Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XVII (1983), págs. 117 - 151

FUNCIONES NO-ESTANDAR

Y TEORIA DE DISTRIBUCIONES

por

Yu TAKEUCHI

ABSTRACT. Any sequence of real functions (f_n) induces a function f = gen (f_n) in the non-standard reals $\mathbb{R}^*$ by taking the ultraproduct $\prod_n \langle\mathbb{R},f_n\rangle/F$ (F a non-principal ultrafilter). This paper studies the algebra and the caculus of the functions so obtained. Derivatives and integrals are defined as the obvious non-standard extensions of the corresponding real operators. Continuity instead, is defined via the pseudometric induced by $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^*$ (f is continuous in $\alpha \in \mathbb{R}^*$ if $f(\alpha+\varepsilon) \approx f(\alpha)$ for infinitesimal ε). Finally, it is shown that any Schwartz distribution T is represented by a non-standard function f of this kind, in the sense that for any test function g

$$\langle T,g\rangle \approx \int_{-\infty}^{\infty} t(\tau)g^*(\tau)d\tau$$

where g is the canonical extension of g to $\mathbb{R}^*$.

§1. Introducción. Sea S la colección de todas las sucesiones de números reales, dado un ultrafiltro regular (ultrafiltro de Frechet) F^* en $\mathbb{N}$, es decir, un filtro maximal que contiene todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ cuyo complemento es finito, se establece una relación de equivalencia, $\sim$, en S:

$$(a_n) \sim (b_n) \text{ si } \{n : a_n = b_n\} \in F^*.$$

Sabemos que el espacio cociente $\mathbb{R}^* = S/\sim$ es un cuerpo de números no-estándar, si se definen las operaciones y el orden adecuadamente.

En el presente artículo utilizaremos la siguiente notación, siguiendo una costumbre ya bastante generalizada (véase por ejemplo [4]).

$[(a_n)]$: un número no-estándar, la clase en $\mathbb{R}^*$ representada por la sucesión (a_n). Entonces $(a_n) \sim (b_n)$ si y sólo si $[(a_n)] = [(b_n)]$.

Est.α: la parte estándar del número $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

$\alpha \approx 0$: α es un número infinitesimal.

$\alpha \approx \beta$: α y β difieren en un número infinitesimal, o sea α-β es un número infinitesimal.

Si $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función real, la función $f^*:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ definida por:

$$f^*(\tau) = f^*([(x_n)]) = [(f(x_n))]$$

donde $\tau = [(x_n)] \in \mathbb{R}^*$, es la *extensión natural* de f al cuerpo $\mathbb{R}^*$.

Sea (f_n) una sucesión de funciones reales, entonces la correspondencia

$$x \longmapsto [f_n(x)] \in \mathbb{R}^*$$

es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^*$. Esta función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^*$, utilizada por algunos autores (véase [2]), no representa cabalmente el comportamiento de la sucesión (f_n) como se observa en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1. Sean: $g_n(x) = 0$ para todo x real y

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n & \text{en } (0,\frac{1}{n}), \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

entonces (δ_n) tiene un comportamiento muy diferente al de la sucesión nula (g_n), pero ambas sucesiones determinan la misma función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^*$. En efecto, dado $x > 0$ real existe N tal que $\frac{1}{n} < x$, entonces $\delta_n(x) = 0$ para todo $n > N$, o sea $\{n:\delta_n(x) = 0\} \supseteq \{n:n > N\} \in \mathcal{F}^*$, lo cual comprueba que $(\delta_n(x)) \sim (0)$ para todo x real.

Ahora bien, correspondiente a una sucesión (f_n) de *funciones reales* podemos definir también una función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ como sigue

$$f\colon \tau = [(x_n)] \longmapsto f(\tau) = [(f_n(x_n))] \;^{(1)}.$$

El propósito del presente trabajo es el analizar las funciones de $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}^*$ así generadas por sucesiones de funciones reales, y demostrar que toda distribución de Schwartz es representada por una tal función no-estándar. Además, como no todas estas funciones son interpretadas como distribuciones, la teoría de funciones no-estándar nos ofrece una teoría más amplia

---

(1) esto corresponde a tomar el ultraproducto.

$$\langle \mathbb{R}^*, f\rangle = \prod_n \langle R, f_n\rangle/\sim \,.$$

que la de distribuciones (ver el último parágrafo para algunas aplicaciones). No presupondremos ningún conocimiento de lógica matemática.

§2. Funciones no-estándar de la clase G.

DEFINICION 1. Sea (f_n) una sucesión de funciones reales. Se define una función no-estándar $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ como se explicó en la sección anterior:

$$f: \tau = [(x_n)] \longmapsto f(\tau) = [(f_n(x_n))]$$

Es fácil ver que la función está bien definida. Decimos que f es *generada por la sucesión* (f_n), y la denotamos por

$$f = \text{gen}(f_n).$$

La siguiente propiedad es fácil de comprobar:

(i) *Sean* $f = \text{gen}(f_n)$ *y* $g = \text{gen}(g_n)$; $f = g$ *si y sólo si* $\{n:f_n = g_n\} \in F^*$; $f > g$ *si y sólo si* $\{n:f_n > g_n\} \in F^*$.

Sean G la colección de todas las funciones no-estándar generadas por sucesiones reales, entonces tenemos las siguientes propiedades, las cuales muestran que G es un álgebra muy rica.

(ii) *Sea* $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función real. La extensión natural de* f, f^*, *pertenece a la clase* G. En efecto, $f^* = \text{gen}(f,f,\ldots,f,\ldots)$.

(iii) *Una función constante de valor no-estándar pertenece a* G. Sea $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ una función constante de valor $\beta = [(b_n)]$. Entonces $f = \text{gen}(f_n)$ donde f_n es la función constante de valor real b_n.

(iv) *Sean* $f,g \in G$, *entonces* $f\pm g$, fg, $f\circ g$, $\max(f,g)$, $|f|$, $1/f$ (*cuando* f *no toma valor nulo en* $\mathbb{R}^*$) *y* f^{-1} (*cuando* f *es uno a uno*) *pertenecen a* G. En efecto, si $f = \text{gen}(f_n)$ y $g = \text{gen}(g_n)$ entonces estas funciones son generadas por $(f_n \pm g_n)$, $(f_n g_n)$, $(f_n \circ g_n)$, $(\max(f_n,g_n))$, $(|f_n|)$, $(1/f_n)$ y (f_n^{-1}), respectivamente. En los dos últimos casos no se pierde generalidad al suponer que las f_n no toman valor nulo o son invertibles. En general, G contiene todas las funciones definibles de una manera elemental, como la función característica del conjunto de los ceros de $f \in G$, la función característica de un intervalo no estándar cualquiera, etc.

(v) *G contiene funciones no-estándar que no son extensiones naturales de funciones reales.* Por ejemplo cualquier función de valor constante infinitesimal distinto de 0. También están los ejemplos siguientes que se usarán más adelante.

EJEMPLO 2.

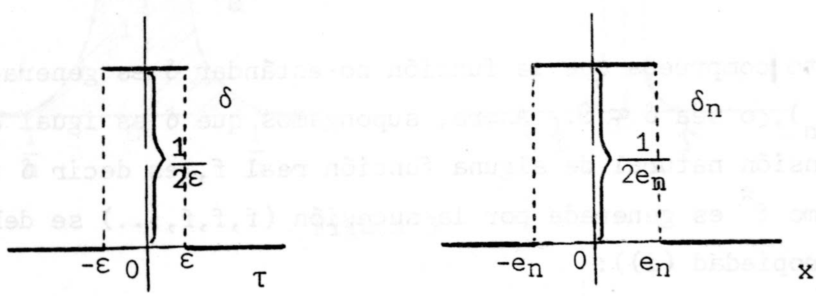

Figura 1

Sea $\delta:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ definida por:

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon < \tau < \varepsilon \\ 0 & \text{en otra parte,} \end{cases}$$

donde $\varepsilon = [(e_n)]$ es un número infinitesimal positivo (sin pérdica de generalidad, podemos suponer que $e_n > 0$ para todo n). Definimos la función $\delta_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\delta_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2e_n} & \text{si } -e_n < x < e_n \\ 0 & \text{en otra parte.} \end{cases}$$

Si $\tau = [(x_n)] \in \mathbb{R}^*$ con $-\varepsilon < \tau < \varepsilon$, entonces

$$\{n : -e_n < x < e_n\} \in \mathcal{F}^*,$$

pero como:

$$\{n : \delta_n(x_n) = \frac{1}{2e_n}\} = \{n : -e_n < x_n < e_n\}$$

entonces se debe tener que

$$\delta(\tau) = [(\delta_n(x_n))] = [(\frac{1}{2e_n})] = \frac{1}{2\varepsilon}\,.$$

Esto comprueba que la función no-estándar δ es generada por (δ_n), o sea $\delta \in \mathcal{G}$. Ahora, supongamos que δ es igual a la extensión natural de alguna función real f, es decir $\delta = f^*$. Como f^* es generada por la sucesión $(f,f,f,\ldots)$ se debe tener (propiedad (i)):

$$\{n : \delta_n = f\} \in \mathcal{F}^*,$$

esto es imposible ya que $\delta_n \neq \delta_k$ para $n \neq k$ (absurdo!).

EJEMPLO 3. Sea ε un número infinitesimal positivo como en el ejemplo anterior, se define $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$

$$f(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon^2}(\tau+\varepsilon) \text{ si } -\varepsilon \leqslant \tau \leqslant 0 \\ -\dfrac{1}{\varepsilon^2}(\tau-\varepsilon) \text{ si } 0 \leqslant \tau \leqslant \varepsilon \\ 0 \text{ en otra parte} \end{cases},$$

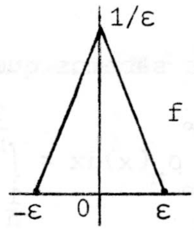

Figura 2

entonces $f \in \mathcal{G}$. En efecto, es fácil comprobar que $f = \text{gen}\,(f_n)$ donde

$$f_n(x) = \begin{cases} (x+e_n)/(e_n)^2 & \text{si } -e_n \leqslant x \leqslant 0, \\ -(x-e_n)/(e_n)^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant e_n \\ 0 \text{ en otra parte} \end{cases}$$

pero no es la extensión natural de ninguna función real.

EJEMPLO 4.

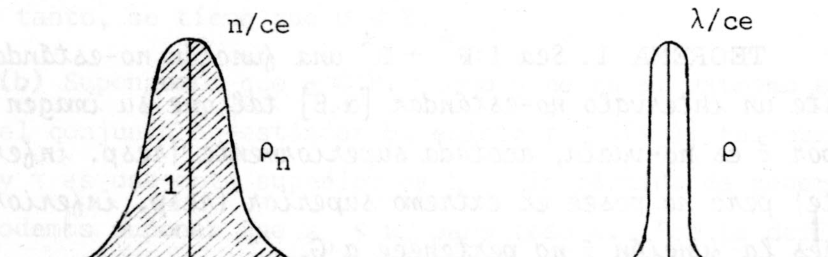

Figura 3

Sea

$$\rho_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{c}\exp\left(\dfrac{1}{1-n^2x^2}\right) & \text{si } |x| < \dfrac{1}{n} \\ 0 \text{ en otra parte} \end{cases}$$

donde

$$c = \int_{-1}^{1} \exp(-\frac{1}{1-t^2})dt \ ,$$

entonces sabemos que $\rho_n \in (C^\infty)$, y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x)dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \rho_n(x)dx = 1 \quad \text{para todo n.}$$

Si $\rho = \text{gen}(\rho_n)$ entonces:

$$\rho(\tau) = \begin{cases} \frac{\lambda}{c} \exp^*(-\frac{1}{1-\lambda^2\tau^2}) & \text{si } |\tau| < \frac{1}{\lambda} \\ 0 \text{ en otra parte.} \end{cases}$$

donde $\lambda = [(n)]$ es un número infinito.

Existen funciones no-estándar de $\mathbb{R}^*$ *en* $\mathbb{R}^*$, *que no pertenecen a la clase G.* En efecto, el siguiente teorema nos da una condición suficiente para que una función no-estándar no pertenezca a G.

TEOREMA 1. *Sea* $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ *una función no-estándar. Si existe un intervalo no-estándar* $[\alpha,\beta]$ *tal que su imagen inversa por* f *es no-vacía, acotada superiormente (resp. inferiormente) pero no posee el extremo superior (resp. inferior) entonces la función* f *no pertenece a G.*

Demostración. Supongamos que $f \in G$, sean

$$f = \text{gen}(f_n), \qquad \alpha = [(a_n)], \qquad \beta = [(b_n)]$$

con $a_n < b_n$ para todo n. Sean:

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}/a_n \leqslant f_n(x) \leqslant b_n\} \ , \qquad n = 1,2,3,\ldots \ ,$$

como la imagen inversa del intervalo $[\alpha,\beta]$, $B = f^{-1}([\alpha,\beta])$, es no-vacía y acotada superiormente entonces se tiene que:

$$T = \{n : A_n \neq \emptyset \quad y \quad A_n \text{ es acotada superiormente}\} \in \mathcal{F}^*.$$

Se define $\sigma = [(x_n)] \in \mathbb{R}^*$ como sigue:

$$x_n = \begin{cases} \text{Sup } A_n & \text{si } n \in T \\ 1 & \text{si } n \notin T \end{cases},$$

entonces evidentemente σ es una cota superior del conjunto $B = f^{-1}([\alpha,\beta])$.

(a) Supongamos que $\sigma \in B$. Como σ no es el extremo del conjunto no-estándar B existe $\hat{\sigma} = [(y_n)] \in \mathbb{R}^*$ tal que $\hat{\sigma} \in B$, $\sigma < \hat{\sigma}$, o sea:

$$\{n \in T : a_n \leqslant f_n(y_n) \leqslant b_n,\ x_n < y_n\} \in \mathcal{F}^*$$

ésto es imposible puesto que $x_n = \text{Sup } A_n$, $y_n \in A_n$ (absurdo!). Por lo tanto, se tiene que $\sigma \notin B$.

(b) Supongamos que $\sigma \notin B$. Como σ no es el extremo superior del conjunto no-estándar B, existe $\tilde{\tau} = [(\tilde{x}_n)]$ tal que $\tilde{\tau} < \sigma$ y $\tilde{\tau}$ es una cota superior de B. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\tilde{x}_n < x_n$ para todo n. Por la definición del extremo superior, existe $\tilde{y}_n$ tal que

$$\tilde{x}_n < \tilde{y}_n \leqslant x_n, \quad a_n \leqslant f_n(\tilde{y}_n) \leqslant b_n \qquad \text{si } n \in T,$$

$$\tilde{y}_n = 1 \quad \text{si} \quad n \notin T.$$

Sea $\tilde{\sigma} = [(\tilde{y}_n)]$ entonces:

$$\tilde{\tau} < \tilde{\sigma} \leqslant \sigma \qquad (\text{esto es, } \tilde{\sigma} \notin B),$$
$$\alpha \leqslant \tilde{\sigma} \leqslant \beta \qquad (\text{esto es, } \tilde{\sigma} \in B).$$

De (a) y (b) hemos llegado a una contradicción, por lo tanto se debe tener que $f \notin G$. ■

Del Teorema 1, se ve inmediatamente que *la función característica del conjunto de todos los números infinitesimales* no pertenece a la clase G.

TEOREMA 2. *Sea* $f = \mathrm{gen}(f_n)$. *Si* $f_n(x) \to f_0(\tau)$ *uniformemente en* $[a,b]$ *entonces* $f(\tau) \approx f_0^*(\tau)$ *para todo* $\tau \in \mathbb{R}^*$, $a \leqslant \tau \leqslant b$.

Demostración. Supongamos que $f_n \to f_0$ uniformemente en $[a,b]$, sea

$$M = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_0(x)|$$

entonces $M_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Si $\tau = [(x_n)] \in [a,b]$ entonces

$$A = \{n : a \leqslant x_n \leqslant b\} \in F^*.$$

Tenemos $|f_n(x_n) - f_0(x_n)| \leqslant M_n$ para todo $n \in A$, o sea $|f(\tau) - f_0(\tau)| \leqslant [(M_n)]$. Como $M_n \to 0$ se tiene que $[(M_n)] \approx 0$, por lo tanto $f(\tau) \approx f_0(\tau)$.

EJEMPLO 5. Sea $f = \mathrm{gen}(f_n)$ con

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n} \qquad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Como $f_n \to 0$, uniformemente en $\mathbb{R}$, se tiene que

$$f(\tau) \approx 0 \quad \text{para todo} \quad \tau \in \mathbb{R}^*.$$

EJEMPLO 6. Sea $f = \mathrm{gen}(f_n)$ con (ver el Ejemplo 1)

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{en } (0,\frac{1}{n}) \\ 0 & \text{en otra parte.} \end{cases}$$

Se ve que $f_n(x) \to 0$ *puntualmente* para *todo* x *real*. Pero:

$$f(\tau) = \begin{cases} \lambda & \text{si } \ 0 < \tau < \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \text{en otra parte,} \end{cases}$$

donde $\lambda = [(n)]$ (un número infinito), esto es, $f(\tau) \not\approx 0$ para $0 < \tau < \frac{1}{\lambda}$.

§3. **Continuidad de las funciones de la clase** G. A partir del presente parágrafo se trata solamente de funciones no-estándar de la clase G.

Sea $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real, si f es continua en a es bien conocida la siguiente propiedad:

$$f^*(a+\varepsilon) \approx f^*(a) \quad \text{para todo} \quad \varepsilon \approx 0, \tag{1}$$

donde f^* es la *extensión natural* de la función real f. Ahora bien, sea $f = \text{gen}(f_n)$; si la sucesión de funciones reales (f_n) es *equicontinua* en $a \in \mathbb{R}$ entonces dado $r > 0$ *real* cualquiera, existe $h > 0$ *real* tal que $|f_n(a+x) - f_n(a)| < r$ para todo $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < h$. Si $\varepsilon = [(e_n)] \approx 0$ entonces $\{n:|e_n| < h\} \in F^*$, luego

$$\{n:|f_n(a+e_n) - f_n(a)| < r\} \in F^* ,$$

de esto se desprende lo siguiente:

$$f(a+\varepsilon) \approx f(a) \quad \text{para todo} \quad \varepsilon \approx 0. \tag{2}$$

De las observaciones anteriores, extraeremos la siguiente definición:

DEFINICION 2. Sea $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ una función de la clase G. Decimos que f es *continua* en $\alpha \in \mathbb{R}^*$ si

$$f(\alpha+\varepsilon) \approx f(\alpha) \quad \text{para todo } \varepsilon \approx 0. \qquad (3)$$

De esta definición, se ve que la extensión natural de una función real continua es continua, también la función noestándar generada por una sucesión *equicontinua* de funciones reales es continua.

OBSERVACION. Si $f \in G$ es continua en $\alpha \in \mathbb{R}^*$, entonces f es continua en $\beta \in \mathbb{R}^*$ con $\alpha \approx \beta$.

La continuidad de $f = \text{gen}(f_n)$ no implica que las funciones reales f_n (generadoras de f) son continuas como se ve en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7.

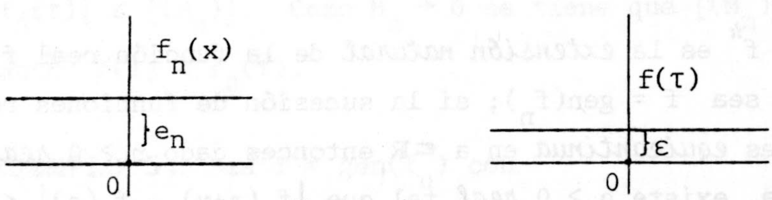

Figura 4

Sea $f(0) = 0$ y $f(\tau) = \varepsilon$ si $\tau \neq 0$, donde $\varepsilon = [(e_n)]$ es un número infinitesimal positivo, entonces tenemos que $f = \text{gen}(f_n)$ con:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e_n & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Evidentemente f_n es *discontinua* en $x = 0$ (para cualquier n), pero la función no-estándar f es continua en 0 según la definición 2.

Obsérvese que la función no-estándar generada por una sucesión de funciones (reales) continuas no siempre es continua.

EJEMPLO 8. Sea $f = \mathrm{gen}(f_n)$ con $f_n(x) = \mathrm{sen}(nx)$ $(n = 1, 2,3,\ldots)$. Si $\tau = [(\pi/2n)]$, entonces $\tau \approx 0$ puesto que $(\pi/2n) \to 0$. Además:

$$f(\tau) = [(f_n(\pi/2n))] = [(1)] = 1.$$

Así

$$f(0+\tau) = 1 \not\approx 0 = f(0)$$

o sea que f no es continua en 0. De la misma forma, podemos demostrar que f no es continua en a para cualquier $a \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, f no es continua en $\alpha \subset \mathbb{R}^*$ (para cualquier α finito). Nótese que $f_n(x) = \mathrm{sen}\, nx$ es continua en $\mathbb{R}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$.

De la definición de la continuidad, se comprueban inmediatamente las propiedades conocidas para funciones continuas reales, entre otras: si $f,g \in G$ son continuas en $\alpha \in \mathbb{R}^*$ entonces $f+g$, βf $(\beta \in \mathbb{R}^*)$ y fg son continuas en α; también f/g es continua en α si $g(\alpha) \not\approx 0$.

TEOREMA 3. $f \in G$ *es continua en* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *si y sólo si dado* $r > 0$ *real cualquiera existe* $h > 0$ *real tal que*

$$|f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha)| < r \quad \textit{para todo} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^* \textit{ con } |\varepsilon| < h. \qquad (4)$$

Demostración. **(1)** Supongamos que $f \in G$ satisface la condición enunciada en el Teorema. Si $\varepsilon \approx 0$, entonces $|\varepsilon| < h$ para cualquier $h > 0$ *real*, luego $|f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha)| < r$ para cualquier $r > 0$ *real*, o sea que $f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha)$ es un *infinitesimal*, esto es $f(\alpha+\varepsilon) \approx f(\alpha)$.

(2) Supongamos que $f \in G$ es continua en $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Sean $f = \text{gen}(f_n)$, $\alpha = [(a_n)]$. Dado $r > 0$ *real*, definimos $d_n(r) > 0$ *real* como sigue. Sean

$$A_n = \{|x| : |f_n(a_n+x)-f_n(a_n)| \geqslant r\},$$

$$d_n(r) = \begin{cases} \text{Inf } A_n & \text{si } A_n \neq \emptyset \\ 1 & \text{si } A_n = \emptyset. \end{cases}$$

Nótese que si $d_n(r) > 0$ entonces

$$|f_n(a_n+x)-f_n(a_n)| < r \quad \text{para cualquier } x \text{ } \textit{real} \text{ con } |x| < d_n(r). \tag{5}$$

Sea $\delta(r) = [(d_n(r))] \in \mathbb{R}^*$, vamos a demostrar que $\delta(r) \not\approx 0$ para cualquier $r > 0$ *real*. Supongamos que $\delta(r) \approx 0$ para algún $r > 0$ *real*. Notemos primero que $\{n : A_n \neq \emptyset\} \in F^*$. Para n con $A_n \neq \emptyset$, por la definición del extremo inferior, existe x_n real con $d_n(r) \leqslant |x_n| < d_n(r) + 1/n$ tal que $|f_n(a_n+x_n)-f_n(a_n)| \geqslant r$ (para todo n con $A_n \neq \emptyset$). O sea:

$$|f(\alpha+\tau) - f(\alpha)| \geqslant r \tag{6}$$

donde $\tau = [(x_n)]$. Como $|\tau| < \delta(r) + [(1/n)] \approx 0$, se tiene que $\tau \approx 0$, pero, por la continuidad de f en α, se debe tener que $f(\alpha+\tau) \approx f(\alpha)$; esto contradice a (6) (absurdo!). Por lo tanto:

$$\delta(r) \not\approx 0 \quad \text{para cualquier } r > 0 \text{ } \textit{real}.$$

Sea $h(r) > 0$ *real* tal que $h(r) < \text{Est } \delta(r)$. Si $\varepsilon = [(e_n)] \in \mathbb{R}^*$

con $|\varepsilon| < h(r) < \delta(r)$ entonces:

$$B_r = \{n : |e_n| < h(r)\} \cap \{n/h(r) < d_n(r)\} \in F^*.$$

De (5), $|f_n(a_n+e_n)-f_n(a_n)| < r$ para $n \in B$; por lo tanto $|f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha)| < r$. ■

Decimos que $f \in G$ es *continua* es un intervalo no-estándar $[\alpha,\beta]$ si es continua en cualquier punto de $[\alpha,\beta]$. Tenemos el siguiente teorema de continuidad uniforme.

TEOREMA 4 (**continuidad uniforme**). *Supongamos que* $f \in G$ *es continua en un intervalo finito* $[\alpha,\beta]$ ($\alpha,\beta \in \mathbb{R}^*$, α *y* β *son finitos*) *entonces: dado* $r > 0$ *real existe* $h > 0$ *real tal que* $|f(\tau)-f(\sigma)| < r$ *para todo* $\tau,\sigma \in [\alpha,\beta]$ *con* $|\tau-\sigma| < h$.

Demostración. En caso de que $\alpha \approx \beta$ el Teorema 4 es trivial, así podemos suponer que $\alpha \not\approx \beta$. Sean $a = \text{Est}\ \alpha$, $b = \text{Est}\ \beta$ entonces $a < b$, y tenemos que f es continua en el intervalo $[a,b]$. Por la compacidad del intervalo *real* $[a,b]$ se puede demostrar el Teorema 4 en forma casi idéntica al caso de la continuidad uniforme en el análisis real.

OBSERVACION. En el Teorema 4, el intervalo $[\alpha,\beta]$ puede ser reemplazado por el intervalo (α,β). En efecto, f es continua en α ya que es continua en $\alpha+\varepsilon$ para ε infinitesimal, y f es continua en β ya que es continua en $\beta-\varepsilon$ para ε infinitesimal (ver la observación después de la definición 2), o sea que f es continua en $[\alpha,\beta]$.

EJEMPLO 9. Sea $f \in G$ continua, de valor finito en un intervalo finito $[\alpha,\beta]$, entonces la función real $\tilde{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\tilde{f}(x) = \text{Est}\ f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ es continua en $[a,b]$ donde $a = \text{Est}\ \alpha$, $b = \text{Est}\ \beta$.

EJEMPLO 10. Sea $f \in G$ continua, de valor finito en un intervalo finito $[\alpha,\beta]$, entonces $f(\tau)$ es *acotada* en $[\alpha,\beta]$ (en el presente trabajo, decimos que una función es *acotada* si posee una cota *finita*). En efecto, $\tilde{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en el Ejemplo 9 es continua en $[a,b]$ con $a = \text{Est}\ \alpha$ y $b = \text{Est}\ \beta$, por lo tanto la función real $\tilde{f}$ es acotada en $[a,b]$, de esto se desprende inmediatamente la acotación de f en $[\alpha,\beta]$.

EJEMPLO 11. Sea $f \in G$ continua, de valor finito en un intervalo finito $[\alpha,\beta]$. Si $g = (\tilde{f})^*$ (la *extensión natural* de la función real $\tilde{f}$ definida en el ejemplo (9), entonces se tiene que:

$$f(\tau) \approx g(\tau) \quad \text{para todo } \tau \in \mathbb{R}^*, \quad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta .$$

En efecto, $f(x) \approx g(x)$ para todo x *real*, $x \in [a,b]$ donde $a = \text{Est}\ \alpha$ y $b = \text{Est}\ \beta$. Como f y g son continuas en $[\alpha,\beta]$ se obtiene el resultado pedido. ■

§4. **Derivada de las funciones de la clase** G. Sea $f = \text{gen}(f_n)$. Decimos que f es *derivable* si

$$\{n : f_n \text{ es regular a trozos en } \mathbb{R}\} \in F^*, \tag{1}$$

f_n es *regular a trozos* en $\mathbb{R}$ si f_n es continua en $\mathbb{R}$ y derivable con su derivada continua a excepción de *un número finito* de puntos. Si c es uno de estos puntos donde no existe la derivada de f_n, consideramos que $f_n'(c) = \lim_{x \to c^+} f_n'(x)$.

La definición de la derivabilidad evidentemente no depende de la sucesión que genera a la función f. Así, si $f = \text{gen}(f_n)$ es derivable podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$f_n \text{ es regular a trozos en } \mathbb{R} \text{ para todo } n. \qquad (2)$$

DEFINICION 3. Si $f = \text{gen}(f_n)$ es derivable, la función f' (ó Df) dada por

$$f' = Df = \text{gen}(f_n') \qquad (3)$$

se llama la *derivada* de f. Obviamente la función $f' \in G$ está bien definida.

EJEMPLO 12.

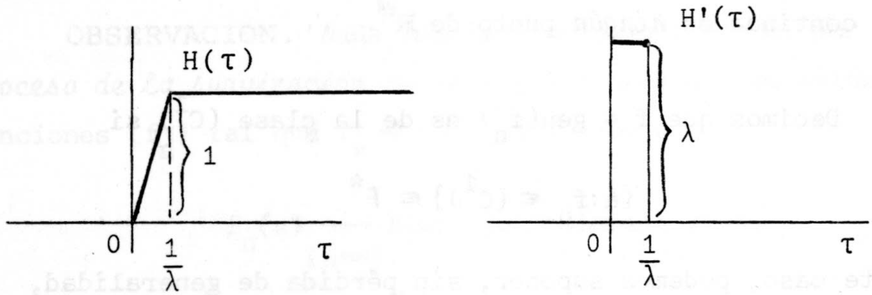

Figura 5

Sea $H = \text{gen}(H_n)$ con

$$H_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x \\ nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{en otra parte,} \end{cases}$$

entonces

$$H(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{1}{\lambda} \leqslant \tau \\ \lambda\tau & \text{si } 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{\lambda} \qquad (\lambda = [(n)]) \\ 0 & \text{en otra parte,} \end{cases}$$

Tenemos

$$H'(\tau) = \begin{cases} \lambda & \text{si } 0 \leqslant \tau < \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \text{en otra parte.} \end{cases}$$

Nótese que H es derivable, pero H no es continua en 0 ya que $H(0) = \lambda \not\approx H(-\frac{1}{\lambda}) = 0$ y $-\frac{1}{\lambda} \approx 0$.

EJEMPLO 13. Sea $f = \text{gen}(f_n)$ con $f_n(x) = \text{sen}\, nx$, f no es continua en *ningún* punto de $\mathbb{R}^*$, pero f es derivable, y $f' = \text{gen}(n \cos nx)$.

EJEMPLO 14. Sea $f = \text{gen}(f_n)$ con $f_n(x) = -\dfrac{\cos nx}{n}$. Sabemos que $f(\tau) \approx 0$ para todo $\tau \in \mathbb{R}^*$; f es derivable, y $f' = \text{gen}(\text{sen}\, nx)$. Nótese que $f' \in G$ es *acotada* por 1, pero no es continua en *ningún* punto de $\mathbb{R}^*$.

Decimos que $f = \text{gen}(f_n)$ es de la clase (C^1) si

$$\{n : f_n \in (C^1)\} \in F^*$$

En este caso, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f_n \in (C^1)$ para todo n. De la misma forma, se habla de las clases (C^2), $(C^3), \ldots, (C^\infty)$.

EJEMPLO 15. Sea $f \in G$ de la clase (C^1). Si $f'(\tau)$ es siempre *finito*, entonces f es *continua* en cualquier punto. Veamos una prueba. Sean $\alpha = [(a_n)] \in \mathbb{R}^*$; $\varepsilon = [(e_n)]$ un número infinitesimal. Si $f = \text{gen}(f_n)$ entonces:

$$f_n(a_n + e_n) - f(a_n) = e_n\, f_n'(a_n + \eta_n),$$

donde $|\eta_n| < |e_n|$ para todo n. Así

$$f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha) = \varepsilon f'(\alpha+\eta) , \quad (4)$$

donde $\eta = [(\eta_n)]$ es un infinitesimal, puesto que $|\eta| < |\varepsilon|$. Como $f'(\alpha+\eta)$ es finito, el producto $\varepsilon f'(\alpha+\eta)$ es un infinitesimal, luego $f(\alpha+\varepsilon) \approx f(\alpha)$, o sea que f es continua en α.

EJEMPLO 16. Sea $f \in G$ de la clase (C^1). Si f' es continua en $\alpha \in \mathbb{R}^*$ entonces tenemos:

$$\frac{f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha)}{\varepsilon} \approx f'(\alpha) \quad (5)$$

para todo $\varepsilon \neq 0$ infinitesimal. En efecto, en (4) se tiene que $f'(\alpha+\eta) \approx f'(\alpha)$ por la continuidad de f' en α, por lo tanto se obtiene inmediatamente el resultado (5).

OBSERVACION. Dada una función real $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por un *proceso de la suavización* se sabe que existe una sucesión de funciones (f_n) tal que $f_n \in (C^\infty)$ para todo n y

$$f_n(x) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} f(x) \quad \text{puntualmente en } x,$$

o sea $[(f_n(x)] \approx f(x)$ para todo x *real*. Si $f_0 = \text{gen}(f_n)$, entonces f_0 es de la clase (C^∞) y $f_0(x) \approx f(x)$ para todo x *real*, o sea que $f_0|_{\mathbb{R}}$ y f difieren en una cantidad infinitesimal. Naturalmente, la diferencia de $f_0(\tau)$ y $f^*(\tau)$ (la extensión natural de f) NO siempre es infinitesimal para $\tau \neq$ real.

§5. Integral de las funciones de la clase G.

Sea $f = \text{gen}(f_n) \in G$. Si

$$\{n : f_n \text{ es integrable en cualquier intervalo}\} \in \mathcal{F}^* \qquad (1)$$

entonces decimos que la función no-estándar f es *integrable*.

Evidentemente, la integrabilidad de $f \in G$ no depende de la sucesión que genera a $f \in G$. Así, si $f = \text{gen}(f_n)$ es integrable, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$f_n \text{ es integrable en cualquier intervalo (para todo n)} \qquad (2)$$

puesto que si f_n no es integrable (para algún n), ésta puede ser reemplazada por cualquier función integrable (por ejemplo por la función nula) sin alterar la función no-estándar f.

Si $f,g \in G$ son integrables es evidente que $f+g$, fg, $|f|$ y máximo (f,g) son integrables.

DEFINICION 4. Sea $f = \text{gen}(f_n) \in G$ una función integrable, para $\alpha = [(a_n)]$ y $\beta = [(b_n)]$ con $\alpha < \beta$ se define la *integral definida* de f como sigue:

$$\int_\alpha^\beta f(\tau)d\tau = \left[\left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)dx\right)\right].$$

EJEMPLO 17. Sea

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \lambda & \text{si } 0 < \tau < \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

donde λ es un número infinito positivo, entonces:

$$\int_\alpha^\beta \delta(\tau)d\tau = 1 \, , \qquad \int_\alpha^\beta \delta^2(\tau)d\tau = \lambda$$

para cualquier $\alpha < 0$ no infinitesimal, $\beta > 0$ no infinitesimal.

De la definición de la integral, es fácil comprobar las mismas propiedades y formulas de integración conocidas de la integral en el cálculo real, incluyendo integración por partes.

TEOREMA 5. *Sea* $f \in G$ *integrable. Si* $f(\tau)$ *es infinitesimal para todo* $\tau \in \mathbb{R}^*$ *en el intervalo finito* $[\alpha,\beta]$ *entonces*

$$\int_\alpha^\beta f(\tau)d\tau \approx 0.$$

Demostración. Dado $c > 0$ *real* cualquiera, tenemos $|f(\tau)| < c$, por lo tanto:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(\tau)d\tau\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(\tau)|d\tau \leqslant \int_\alpha^\beta c\,d\tau = c(\beta-\alpha).$$

Como $c > 0$ es un real cualquiera, se tiene que

$$\int_\alpha^\beta f(\tau)d\tau \approx 0.$$

ANTIDERIVADA. Si $f \in G$ es integrable entonces la función $F:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ definida por:

$$F(\tau) = \int_\alpha^\tau f(\tau)d\tau \qquad (\alpha \in \mathbb{R}^*) \tag{3}$$

pertenece a G. En efecto, si $f = \mathrm{gen}(f_n)$, $\alpha = [(a_n)]$, $\tau = [(x_n)]$ entonces $F = \mathrm{gen}(F_n)$ con

$$F_n(x) = \int_{a_n}^x f_n(t)dt \qquad (n = 1,2,3,\dots).$$

Si F es derivable, tenemos inmediatamente que $F' = f$ o sea que la función $F \in G$ dada por (3) es una *antiderivada*.

Por otra parte, si $h \in G$ satisface

$$h' = 0 \tag{4}$$

entonces h es una función constante no-estándar. En efecto: sea $h = \text{gen}(h_n)$, entonces la ecuación (4) implica que $\{n : h'_n = 0\} \in F^*$, o sea $A = \{n : h_n = c_n,\ c_n \text{ es una constante}\} \in F^*$. Si escogemos h_n = la función nula para $n \notin A$, entonces se tiene que h es la función constante del valor c con $c = [(c_n)]$.

De lo anterior, se tiene la siguiente propiedad. Dos antiderivadas de una función no-estándar de la clase G difieren en una constante (no-estándar). Una (cualquiera) antiderivada de la función $f \in G$ se denota por $D^{-1}f$.

TEOREMA 6. *Supongamos que* $f \in G$ *posee una antiderivada de valor infinitesimal, entonces para todo* $g \in G$ *de valor finito y derivable con derivada finita, se tiene que*

$$\int_\alpha^\beta f(\tau)\, g(\tau) d\tau \approx 0.$$

Demostración. Sea $F(\tau)$ una antiderivada de f del valor infinitesimal: $F'(\tau) = f(\tau)$. Aplicando integración por partes:

$$\int_\alpha^\beta f(\tau)\, g(\tau) d\tau = \int_\alpha^\beta F'(\tau)\, g(\tau) d\tau$$

$$= F(\tau)\, g(\tau)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(\tau) g'(\tau) d\tau \approx 0$$

puesto que $F(\tau)g(\tau)$ y $F(\tau)g'(\tau)$ son de valor infinitesimal.

EJEMPLO 18. Si $f = \text{gen}(f_n)$ con $f_n(x) = \text{sen}\, nx$ entonces:

$$\int_a^x f_n(x) dx = \frac{\cos na - \cos nx}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

uniformemente en $\mathbb{R}$, o sea que f posee una antiderivada g de valor infinitesimal. Aplicando el Teorema 6, tenemos:

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(\tau)\ \{\text{gen}(\text{sen } nx)\}d\tau \approx 0\ ,$$

el cual es una adaptación no-estándar del Lema de Riemann-Lebesgue.

§6. Modelo no-estándar de la función delta de Dirac.

Decimos que una función $\delta \in G$ es un *modelo no-estándar* de la función delta de Dirac si δ satisface las tres condiciones:

(i) $\delta(\tau) \geqslant 0$ para todo $\tau \in \mathbb{R}^*$

(ii) $\delta(\tau) \approx 0$ para todo $\tau \not\approx 0$.

(iii) $\int_{\alpha}^{\beta} \delta(\tau)d\tau \approx 1$ para algún $\alpha < 0$ no infinitesimal y algún $\beta > 0$ no infinitesimal.

Tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 7. *Si* $f \in G$ *es de valor finito y continua en* 0 *entonces*

$$\int_{c}^{d} f(\tau)\ \delta(\tau)d\tau \approx f(0) \tag{1}$$

donde Est $c < 0$ *y* Est $d > 0$.

Demostración. Sea $g \in G$ tal que

$$g(\tau) = f(\tau) - f(0) \qquad \tau \in \mathbb{R}^*, \tag{2}$$

entonces g es de valor finito, y continua en 0, es decir $g(\tau) \approx g(0) = 0$ si $\tau \approx 0$. Por el Teorema 3, dado $r > 0$ *real* existe h > 0 *real* tal que $-r < g(\tau) < r$ para todo $\tau \in \mathbb{R}^*$ con $|\tau| < h$. Como $\delta(\tau) \geqslant 0$ para todo $\tau \in \mathbb{R}^*$ tenemos:

$$-r\delta(\tau) \leqslant g(\tau)\delta(\tau) \leqslant r\delta(\tau),$$

luego

$$-r\int_{-h}^{h} \delta(\tau)d\tau \leqslant \int_{-h}^{h} g(\tau)\delta(\tau)d\tau \leqslant r\int_{-h}^{h} \delta(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Como $\delta(\tau) \approx 0$ para todo $\tau \not\approx 0$ se tiene:

$$\int_{-h}^{h} \delta(\tau)d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(\tau)d\tau - \int_{h}^{\beta}\delta(\tau)d\tau - \int_{\alpha}^{-h} \delta(\tau)d\tau$$
$$\approx \int_{\alpha}^{\beta} \delta(\tau)d\tau \approx 1. \tag{4}$$

De la misma manera:

$$\int_{-h}^{h} g(\tau)\delta(\tau)d\tau \approx \int_{c}^{d} g(\tau)\delta(\tau)d\tau \tag{5}$$

puesto que $g(\tau)\delta(\tau) \approx 0$ para todo $\tau \not\approx 0$. De (3), (4) y (5) tenemos:

$$-r \leqslant \int_{c}^{d} g(\tau)\delta(\tau)d\tau \leqslant r \qquad \text{(para todo } r > 0, \textit{real}),$$

o sea:

$$\int_{c}^{d} g(\tau)\delta(\tau)d\tau \approx 0.$$

Por lo tanto

$$\int_{c}^{d} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{c}^{d} (g(\tau)+f(0))\delta(\tau)d\tau$$
$$= \int_{c}^{d} g(\tau)\delta(\tau)d\tau + f(0)\int_{c}^{d} \delta(\tau)d\tau \approx f(0). \quad \blacksquare$$

Todas las funciones no-estándar dadas en los ejemplos 1, 2,3,4 de los parágrafos 1 y 2 son modelos no-estándar de la función delta de Dirac.

Una antiderivada de δ:

$$(D^{-1}\delta)(\tau) = \int_c^{\tau} \delta(\tau)d\tau \quad (\text{Est } c < 0)$$

satisface evidentemente las siguientes propiedades:

$D^{-1}\delta \in G$ es acotada,

$(D^{-1}\delta)(\tau) \approx 0$ si $\tau \in \mathbb{R}^*$, negativo no infinitesimal.

$(D^{-1}\delta)(\tau) \approx 1$ si $\tau \in \mathbb{R}^*$, positivo no infinitesimal.

Una función acotada y derivable $H(\tau) \in G$ que satisface las dos condiciones siguientes se llama *un modelo no-estándar de la función de Heaviside*:

(i) $H(\tau) \approx 0$ si $\tau \in \mathbb{R}^*$, $\tau \leqslant \varepsilon_1$, para algún infinitesimal negativo ε_1.

(ii) $H(\tau) \approx 1$ si $\tau \in \mathbb{R}^*$, $\tau \geqslant \varepsilon_2$, para algún infinitesimal positivo ε_1.

La función H dada en el Ejemplo 12 es un modelo no-estándar de la función de Heaviside.

El siguiente teorema nos muestra que H' también satisdace la fórmula (1) a pesar de que H' no siempre satisface las condiciones (i) y (ii) de la función δ, dadas en la definición de δ.

TEOREMA 8. *Sea* $f \in G$ *de valor finito, derivable con derivada acotada. Si* f *es continua en* 0 *entonces*

$$\int_c^d f(\tau)H'(\tau)d\tau \approx f(0) \qquad (6)$$

donde H *es un modelo no-estándar de la función de Heaviside y* Est $c < 0$, Est $d > 0$.

Demostración. Aplicando integración por partes,

$$\int_c^d f(\tau)H'(\tau)d\tau = f(d)H(d)-f(c)H(c) - \int_c^d f'(\tau)H(\tau)d\tau$$

$$\approx f(d) - \int_c^d f'(\tau)H(\tau)d\ . \tag{7}$$

Tenemos, por otra parte,

$$\int_c^d f'(\tau)H(\tau)d\tau = \int_c^{\varepsilon_1} f'(\tau)H(\tau)d\tau + \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f'(\tau)H(\tau)d\tau$$

$$+ \int_{\varepsilon_2}^d f'(\tau)H(\tau)d\tau.$$

Pero

$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f'(\tau)H(\tau)d\tau \approx 0$, puesto que $f'(\tau)H(\tau)$ es acotada.

$\int_c^{\varepsilon_1} f'(\tau)H(\tau)d\tau \approx 0$, puesto que $f'(\tau)H(\tau) \approx 0$.

$\int_{\varepsilon_2}^d f'(\tau)H(\tau)d\tau \approx \int_{\varepsilon_2}^d f'(\tau)d\tau$, puesto que $H(\tau) \approx 1$ y f' es acotada.

Por lo tanto

$$\int_c^d f'(\tau)H(\tau)d\tau \approx \int_{\varepsilon_2}^d f'(\tau)d\tau = f(d)-f(\varepsilon_2). \tag{8}$$

Reemplazando (8) en (7):

$$\int_c^d f(\tau)H'(\tau)d\tau \approx f(\varepsilon_2) \approx f(0)$$

ya que $\varepsilon_2 \approx 0$ y f es continua en 0. ■

EJEMPLO 19. Sea $H = \text{gen}(H_n)$ con

$$H_n(x) = \int_{-1}^{x} h_n(x)dx, \qquad h_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{\text{sen } nx}{x} & (x \neq 0) \\ \frac{n}{\pi} & (x = 0) \end{cases},$$

entonces H es un modelo no-estándar de la función de Heaviside. En este caso, (6) es una adaptación no-estándar del teorema de Jordan. ■

§8. Representación no-estándar de las distribuciones.

Sea $\mathcal{D}$ el espacio de todas las funciones reales de (C^∞) con soporte acotado. Una sucesión de funciones (reales) en $\mathcal{D}$, (f_n), converge a f_0 en $\mathcal{D}$ si:

(i) Existe $M > 0$ tal que $f_n(x) = 0$ si $|x| \geqslant M$, para todo n,

(ii) $f_n \to f_0$ y $D^k f_n \to D^k f_0$ *uniformemente* en $[-M,M]$ para cada $k = 1,2,3,\ldots$.

Un elemento $T \in \mathcal{D}'$ (el espacio dual de $\mathcal{D}$) es una *distribución*, o sea, T es una *aplicación lineal continua* de $\mathcal{D}$ en $\mathbb{R}$. Denotemos por $\langle T,f\rangle$ el valor de la distribución T aplicada a $f \in \mathcal{D}$.

Según el Teorema 7, una función $\delta \in G$, *que sea un modelo no-estándar de la función delta*, determina la *distribución delta* por:

$$\langle\delta,f\rangle = \text{Est}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)f^*(\tau)d\tau. \qquad (1)$$

donde f^* es la extensión natural de $f \in \mathcal{D}$. (La notación

$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots d\tau$ significa la integral $\int_{-M}^{M} \ldots d\tau$ para un $M > 0$ donde $[-M,M]$ contiene el soporte de la función f.)

En forma más general, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 9. *Sea* h $\in G$ *una función no-estándar tal que dado un intervalo finito existe alguna antiderivada (de orden* k *para algún* $k \geq 0$) *acotada en él. Entonces la función* h *determina una distribución (la denotamos también por* h) *por:*

$$\langle h,f\rangle = \mathrm{Est} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f^{*}(\tau)d\tau \qquad (2)$$

donde f^{*} *es la extensión natural de* f.

Demostración. Dado $f \in \mathcal{D}$, sea $[-M,M]$ un intervalo que contiene el soporte de f. Supongamos que $D^{-k}h$ es acotada en $[-M,M]$ entonces aplicando k veces integración por parte tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f^{*}(\tau)d\tau = \int_{-M}^{M} h(\tau)f^{*}(\tau)d$$

$$= (D^{-1}h)(\tau)f^{*}(\tau)\Big|_{-M}^{M} - \int_{-M}^{M} (d^{-1}h)(\tau)(Df^{*})(\tau)d\tau$$

$$= \cdots$$

$$= (-1)^{k}\int_{-M}^{M} (D^{-k}h)(\tau)(D^{k}f^{*})(\tau)d\tau, \qquad (3)$$

puesto que $f^{*}(\tau),(Df^{*})(\tau),\ldots,(D^{k}f^{*})(\tau)$ son nulos en $\tau = \pm M$. Por la acotación de la función $(D^{-k}h)(\tau)$ en el intervalo $[-M,M]$, la integral en (3) toma valor finito y

$$\mathrm{Est} \int_{\infty}^{\infty} h(\tau)f^{*}(\tau)d\tau \text{ es un número real.}$$

Por otra parte, si $f_n \to f_0$ en $\mathcal{D}$, entonces existe un intervalo

$[-M,M]$ tal que los soportes de f_n $(n = 1,2,3,\ldots)$ están contenidos en él. Como $D^k f_n \to D^k f_0$ uniformemente en $[-M,M]$, entonces la fórmula (3) garantiza la continuidad de la aplicación $h:\mathcal{D} \to \mathbb{R}$. ■

Si la función no-estándar $h \in G$ determina la distribución $h \in \mathcal{D}'$, entonces la derivada $Dh \in G$ determina la derivada de la distribución $h' \in \mathcal{D}'$. En efecto, para $f \in \mathcal{D}$ tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (Dh)(\tau)f^*(\tau)d\tau = \int_{M}^{M} (Dh)(\tau)f^*(\tau)d\tau$$

$$= \underbrace{h(\tau)f^*(\tau)}_{0}\Big|_{-M}^{M} - \int_{M}^{M} h(\tau)(Df^*)(\tau)d\tau$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)(f')^*(\tau)d\tau\ ,$$

nótese que $(f')^*$ (la extensión natural de la función f') es igual a Df^* (la derivada no-estándar de $f^* \in G$). Por lo tanto, tenemos

$$\langle Dh,f\rangle = \mathrm{Est}\int_{-\infty}^{\infty} (Dh)(\tau)f^*(\tau)d$$

$$= -\mathrm{Est}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f')^*(\tau)d \ = -\langle h,f'\rangle.$$

Por la definición de la derivada de una distribución se obtiene que $h' = Dh$.

Aplicando la integración por partes varias veces, se obtiene inmediatamente el siguiente teorema.

TEOREMA 10. *Sea* $h \in G$ *una función no-estándar de la clase* (C^∞) *que satisface la condición dada en el Teorema 9. La i-ésima derivada de la distribución* h *dada por* (2),

$h^{(i)} \in \mathcal{D}'$, *es igual a la distribución determinada por la función no estándar* $D^i h \in G$, *esto es:*

$$\langle h^{(i)}, f\rangle = \text{Est} \int_{-\infty}^{\infty} (D^i h)(\tau) f^*(\tau) d\tau \qquad (4)$$

donde f^* *es la extensión natural de la función* $f \in \mathcal{D}$.

Existen funciones no-estándar que no son distribuciones, por ejemplo, si δ es un modelo no-estándar de la función delta de Dirac, $\delta^2, \delta^3, \ldots$ son funciones de la clase G pero no son distribuciones. Sin embargo, tenemos el siguiente teorema que garantiza que toda distribución es función no-estándar de la clase G.

TEOREMA 11. *Sea* T *una distribución, entonces existe una función no-estándar* $h \in G$ *tal que*

$$\langle T, f\rangle = \text{Est} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f^*(\tau) d\tau \qquad (5)$$

para todo $f \in \mathcal{D}$, *donde* f^* *es la extensión natural de* f. *Además, se puede escoger* h *en la clase* (C^∞).

Demostración. Sea $\rho_n(t)$ la función real dada en el ejemplo 4, o sea:

$\rho_n(t) \in (C^\infty)$

$\rho_n(t) \geqslant 0$ para todo t

$\rho_n(t) = 0$ si $|t| > \frac{1}{n}$

$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(t) dt = 1.$

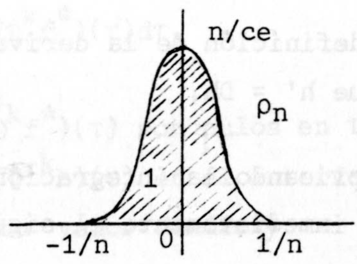

Figura 6

Si $T \subset \mathcal{D}'$ (una distribución) y $f \in \mathcal{D}$. Es conocido y se demuestra en los libros de teoría de distribuciones que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle T_t, \rho_n(t-x)\rangle f(x)dx = \langle T,f\rangle , \qquad (6)$$

donde T_t denota aplicación de T a $\rho_n(t-x)$ como función de t. Sea

$$\langle T_t, \rho_n(t-x)\rangle = h_n(x)$$

entonces el límite (6) puede escribirse como:

$$\langle T,f\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)f(x)dx,$$

o sea que

$$\langle T,f\rangle = \mathrm{Est} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f^*(\tau)d\tau$$

donde $h = \mathrm{gen}(h_n)$ y f^* es la extensión natural de f. Nótese que es fácil demostrar que $h_n \in (C^\infty)$ para todo n, o sea que $h \in G$ es de la clase (C^∞). ■

§9. <u>Algunas aplicaciones</u>.

EJEMPLO 20. Resolver la ecuación diferencial

$$f'' + 3f' + 2f = \delta(x) \qquad (1)$$

En la teoría de distribuciones es necesario emplear el procedimiento relacionado con la transformación de Fourier y la convolución para obtener la solución de la ecuación diferencial del tipo (1). Sin embargo, podemos resolver directamente la ecuación (1) al aplicar el concepto de funciones no-estándar de la clase G. Supongamos que $\delta = \mathrm{gen}(\delta_n)$ con:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n & \text{en } (0,\frac{1}{n}) \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases} \qquad (2)$$

Si $f \in G$, $f = \text{gen}(f_n)$, entonces la ecuación (1) se convierte en:

$$(f_n)'' + 3(f_n)' + 2f_n = \delta_n(x) \quad (n=1,2,\ldots) \qquad (3)$$

así se obtiene:

$$f_n(x) = A_n e^{-x} + B_n e^{-2x} + e^{-x} g_n(x) - e^{-2x} h_n(x) \qquad (4)$$

donde A_n, B_n son constantes, y

$$g_n(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{t}\delta_n(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ n(e^{x}-1) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ n(e^{1/n}-1) & \text{si } x \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$h_n(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{2t}\delta_n(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{n}{2}(e^{2x}-1) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}(e^{2/n}-1) & \text{si } x \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

Sean $g = \text{gen}(g_n)$, $h = \text{gen}(h_n)$, $\lambda = [(n)]$, entonces:

$$g(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \leqslant 0 \\ \lambda(e^{\tau}-1) \approx \lambda\tau & \text{si } 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{\lambda} \\ \lambda(e^{1/\lambda}-1) \approx 1 & \text{si } \tau \geqslant \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$h(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}\lambda(e^{2\tau}-1) \approx \lambda\tau & \text{si } \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{2}\lambda(e^{2/\lambda}-1) \quad 1 & \text{si } \tau \geqslant \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente solución general de la ecuación diferencial (1):

$$f(\tau) = Ae^{-\tau}+Be^{-2\tau}+e^{-\tau}g(\tau)-e^{-2\tau}h(\tau) \qquad (4)$$

donde $\tau \in \mathbb{R}^*$ y A, B son constantes no-estándar. Obsérvese que $g(\tau)$ y $h(\tau)$ son modelos no-estándar de la función de Heaviside; si se define $H \in G$ por

$$H(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \leqslant 0 \\ \lambda\tau & \text{si } 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{\lambda} \\ 1 & \text{si } \tau \geqslant \frac{1}{\lambda} \end{cases} \qquad (5)$$

entonces

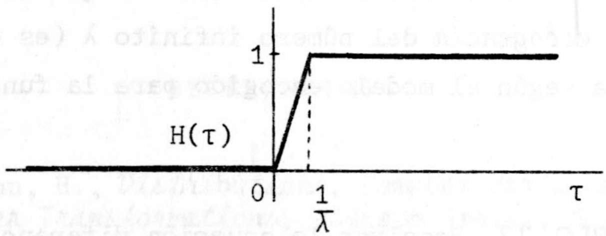

Figura 7

$$g(\tau) \approx H(\tau) \qquad h(\tau) \approx H(\tau).$$

De (4) tenemos:

$$f(\tau) \approx Ae^{-\tau} + Be^{-2\tau} + H(\tau)\{e^{-\tau}-e^{-2\tau}\} \qquad (6)$$

Nótese que $e^{-\tau}$ y $e^{-2\tau}$ son extensiones naturales de las funciones exponenciales e^{-x} y e^{-2x}, respectivamente.

EJEMPLO 21. Resolver la ecuación diferencial

$$f'' + 3f' + 2f = (\delta(x))^2 \qquad (7)$$

Esta ecuación no tiene significado alguno en el marco de la teoría de distribuciones, pero sí podemos resolverla en nuestra teoría precisando δ como una función no-estándar de clase G. Supongamos que

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \lambda \text{ en } (0, \frac{1}{\lambda}) \\ 0 \text{ en otra parte,} \end{cases} \tag{8}$$

donde λ es un número *infinito positivo*. Haciendo un cálculo similar al caso del ejemplo 20 se obtiene por solución de (7):

$$f(\tau) = Ae^{-\tau}+Be^{-2\tau}+\lambda\{e^{-\tau}-e^{-2\tau}\}\{H(\tau) + \varepsilon(\tau)\} \tag{9}$$

donde $\varepsilon(\tau)$ es una función de valor infinitesimal para todo $\tau \in \mathbb{R}^*$, $A,B \in \mathbb{R}^*$. Es interesante observar que la solución depende de la *escogencia* del número infinito λ (es decir, la solución varía según el modelo escogido para la función delta de Dirac δ).

EJEMPLO 22. Resolver la ecuación diferencial

$$f'' + 3f' + 2f = \tau(\delta(\tau))^2 , \qquad \tau \in \mathbb{R}^* \tag{10}$$

donde $\delta:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ es la función no-estándar dada por (8).

Haciendo un cálculo similar al caso del ejemplo 20 se obtiene por solución

$$f(\tau) = Ae^{-2\tau} + e^{-\tau}p(\tau) - e^{-2\tau}q(\tau) \tag{11}$$

donde

$$p(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \leqslant 0 \\ \lambda^2\{\tau e^{\tau}+(1-e^{\tau})\} \approx \frac{1}{2}\lambda^2\tau^2 & \text{si } 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{\lambda} \\ \lambda e^{1/\lambda}+\lambda^2(1-e^{1/\lambda}) \approx \frac{1}{2} & \text{si } \tau \geqslant \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$q(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \geqslant \tau \\ \lambda^2\{\tfrac{1}{2}\tau e^{2\tau}+\tfrac{1}{4}(1-e^{2\tau})\} \approx \tfrac{1}{2}\lambda^2\tau^2 & \text{si } 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{\lambda} \\ \tfrac{1}{2}\lambda e^{2/\lambda}+\tfrac{1}{4}\lambda^2(1-e^{2/\lambda}) \approx \tfrac{1}{2} & \text{si } \tau \geqslant \frac{1}{\lambda}\,. \end{cases}$$

Utilizando la función $H \in G$ definida en el Ejemplo 20, podemos escribir la solución (10) como sigue

$$f(\tau) \approx Ae^{-\tau}+Be^{-2\tau}+\tfrac{1}{2}\{H(\tau)\}^2(e^{-\tau}-e^{-2\tau})\,. \tag{12}$$

Obsérvese que $H^2 \in G$ es también un modelo no-estándar de la función de Heaviside. ∎

*

REFERENCIAS

[1] Bremermann, H., *Distributions, Complex Variables and Fourier Transformations*, Addison Wesley, New York,1965.

[2] Moore, S.M., *Non Standard Analysis and Generalized Functions*, Revista Col. de Mat., Vol.XIV, Nº 2, 1980.

[3] Robinson, A., *Non-standard analysis*, Norht Holland, 1966.

[4] Stroyan, K.D. and Luxemburg, W.A., *Introduction to the theory of infinitesimals*, Academic Press, 1976.

[5] Takeuchi, Y., *Sucesiones y Series*, Tomo I, II, Editorial Limusa, México, 1976.

[6] Takeuchi, Y., *Sucesiones de Funciones y Teoría de Distribuciones*, Sociedad Colombiana de Matemáticas, Bogotá 1979.

[7] Tellez, J.I., *Un modelo no-estándar de funciones generalizadas*, Tesis de grado, Universidad Nacional, Bogotá, 1983.

*

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Apartado Aéreo
Bogotá, D.E., COLOMBIA.

(Recibido en Febrero de 1983)