las soluciones de $(1.1)^*$. Puesto que A^+ es inyectivo en X, se sigue que $(1.1)^*$ tiene 2n soluciones, y ya que 0 es una solución entonces $(1.1)^*$ tiene 2n + 1 soluciones para $s > s(n)$.

Finalmente, para $s < 0$ y en virtud de que F es impar podemos escribir $(1.1)^*$ así: $(-s)(-B)F(-u) = -u$, que tiene la forma de la ecuación que hemos estudiado; ahora,

$$-B = B^- - B^+ \quad \text{y} \quad X = (I-E^-)(H).$$

El teorema queda probado.

§5. <u>Aplicaciones a las ecuaciones integrales y a las ecuaciones diferenciales parciales</u>.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una región acotada. Sea $K:\Omega\times\Omega \to \mathbb{R}$ tal que, $K \in L^2(\Omega\times\Omega)$ y $K(s,t) = K(t,s)$, entonces tenemos el siguiente teorema

TEOREMA 5.1. *Sea* $g:\mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ *que satisface las siguientes condiciones:*

1º) $g(u,x)$ *es continua en* u *y medible en* x.

2º) $g(u,x)$ *es no decreciente en* u.

3º) *para todo* $b > 0$ *existe* $N > 0$ *tal que*

$$|g(u,x)| \leqslant a(x) + b|u|$$

para $|u| > N$, *donde* $a(x) \in L^2(\Omega)$ *es una función fija.* *Entonces el problema* $\int_\Omega K(s,t)g(u(t),t)dt = u(s)$ *tiene por lo menos una solución en* $L^2(\Omega)$.

Demostración. El teorema es una consecuencia inmediata del Teorema 3.9. Primero observemos que nuestro problema tiene la forma de la ecuación (1.1) donde $B(u) = \int_\Omega K(s,t)u(t)dt$, que por lo supuesto sobre $K(s,t)$ hace de B un operador lineal, autoadjunto y completamente continuo. El operador F, definido por $F(u)(x) = g(u(x),x)$, es por la condición (1ª) y (3ª) un operador continuo de $L^2(\Omega)$ en si mismo; ver [10]. Además F es potencial, el funcional $f:L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$ esta dado por:

$$f(u) = f_0 + \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(s,x)ds, \tag{5.1}$$

donde f_0 es una constante arbitraria. Un cálculo nos muestra que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(u+tv)-f(u)}{t} = \langle F(u),v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

De la continuidad de F se sigue que f es de clase C^1.

La condición (2ª) nos dice que f es convexa y la condición (3ª) implica que f satisface la condición de crecimiento impuesta a f en la hipótesis (b) del Teorema 3.9. De esto se desprende la existencia de por lo menos una solución de nuestro problema.

TEOREMA 5.2. *Sea* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *una región acotada. Sea* $K(s,t) = K(t,s) \in L^2(\Omega\times\Omega)$ *que define un operador* $B:L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *como lo hicimos en el Teorema 5.1. Sea* $g:\mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ *que satisface:*

1º) $g(u,x)$ *es continuo en* u *y medible en* x.

2º) $g(u,x)$ *es estrictamente creciente en* u.

3º) $g(u,x)$ *es impar en* u.

4º) *Existen* $h(x) \in L^2(\Omega)$, $b \geq 0$, $0 \leq \alpha < 1$ *tales que*

$$|g(u,x)| \leq h(x) + b|u|^{\alpha}.$$

5º) $\mathrm{Dim}(I-E)(L^2(\Omega)) = N$ (*posiblemente* $N = \infty$) *donde* E *representa la proyección sobre el núcleo de* B^+.

Entonces para todo $n < N$ *existe* $s(n) \in \mathbb{R}^+$ *tal que para* $s > s(n)$. *La ecuación*

$$u(x) = s \int_{\Omega} K(x,y)g(u(y),y)dy \tag{5.2}$$

tiene por lo menos $2n + 1$ *soluciones en* $L^2(\Omega)$.

Demostración. Es una aplicación directa del Teorema 4.3. La ecuación (5.2) tiene la misma forma de la ecuación (1.1)* del Teorema 4.3, donde B está determinado por el núcleo $K(x,y)$, y F por la aplicación $g(u,x)$. Por la condición (1º) y (4º), $F:L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es continuo y potencial, $F = \nabla f$ donde f es el funcional definido en (5.1). La condición (2º) implica que f es estrictamente convexa y la condición (3º) implica que f es par. Para encontrarnos completamente en las condiciones del Teorema 4.3 solo resta ver que f satisface la condición (b) del Teorema 3.9.

Como Ω es acotado, entonces $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. Esto implica que $L^2(\Omega) \subset L^{\beta}(\Omega)$ para $1 \leq \beta \leq 2$ y se tiene que

$$\|u\|_{L^{\beta}(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{2-\beta}{2\beta}} \|u\|_{L^2(\Omega)}, \tag{5.3}$$

donde $|\Omega|$ significa la medida de Ω.

De la condición (4º), de (5.3) y de la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que

$$|f(u)| \leqslant \int_\Omega |u| g(\theta u(x),x)dx \qquad 0 \leqslant \theta(x) \leqslant 1$$

$$\leqslant \int_\Omega |u(x)| \; h(x)+b|u(x)|^{\alpha+1}$$

$$\leqslant \|h\| \; \|u\| + b|\Omega|^{\frac{1-\alpha}{2\alpha+2}} \|u\|^{\alpha+1} \tag{5.4}$$

donde $\| \; \| = \| \; \|_{L^2(\Omega)}$.

Puesto que $1+\alpha < 2$, de (5.4) se sigue que f satisface la condición (b) del Teorema 3.9 y el teorema queda probado.

TEOREMA 5.3. *Sea* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *una región acotada. Sea* $g:\mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ *que satisface las condiciones* (1ª), (2ª), (3ª) *y* (4ª) *del Teorema 5.2. Supongamos además* (5ª) *que para cada* $u \in H_0^1(\Omega)$ *se tiene* $\{\frac{\partial g}{\partial x_i}(u(x),x)\} \subset L^2(\Omega)$, *para* $i = 1,2,\ldots,n$, *y que* $\frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi,x)$ *es acotada. Entonces para todo* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $\lambda(n) \in \mathbb{R}^+$ *tal que para* $\lambda \geqslant \lambda(n)$ *el problema*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda g(u,x) \quad \text{en} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.5}$$

tiene $2n+1$ *soluciones débiles.*

(Para las definiciones y propiedades del espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ referimos al lector a [1]. Por Δ denotamos el operador diferencial $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Con $\partial\Omega$ denotamos la frontera de Ω, y por $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de (5.5) entendemos que para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ se satisface

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle = \lambda \int_\Omega g(u,x)\cdot v. \tag{5.6}$$

El símbolo < , > denota el producto interno en $\mathbb{R}^n$).

Demostración. Es bien conocido que

$$\langle u,v\rangle = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle dx \tag{5.7}$$

define en $H_0^1(\Omega)$ un producto interno; ver [9]. El producto interno en $L^2(\Omega)$ lo notaremos por $< \, , \, >_0$. Para cada $u \in L^2(\Omega)$ el funcional $<u, \, >_0 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es lineal continuo y acotado. Por el Teorema de Representación de Riesz, existe un único $B(u) \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$<u,v>_0 = <B(u),v>_1 \tag{5.8}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Sea $B: L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ donde $B(u)$ es el elemento que satisface (5.8). Se desprende que B es lineal, autoadjunto, continuo, inyectivo y no negativo.

Puesto que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es acotada entonces la inclusión $i: H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es completamente continua (Lema de Rellich), ver [9]. Sea $\tilde{B}: H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ definido por $\tilde{B} = B \circ i$. De las hipótesis (1º) y (4º) se sigue que $F(u)(x) = g(u(x),x)$ es continua y acotada y por lo tanto $\tilde{F} = F \circ i$ también lo es. De la hipótesis (5º) se sigue que $F(H_0^1(\Omega)) \subset H_0^1(\Omega)$.

De (5.6), (5.7) y (5.8) se sigue que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de (5.5) sí y sólo si

$$u = \lambda \tilde{B}\tilde{F}(u). \tag{5.9}$$

Sea $f: L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ como se definió en (5.1). Sea $\tilde{f}: H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\tilde{f} = f \circ i$, entonces $\nabla\tilde{f} = \tilde{F}$. De las hipótesis (2º) y (3º) se sigue que $\tilde{f}$ es par y estrictamente convexa. Para aplicar nuestro Teorema 4.3 solo nos resta probar que $\tilde{f}$ satisface la condición (b) del Teorema 3.9. Para ello, hacemos uso de la desigualdad de Poincaré: existe $c > 0$ tal que

$$\|u\|_0 \leq c\|u\|_1 . \tag{5.10}$$

Para su demostración ver [9].

De (5.4) y (5.10) se tiene que

$$|\tilde{f}(u)| \leq c\|h\|_0\|u\|_1 + bc^{\alpha+1}|\Omega|^{\frac{1-\alpha}{2\alpha+2}}\|u\|_1^{\alpha+1}.$$

Entonces $\tilde{f}$ satisface la condición (b) del Teorema 3.9.

Finalmente, puesto que $\tilde{B} = \tilde{B}^+$ y es inyectivo, entonces E, la proyección sobre el núcleo de $\tilde{B}^+$, es cero; así que $(I-E)(H_0^1(\Omega)) = H_0^1(\Omega)$ y $\dim H_0^1(\Omega) = \infty$, y el Teorema 5.3 se sigue inmediatamente del Teorema 4.3. ∎

La desigualdad (5.10), válida para regiones acotadas, lo es también para cierta clase de regiones no acotadas. Por ejemplo $\Omega = [a,b]\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Estas regiones se llaman *regiones de Dirichlet*. Como una aplicación del Corolario 3.6 tenemos el teorema siguiente. Sea Ω una región de Dirichlet y sea

$$C_1 = \operatorname*{Inf}_{c\in\mathbb{R}}\{c^2 \in \mathbb{R}: \|u\|_0^2 \leq c^2\|u\|_1^2,\ u \in H_0^1(\Omega)\}.$$

De (5.8) se sigue que $<\tilde{B}(u),u>_1 < C_1\|u\|_1^2$. Puesto que $\tilde{B}$ es autoadjunto lineal y no negativo, entonces su espectro está contenido en $[0,C_1]$. Por lo tanto tenemos

TEOREMA 5.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una región de Dirichlet. Sea $g:\mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ que satisface:*

1º) $g(u,x)$ *es continua en* u *y medible en* x.

2º) $g(u,x)$ *es creciente en* u.

3º) *Existe* $h(x) \in L^2(\Omega)$ *y* $b \geq 0$ *tales que*

$$|g(u,x)| \leq h(x) + b|u|.$$

4º) $g(u,x)$ *satisface la condición* (5º) *del Teorema 5.3.*

Entonces para $\lambda > c_1$ *el problema*

$$-\Delta(u+\lambda g(u,x)) = g(u,x) \quad en\ \Omega$$
$$u = 0 \quad en\ \partial\Omega \qquad (5.11)$$

tiene por lo menos una solución débil.

Demostración. En la misma forma como lo hicimos en el Teorema 5.3, podemos ver que el problema (5.11) es equivalente al problema

$$u = \tilde{B}(\lambda)\tilde{F}(u) \tag{5.12}$$

donde $\tilde{B}(\lambda) = \tilde{B}-\lambda I$, $\tilde{B}$ y $\tilde{F}$ como se definieron en el Teorema 5.3. Es fácil ver que se satisfacen las hipótesis del Corolario 3.6. De éste y el Lema 3.3 se sigue, entonces, que para $\lambda > C_1$ el problema (5.12) y, equivalentemente, el problema (5.11) tiene una solución débil.

TEOREMA 5.5. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 5.4. Entonces para $\lambda < 0$ el problema* (5.5) *tiene una única solución débil.*

Demostración. Como vimos en el Teorema 5.3 el problema (5.5) es equivalente al problema (5.9). Puesto que $\tilde{B}$ es positivo entonces para $\lambda < 0$, $\lambda\tilde{B}$ es negativo inyectivo. Del escolio 3.7 se sigue directamente el Teorema 5.5.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Adams, T., *Sobolev spaces*, Academic Press N.Y., San Francisco, London, 1975.

[2] Bachman, G. and Narici, L., *Functional Analysis*, Academic Press, N.Y., 1966.

[3] Castro. A., *Hammerstein integral equations with indefinite kernel*, Internat. J.Math. and Math. Sci. Vol I (1978), 187-201.

[4] Castro, A., *Métodos variacionales y análisis funcional no lineal*, X Coloquio Col. de Mat. SCM, UPTC, Colombia, 1980.

[5] Castro, A. and Lazer, A., *Critical point theory and the number of solutions of a nonlinear Dirichlet prob-*

lems, Annali di Math, pura ed applicata (IV) Vol. CXX (1979), 113-137.

[6] Chark, D., *A variant of the Liusternik-Schnirelman theory*, Ind. Univ. Math. J.22 (1972),65-74.

[7] Figueiredo, D., *An introduction to the theory of monotone operators*, SBM, Campinas, 1974.

[8] Lazer, A., Landesman, E. and Meyers, D., *On saddle point problems in the calculus of variations; the Ritz algorithm and the monotone convergence*, J. Math. and App. 53 (1975),549-614.

[9] Mijailov, V.P., *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*, MIR, Moscu, 1978.

[10] Krasnosel'skii, A., *Topological Methods in the theory of non linear integral equations*, Pergamon Press, N. Y., 1964.

[11] Vainberg, M., *Variational Methods for the study of non linear operators*, Holden Day, San Francisco, 1964.

[12] Varberg, D. and Wayne R., *Convex Functions*, Academic Press, N.Y., 1973.

* *

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E., COLOMBIA

(Recibido en Octubre de 1982,
versión revisada en Agosto de 1983).