PROBLEMAS

Los problemas son señalados por cero, uno o dos asteriscos según su grado de dificultad. Las soluciones de los problemas deben ser enviadas a REVISTA DE MATEMATICAS ELEMENTALES, Universidad de los Andes, calle 18-A, carrera 1-E, Bogotá, Colombia, antes del 30 de septiembre de 1952. La solución a cada problema debe venir en hoja por separado. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas.

1. Demostrar que el producto de tres números enteros consecutivos es siempre divisible por 6, y que el producto de cuatro números enteros consecutivos es divisible por 24.

2. Demostrar que si el número entero a es un cubo perfecto, $(a - 1)\,a\,(a + 1)$ es divisible por 504.

3. Si un número entero n es divisible por cada entero $\leqslant \sqrt{n}$, entonces n es igual a 24, o a un divisor de 24.

4. Demostrar que si n es impar, $46^n + 293 \times 13^n$ es divisible por 1947.

5. Demostrar que en la sucesión $2^1 + 1, 2^2 + 1, 2^4 + 1, 2^8 + 1, \ldots, 2^{2^n} + 1, \ldots$ dos términos son siempre primos entre ellos.

6. La sucesión 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,... es tal que cada término es la suma de los dos precedentes. Los términos de esta sucesión se llaman números de Fibonacci. Demostrar que hay siempre por lo menos cuatro y a lo más cinco entre ellos que tienen el mismo número de cifras.

*7. Las sumas

$$1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$$

$(n = 2, 3, 4, \ldots)$ no son jamás números enteros.

*8. Demostrar que entre n números enteros positivos siempre se pueden escoger algunos, de tal manera que su suma sea divisible por n.

9. Entre ciertos objetos hay dos que tienen color diferente y dos que tienen forma diferente. Demostrar que hay dos que son diferentes de forma y de color.

10. Demostrar que en una reunión de seis miembros o bien hay tres que no se conocen mutuamente, o bien hay tres que se conocen mutuamente.

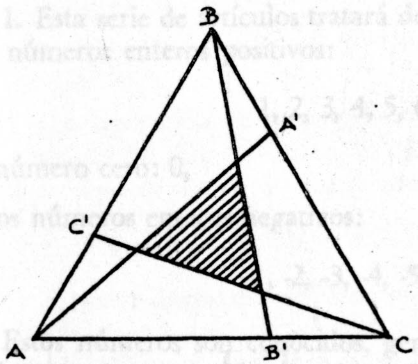
11. Teniendo en cuenta que hay moneda de 1, 2, 5, 10, 20, 50 centavos, ¿de cuántas maneras se puede cambiar un peso por monedas fraccionarias?

12. Los puntos (x, y) del plano con coordenadas x e y enteras se llaman "puntos de reja". Demostrar que no existe triángulo equilatero en el plano cuyos tres vértices son puntos de reja.

13. ¿Cuál es el número mínimo de círculos de radio 1/2 que cubren el círculo de radio 1, y en qué posición?

14. En un triángulo a lo más una altura es más larga que el lado correspondiente.

15. Sea ABC un triángulo equilátero. Sean A', B', C' puntos sobre los tres lados de ABC tales que $AB' : B'C = CA' : A'B = BC' : C'A = 2 : 1$. Demostrar que el área del triángulo que encierran los segmentos AA', BB', CC' es un séptimo del área de ABC.



16. Sea un tetraedro $ABCD$: $AC = AD = BC = BD = a\sqrt{3}$, $AB = CD = 2a$, J e I denotan los medios respectivos de CD y de AB.

a) Demostrar que las aristas AB y CD son perpendiculares y que IJ es una perpendicular común a los dos.

b) Calcular el segmento IJ. Demostrar que los diedros con aristas AB y CD son rectos.

c) Por el punto O de IJ definido por $IO = x$ hacemos pasar el plano perpendicular a IJ; este plano corta las aristas AC, AD, BD, BC respectivamente en M, N, P, Q. Demostrar que el cuadrilátero $MNPQ$ es un rectángulo. Calcular su área S en función de a y x.

d) Sea S' el área de un rectángulo cuyos lados son respectivamente iguales a MN y a AB, sea $y = S' - S$. Estudiar la variación de y cuando el punto O se desplaza entre I y J. Hacer la gráfica. (Bachillerato, 1ª parte, Aix-Marseille, Francia, 1948).