Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XVIII (1984), págs. 41 - 82

SUR LA LOGIQUE DE PREMIER ORDRE ET LA THÉORIE DES CATÉGORIES*

par

Jorge HERRERA

RESUMEN. Dada una teoría de primer orden T, se estudia la categoría M(T) de modelos de T agrupando resultados dispersos de teoría de modelos y se establecen equivalencias entre las propiedades categóricas de M(T) y las propiedades sintácticas de T. Por ejemplo, se muestra que el functor olvidadizo $G:M(T) \to$ *Conjuntos* es monádico (tripleable) si y sólamente si T es Horn convexa positiva, se dan también condiciones necesarias y suficientes sobre T para que M(T) sea una categoría abeliana.

§0. **Introducción**. Kan a introduit la notion de Foncteur Adjoint [Kan D.N., *Adjoint Functors*, Trans. A.M.S. 87 (1958), 294-329] et Freyd [*Abelian Categories*, Harper and Row 1964] a

---

* Versión escrita de una conferencia presentada en el V Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática, Bogotá, Julio de 1981.

trouvé le Théoreme du Foncteur Adjoint. D'autre part, Mal'cev introduit les quasivariétés et avec Grätzer développe l'algèbre universelle. Le pont entre les idées de MacLane, Kan, Freyd et celles de Mal'cev et Grätzer est fait grâce aux théories convexes de Bacsich et Hughes, [3]. Les résultats sont les suivants. Soit L un langage de premier ordre, T une théorie de L, M(T) la catégorie de modèles de T et G le foncteur d'oubli de M(T) vers les Ensembles; a des fonctions de Skolem près, on a les équivalences suivantes:

Propriété catégorique	**Propriété syntaxique**
M(T) est complète et G a un Adjoint	T est une quasivariété
M(T) est presque complète	T est Horn convexe ou T est Horn universelle
G est monadique	T est Horn convexe et positive ou T est une variété

etc...

Soit L = {R,...F,...c,...} un langage de premier ordre, les symboles de relations sont R,..., les symboles des fonctions sont F,..., les symboles de constants sont c,... Soit T une théorie de L. Les notations sont celles de Chang-Keisler [1973], un modèle de L ou une réalisation de L c'est la même chose.

0.1. DÉFINITION. Soit M(L,T) la catégorie définie de la manière suivante. Les objets sont les modèles de T. Si A et B sont deux objects de M(L,T), les fleches $f:A \to B$ sont les applications ensemblistes de A dans B, vérifiant:

(a) pour tout symbole de relation R à n places et tout n-uple $(a_1,\ldots,a_n) \in A^n$:

$$A \models R(a_1,\ldots,a_n) \Rightarrow B \models R(f(a_1),\ldots,f(a_n)),$$

(b) pour tout symbole de function F à n variables et tout n+1-uple $(a_1,\ldots,a_n,b) \in A^{n+1}$:

$$A \models b = F(a_1,\ldots,a_n) \Rightarrow B \models f(b) = F(f(a_1),\ldots,f(a_n)),$$

(c) pour toute constante c (réalisation de c): $f(c) = c$.

On écrira parfois $M(T)$ a la place de $M(L,T)$.

0.2. DÉFINITION. On appelle *foncteur d'oubli* $G: M(T) \to Ens$ le foncteur défini par $G(A,R,\ldots,F,\ldots,C,\ldots) = A$ et $G(f) = f$.

§1. Objets initiaux de $M(T)$.

1.1. Nous appellerons *objet initial* de M(T) tout objet A de M(T) tel que pour tout modele B de T il existe un et un seul homomorphisme h de A dans B.

1.2. Nous appellerons *formule pure*, toute formule $\phi(\bar{x})$ de la forme

$$\exists \bar{y}(\phi_1(\bar{x},\bar{y}) \wedge \ldots \wedge \phi_n(\bar{x},\bar{y}))$$

avec $\bar{y} = (y_1,\ldots,y_n)$, $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ et les ϕ_i atomiques $\in$ L.

1.3. DÉFINITION. Nous définirons le modele ALT de la façon suivante: soit

$$A = \{\phi(x) \in L \mid \phi(x) \text{ est pure et } T \vdash \exists^1 x\phi(x)\}$$

où $\exists^1 x\phi(x)$ est $\exists x[\phi(x) \wedge \forall z(\phi(z) = \phi(x) \rightarrow z = x)]$. Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur A suivante:

$$\phi_1(x) \sim \phi_2(x) \text{ si et seulement si } T \vdash \forall x(\phi_1(x) \leftrightarrow \phi_2(x)).$$

Soit $\pi: A \rightarrow A/\sim$ la projection canonique. On définira ALT par: $g(\mathrm{ALT}) = \pi(A)$,

(a) $\mathrm{ALT} \models R\,[\pi\phi_1,\ldots,\pi\phi_n]$ si et seulement si

$$T \vdash \phi_1(x_1) \wedge \ldots \wedge \phi_n(x_n) \rightarrow R(x_1,\ldots,x_n).$$

(b) $F(\pi\phi_1,\ldots,\pi\phi_p) = \pi(\phi(x))$, où $\phi(x)$ est la formule

$$\exists x_1 \ldots x_p(\phi_1(x_1) \wedge \ldots \wedge \phi_n(x_n) \wedge (x = F(x_1,\ldots,x_p)))$$

(c) $c = \pi(x = c)$.

1.4. PROPOSITION. *On a les propriétés de* ALT:

(I) *Soit* $t(x_1,\ldots,x_n)$ *un terme de* L, *on a*

$$t[\pi\phi_1,\ldots,\pi\phi_n] = \pi(\phi(x)),$$

où $\phi(x)$ *est la formule* $\exists x_1 \ldots x_n(\phi_1(x_1) \wedge \ldots \wedge \phi_n(x_n) \wedge (x = t(x_1,\ldots,x_n)))$.

(II) *Soit* $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ *une formule atomique de* L, *alors*

$$\mathrm{ALT} \models \phi[\pi\phi_1,\ldots,\pi\phi_n]$$

si et seulement si $T \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i(x_i) \rightarrow \phi(x_1,\ldots,x_n)$.

(III) *Si* ALT $\models$ T, *et* $\phi(x) \in A$ *alors* $\mathrm{ALT} \models \phi[\pi\phi]$.

(IV) *Si* ALT $\models$ T, *alors* ALT *est un objet initial de* M(T).

1.5. PROPOSITION. *Si* M(T) *a un modèle initial* A_0, *alors* A_0 *est isomorphe à* ALT.

Démonstration. La démonstration est implicite dans Kreisel: *Model theoretic invariants,* the Theory of Models, Addison, Henkin, Tarski editors, North Holland 1965 .

1.6. THÉORÈME. M(T) *a un objet initial si et seulement si* ALT $\models$ T.

1.7. Nous appellerons *constante implicite* de T toute formule $\phi(x) \in A$.

1.8. Soit X un ensemble. On définit le langage $L_X = L + \{C_\lambda | \lambda \in X\}$ avec C_λ nouveau symbole de constante. On définit la théorie T_X par

$$T + \{C_\lambda = C_\lambda \mid \lambda \in |X|\}.$$

1.9. THÉORÈME. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(a) G:M(T) $\to$ Ens *a un adjoint,*

(b) $AL_X T_X \models T_X$, *pour chaque ensemble* X.

§2. Sur les theories Horn convexes.

2.1. Les définitions de *limite, colimite, noyau, catégorie,* catégorie *complète,...* sont celles de la théorie des catégories [Pareigis, 1970]. On dira qu'un produit (resp. noyau, resp. limite) de M(T) est *canonique* si le foncteur

$$G:M(T) \longrightarrow \text{Ens}$$

le préserve. On dira que M(T) a des *presque produits* si M(T) a des produits, sauf éventuellement le produit de la famille vide. On dira que M(T) est *presque complète* si M(T) a des presque produits et des noyaux. Un produit (resp. un presque produit, un noyau) est *canonique* si le foncteur G le préserve. On dira que M(T) est *canoniquement complète* (resp. *canoniquement presque complète*) si M(T) est complete (resp. *presque complète*) et si G préserve les limites (resp. presque limites).

2.2. PROPOSITION. *Soit* M(T) *complete. Les conditions suivantes sont équivalentes*
(a) G *a un adjoint,*
(b) M(T) *est canoniquement complete.*

Démonstration. [Freyd, 1964] et [Freyd, 1965].

2.3. M(T) est appelée *convexe* si les conditions suivantes

$$A,B,C \models T, \qquad A \subset C, \qquad B \subset C, \qquad A \cap B = \phi$$

entraînent $A \cap B \models T$. T est *convexe* si M(T) l'est.

2.4. PROPOSITION. *Si* M(T) *a des presque produits canoniques, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*
(a) M(T) *a des noyaux canoniques,*
(b) M(T) *est convexe.*

Démonstration. Exercice.

2.5. REMARQUE. Soit M(T) presque complete et soit $f:A \to B$ une flèche de M(T). Soit $\mathbf{C}$ l'ensemble de classes d'isomorphisme de monomorphismes

$$h_i : A_i \longrightarrow B$$

tels qu'ils se factorisent par f:

$$A \xrightarrow{f} B = A \xrightarrow{g_i} A_i \xrightarrow{h_i} B \; ,$$

alors Image(f) = produit fibré des h_i.

2.6. PROPOSITION. *Soit* M(T) *presque complète et* $f,g : A \rightrightarrows B$ *deux flèches de* M(T). *S'il existe* $h : B \to C$ *avec* $C \models T$ *et* $hf = hg$, *alors il existe* Coker(f,g) *dans* M(T).

Demonstration. Soit le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h_1"'] & & C \\ & & \mathrm{Image}(h) \arrow[ur, "h_2"'] & \end{tikzcd}$$

On a h_2 mono, h_1 épi et $h_1 f = h_1 g$. M(T) est co-well powered [Freyd, 1964]. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble d'objets quotients p de B tels que pf = pg. Soit *but*(p) le but de la flèche p. Soit le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "{[p]}"] \arrow[dr, "p"'] & \prod\limits_{\mathcal{C}} \mathit{but}(p) \arrow[d] \\ & & \mathit{but}(p) \end{tikzcd}$$

alors Coker(f,g) = Image([p]).

2.7. PROPOSITION. *Soit* M(T) *presque complète et* $f,g : A \rightrightarrows B$ *deux flèches de* M(T). *S'il existe* $h : C \to A$ *avec* $\dot{C} \models T$ *et* $fh = gh$, *alors il existe* Ker(f,g) *dans* M(T). M(T) *presque complète veut dire que* M(T) *a des colimites, sauf peut être l'objet initial.*

2.8. Etant donnée une famille $F = (A_i \xrightarrow{x_i} C)$ des flèches de M(T), on dira qu'un sous-objet $C' \xrightarrow{x} C$ *réduit* F si chaque x_i se factorise par x:

$$A_i \xrightarrow{x_i} C = A_i \longrightarrow C' \xrightarrow{x} C$$

F *engendre* C si aucun sous-objet propre de C ne réduit F. On dira que $\{A_i\}$ *engendre* C *au moyen de* $\{x_i\}$ si $x_i:A_i \to C$ engendre C.

2.9. PROPOSITION. *Soit* $\{A_i\}$ *une famille de modèles de* T. *Alors la classe* $C = \{c \mid$ *il existe une famille* x_i *tel que* $\{A_i\}$ *engendre* c *au moyen de* $\{x_i\}\}$ *a une sous-classe* $C' \subset C$ *telle que*

(a) C' *est une ensemble,*

(b) *si* $c' \in C'$ *alors il existe* $c \in C$ *tel que* c *est isomorphe a* c'.

Démonstration. Il existe une famille $x_i:A_i \to C$ si et seulement si $C \models T + \bigcup_i \Delta_+(A_i)$; il en résulte que pour toute famille $x_i:A_i \to C$ telle que $|C| \geqslant \|L\| + \sum_i \Delta_+(A_i)$ il existe $C' < C$ avec

$$|C'| \leqslant \|L\| + \sum_i |\Delta_+(A_i)|$$

tel qu'on a

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "x_i"] \arrow[dr] & & C \\ & C' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

2.10. PROPOSITION. *Soit* M(T) *presque complète et* $F = (A_i \xrightarrow{x_i} C)$ *une famille de flèches de* M(T); *alors il existe un sous-objet* $C' \to C$ *et une famille* $y_i:A_i \to C'$, *tels que* C' *réduit* C *et* $\{A_i\}$ *engendre* C' *au moyen de* $\{y_i\}$; *en outre on a le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "x_i"] \arrow[d, "y_i"'] & C \\ C' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de sous-objects $h_i : C_i \to C$ tels que h_i réduit F. Alors C' est le produit fibré des h_i.

2.11. PROPOSITION. *Soit* M(T) *presque complète,* A_i *une famille de modèles de* T. *S'il existe un modele* B *de* T *et les flèches* $f_i : A_i \to B$, *alors la somme des* A_i *existe dans* M(T).

2.12. REMARQUE. *Calcul des limites projectives dans* M(T). Soit $F:\mathcal{D} \to M(T)$ un foncteur et $\mathcal{D}$ une catégorie petite. Si M(T) a des noyaux et des produits, la limite projective de F peut être calculée de la façon suivante. Soit $x:C \to D$ une flèche de $\mathcal{D}$ avec *source*(x) = C et *but*(x) = D. Soit le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{C\in Ob(\mathcal{D})} F(C) \arrow[r, "\hat{x}"] \arrow[dr, "F(x)p_{source(x)}"'] & \prod\limits_{x\in Fl(\mathcal{D})} F(but(x)) \arrow[d, "p_x'"] & \prod\limits_{C\in Ob(\mathcal{D})} F(C) \arrow[l, "\hat{y}"'] \arrow[dl, "p_{but(x)}"] \\ & F(but(x)) & \end{tikzcd}$$

avec $p_x' = p_{but(x)}$. Alors on a

$$\lim_{\leftarrow} F = \mathrm{Ker}(\hat{x},\hat{y}).$$

Il y a un calcul analogue pour les colimites.

2.13. PROPOSITION. *Si* M(T) *est presque complète, alors* M(T) *a des limites inductives filtrantes.*

2.14. THÉORÈME. *Les conditions suivantes sont équi-*

valentes:

(a) M(T) *est canoniquement presque complète.*

(b) *Il existe une théorie* T_1 *Horn convexe telle que* $\vdash T \leftrightarrow T_1$.

Démonstration. (a) $\rightarrow$ (b). Soit I un ensemble, D un filtre sur I et $A_i \models T$. On veut prouver que

$$\prod_D A_i \models T.$$

On définit le foncteur $F:D \rightarrow M(T)$

$$F(X) = \prod_{i\in X} A_i.$$

Si $X \supset Y$ alors $F(X \supset Y)$ est défini par

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in X} A_i \arrow[r, "F(X\supset Y)"] \arrow[dr] & \prod_{i\in Y} A_i \arrow[d] \\
 & A_i
\end{tikzcd}$$

On soit que $\prod_D A_i$ est isomorphe a $\varinjlim F$. D'apres 2.13. et Richter, [1971] on a $\prod_D A_i \models T$

3. Caracterisation des formules horn convexes.

3.1. Une théorie T est *fortement convexe* si les conditions suivantes:

$$A_i \models T, \qquad A \models T, \qquad A_i \subset A, \qquad \bigcap A_i \neq \phi$$

entraînent $\bigcap A_i \models T$. Soit T fortement convexe et $A \models T$. A est appelé *modèle coeur* si A n'a pas de sous-modèle propre .

3.2. PROPOSITION. *Soit* F *un ensemble de formules atomiques généralisées* [Keisler, 1960] *et* $A \models L$. *Pour toute formule* $\alpha(x)$ *et tout vecteur* $\bar{a} \in A$, *les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $T + \Delta_F(A) \vdash \alpha(\bar{a})$.

(ii) $A \models \beta(\bar{a})$ *pour quelque* $\beta(\bar{x}) \in \exists \wedge F$ *(ou* $\exists\forall \wedge F$*) telle que* $T \vdash \beta \to \alpha$.

Démonstration. [Bacsich et Hughes, 1974].

3.3. Soit L' une extension de L, $\alpha \in L'$ est *persistante supérieurement* si les conditions suivantes:

$$A,B \models T, \quad A \subset B, \quad \bar{a} \in A, \quad A \models \alpha(\bar{a})$$

entraînent $B \models \alpha(\bar{a})$; $\alpha \in L'$ est *persistante inférieurement* si les conditions suivantes:

$$A,B \models T, \quad A \subset B, \quad B \models \alpha(\bar{a}), \quad \bar{a} \in A$$

entraînent $A \models \alpha(\bar{a})$.

3.4. PROPOSITION. *Si* $\alpha(\bar{x}) = \bigvee_{i \in I} \alpha_i(\bar{x})$ *est persistante supérieurement (resp. inférieurement) alors il existe* $\gamma_i(x) \in \exists_1$ *(resp.* $\gamma_j(\bar{x}) \in \forall_1$*) tel que*

$$T \vdash \bigvee_{i \in I} \alpha_i(\bar{x}) \leftrightarrow \bigvee_{j \in J} \gamma_j(\bar{x}).$$

Démonstration. Implicite dans [Robinson, 1963].

3.5. Une formule est *basique*, si elle est atomique ou négation d'une atomique. Une formule $\theta(y)$ est *primitive* si elle est de la forme

$$\exists \bar{z}(\bigwedge_{i=I}^{n} \theta_i(\bar{z},\bar{y}))$$

avec θ_i basiques.

3.6. Soit $B \models T$, $A \subset B$ et $b \in B$. B est *algebraique sur* A *dans* B s'il existe un entier n, une formule primitive $\theta(x,\bar{z})$ et un vecteur $\bar{a} \in A$ tel que $B \models \theta(b,a)$ et $T \vdash \forall\bar{z}\ \exists^{\leq n} x\ \theta(x,z)$.

3.7. THÉORÈME [Robinson, 1963]. *Soit* T *une théorie fortement convexe et* A *un modèle coeur de* T*; alors chaque élément de* A *est algébraique (sur* ϕ *dans* A*).*

3.8. DÉFINITION. Soit $B \models T$, $A \subset B$, $b \in B$ alors $b \in DOM(A,B)$ si et seulement si la relation

$$A \longrightarrow B \xrightarrow{f} C = A \longrightarrow B \xrightarrow{g} C$$

a pour conséquence $f(b) = g(b)$.

3.9. THÉORÈME. $b \in DOM(A,B)$ *si et seulement si il existe une formule pure* $\theta(x,\bar{z})$ *et un vecteur* $a \in \bar{A}$ *tels que* $B \models \phi(b,\bar{a})$ *et* $T \vdash \forall\bar{z}\ \exists^{\leq 1} x\ \theta(x,z)$.

Démonstration. [Bacsich, 1974], où l'hypothese T universelle est superflue.

3.10. Soit $B \models T$, $A \subset B$, $b \in B$. b est appelé *n-puissant sur* A dans B si chaque fois qu'on a

$$A \longrightarrow B \xrightarrow{f_0} C = \ldots = A \longrightarrow B \xrightarrow{f_n} C$$

avec les f_i des injections, il existe $i,j \leq n$, $i \neq j$ tels que $f_i(b) = f_j(b)$.

3.11. THÉORÈME. b *est* n-*puissant sur* A *dans* B *si et seulement si il existe une formule primitive* $\theta(x,\bar{z})$, *un vec-*

teur $\bar{a} \in A$, *tel que*

$$B \models \theta(b,\bar{a}) \quad \text{et} \quad T \vdash \forall \bar{z}\, \exists^{\leq n} x\, \theta(x,z).$$

Démonstration. [Bacsich, 1973].

3.12. PROPOSITION. *Soit* $A \to B$ *une inclusion de* T, b *algébrique sur* A *dans* B. *Si* M(T) *a des presque produits, alors* b *est défini par une formule pure univalente (c'est-à-dire* $T \vdash \forall \bar{z}\, \exists^{\leq 1} x\, \theta(z,x)$).

Démonstration. Soit b n-puissant mais non 1-puissant, alors il existe deux injections $f,g : B \to C$ tels que

$$f/A = g/A \quad \text{et} \quad f(b) \neq g(b),$$

pour $0 \leq i \leq n$ soit $h_i : B \to C^{n+1}$ définit par

$$h_i(x)(j) = \begin{cases} f(x) & i \neq j \\ g(x) & i = j \end{cases}$$

et $K : A \to C^{n+1}$ définit par $K(a)(i) = a$ alors $h_i/A = h_j/A$ et $i \neq j$, $h_i(b) \neq h_j(b)$; donc b n'est pas n-puissant. Soient $u,v : B \to C$ deux homomorphismes de M(T) tels que $u(A) = v/A$. Soit $u^*(x) = (x,u(x))$ et $v^*(x) = (x,v(x))$. On a $u^*/A = v^*/A$ d'où $u^*(b) = v^*(b)$, donc $u(b) = v(b)$. Finalement $b \in DOM(A,B)$ et on peut appliquer le théorème 3.9.

3.13. PROPOSITION. *Soit* T *une théorie fortement convexe Horn et* A *un modèle coeur de* T, *alors chaque élément* b *de* A *est algébrique (sur* ϕ *dans* A) *et il est défini par une formule pure univalente.*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle de la proposition précédente.

3.14. THÉORÈME. *Soit* T *une théorie fortement convexe, Horn. Alors il existe des formules* α_i, *telles que pour tout* $A \models T$

$$A \models \forall x(C_A(x) \longleftrightarrow \bigvee_{i \in I} \alpha_i(x)) \ ;$$

les α_i *peuvent etre choisies universelles ou pures, si* $i \in I$ *on a* $T \vdash \exists^{\leqslant 1} x\ \alpha_i(x)$. C_A *est un nouveau prédicat unaire défini par le coeur.*

Démonstration. Soit R un nouveau prédicat unaire. On sait que M(T) est canoniquement presque-complète. On a

(1) $C_A = \{a \in A \mid$ pour tout $h : A \to C$, $h \in M(T)$ et $B \subset C$ avec $B \models T$ on a $h(a) \in B\}$.

En effect, soit D le produit fibré suivant

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\pi_2} & B \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

On a $D \models T$ et $D = \{(a,b) \mid h(a) = b \in C\}$. π_1 est une injection donc $C_A \subset D$, d'où (1). Soit $L^* = L \cup \{R\} \cup \{C_a\}_{a \in A}$. D'après (1) on a

(2) $C_A = \{a \in A \mid T + T^R + \Delta_+(A) \vdash R(C_a)\}$

où $T^R = \{\sigma^R \mid \sigma \in T\}$, σ^R étant la relativisation de σ. D'après 3.2. on a:

(3) $C_A = \{a \in A \mid$ il existe $\gamma(X)$ pure telle què $A \models \gamma(a)$ et $T\ T^R \vdash \gamma(x) \to R(x)\}$

Soit $a \in C_A$, d'apres le corollaire 3.13 il existe une formule pure $\phi(x)$ telle que

$$T \vdash \exists^{\leqslant 1} x\, \alpha(x) \text{ et } C_A \models \phi(a).$$

Soit $\alpha(x) = \gamma(x) \wedge \phi(x)$. Alors on a

$$T \vdash \exists^{\leqslant 1} x\, \alpha(x)\ ,\quad A \models \alpha(a)\ ,\quad T \vdash \alpha(x) \to R(x)$$

donc

$$(4)\ C_A = \{a \in A \mid \text{il existe } \alpha(x) \text{ pure telle que } A \models \alpha(a),\ T \vdash \exists^{\leqslant 1} x\, \alpha(x) \text{ et } T \vdash \alpha(x) \to R(x)\}.$$

Soit

$$\{\alpha_i(x),\ i \in I\} = \{\alpha(x) \text{ pures telles que } T \vdash \alpha(x) \to R(x) \text{ et } T \vdash \exists^{\leqslant 1} x\, \alpha(x)\}$$

donc

$$A \models \forall x (C_A(x) \leftrightarrow \bigvee_{i \in I} \alpha_i(x)).$$

Soit $A \subset B$, $A, B \models T$, $a \in A$ et $B \models \bigvee_i \alpha_i(a)$. On a $C_A = C_B$ d'où $A \models \bigvee_i \alpha_i(a)$. D'apres 3.4 il existe des formules universelles β_j telles que $T \vdash \bigvee_i \alpha_i(x) \leftrightarrow \bigvee_j \beta_j(x)$.

3.15. THÉORÈME. *Soit* T *fortement convexe, Horn, avec un seul modèle coeur. Avec les notations de* 3.14 *soit* $\alpha \in \{\alpha_i\}$. *Alors il existe un ensemble* $\{\beta_j\}$ *tel que*

$$T \vdash \alpha^R(x) \leftrightarrow \bigvee_j \beta_j(x),$$

les β_j *sont pures et*

$$T \vdash \exists^{\leqslant 1} x\, \beta(x)$$

ou α^R *est la relativisation de* α *au coeur.*

3.16. DEFINITION. σ est appelé *Δ'-pure univalente* si σ est pure univalente et s'il existe une formule γ universelle telle que $T \vdash \sigma(x) \leftrightarrow \gamma(x)$.

3.17. PROPOSITION. *Soit* T *fortement convexe, Horn, avec un seul modele coeur, soit* α *et* $\{\beta_j\}$ *comme dans* 3.15. *Alors il existe* $\beta \in \{\beta_j\}$ *telle que* $T \vdash \beta(x) \leftrightarrow \alpha^R(x)$ *et* $\beta(x)$ *est Δ'-pure univalente.*

3.18. PROPOSITION. *Soit* T *fortement convexe, Horn avec un seul modèle coeur, alors il existe un ensemble de formules* $\{\beta_i\}$ *pures univalentes telles que* $T \vdash R(x) \leftrightarrow \bigvee_i \beta_i(x)$.

3.19. PROPOSITION. *Soit* T *fortement convexe, Horn avec un seul modèle coeur,* $\gamma(\bar{y})$ *une formule sans quantificateurs telle que* $T \vdash \exists \bar{y}\, \gamma(\bar{y})$, *alors il existe que formule* $\mu(\bar{y})$ *Δ'-pure univalente telle que* $T \vdash \exists^1 \bar{y}(\gamma(\bar{y}) \wedge \mu(\bar{y}))$.

Démonstration. Soit C le modele coeur, $\bar{c} \in C$ avec $C \models \gamma(\bar{c})$ si $\bar{c} = (c_1,\dots,c_n)$. Soient $\beta_1,\dots,\beta_n$ formules Δ'-pures univalentes telles que $C \models \beta_i(c_i)$, alors $\mu(\bar{y})$ est

$$\beta_1(y_1) \wedge \dots \wedge \beta_n(y_n)$$

si $\bar{y} = (y_1,\dots,y_n)$.

3.20. PROPOSITION. *Soit* T *fortement convexe, Horn et* C *un modèle coeur de* T, *alors il existe un ensemble* P *de formules closes universelles telles que* $A \models T+P$ *si et seulement si* $C_A = C$.

Démonstration. Soit $P = \{\beta \in \forall | T+\Delta_0(C) \vdash \beta\}$ où $\Delta_0(C)$ est le diagramme complet de C.

3.21. THÉORÈME. *Soit* T *Horn convexe. Pour toute formule* $\alpha(\bar{x},\bar{y})$ *sans quantificateurs tel que* $T \vdash \forall\bar{x}\,\exists\bar{y}\,\alpha(\bar{x},\bar{y})$ *il existe un entier* r *et des formules* $\gamma_i(\bar{x})$, $\mu_i(\bar{x},\bar{y})$, $\mu_i'(\bar{x},\bar{y})$, $i \leqslant r$, *telles que*

$$T \vdash \bigvee_{i=1}^{r} \gamma_i(\bar{x})$$

$$T \vdash \gamma_i(\bar{x}) \to \exists^1\bar{y}(\alpha(\bar{x},\bar{y}) \wedge \mu_i(\bar{x},\bar{y}))$$

$$T \vdash \gamma_i(\bar{x}) \to (\exists^1\bar{y}\,\mu_i(\bar{x},\bar{y})) \wedge (\mu_i(\bar{x},\bar{y}) \leftrightarrow \mu_i'(\bar{x},\bar{y}))$$

où γ_i *est universelle,* μ_i *est pure et* μ_i' *est universelle.*

Démonstration. Soit $T \vdash \forall\bar{x}\,\exists\bar{y}\,\alpha(\bar{x},\bar{y})$ avec α sans quantificateurs; si $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ alors soit $\bar{e} = (e_1,\ldots,e_n)$ de nouvelles constantes. Soit $T(\bar{e}) = T + \{e_1 = e_1,\ldots,e_n = e_n\}$. $T(\bar{e})$ est fortement convexe Horn et

$$T(\bar{e}) \vdash \exists\bar{y}\,\alpha(\bar{e},\bar{y}).$$

Soit $\{C_i\}_i$ un ensemble de modèles coeur de $T(\bar{e})$ contenant un représentatif de chaque classe d'isomorphisme de tels modèles coeur. D'apres 3.20 on a $\{P_i\}_I$ tel que

$A \models T+P_i$ si et seulement si $C_A \simeq C_i$.

on a

(2) $T(e) \vdash \bigvee_i \wedge P_i$ et $T+P_i \vdash \exists\bar{y}\,\alpha(\bar{e},\bar{y})$.

(3) Il existe T_1 Horn fortement convexe tel que

$$\vdash T+P_i \leftrightarrow T_1$$

d'après 3.19 il existe $\{\mu_i\}$ tels que

(4) $T(\bar{e})+P_i \vdash \exists^1\bar{y}(\alpha(\bar{e},\bar{y}) \wedge \mu_i(\bar{e},\bar{y}))$

par compacité, on aura la résultat.

3.22. REMARQUE [Keisler, 1960]. $M(T)$ est stable par $\varinjlim$ filtrantes si et seulement si $\vdash T \leftrightarrow T_1$ où les $\sigma \in T_1$ sont de la forme

$$\sigma = \forall x_1 \ldots x_n \left[\bigwedge_{j=1}^{r} (\neg g_j(x_1,\ldots,x_s) \vee (\exists x_{s+1} \ldots x_t h_j(x_1 \ldots x_t))) \right]$$

avec $g_j, h_j \in \vee\wedge L$ (sans quantificateurs ni signe $\neg$); les h_j peuvent ne pas figurer. On peut supposer que les $g_j \in \wedge L$ (conjonction d'atomiques), pour cela il faut refaire la démonstration de Keisler.

3.23. PROPOSITION. *Soit* T *Horn convexe, alors* $\vdash T \leftrightarrow T_1$ *où les* $\sigma \in T_1$ *son de la forme*

$$\forall \bar{x}\, \exists \bar{y} (g(\bar{x}) \to h(\bar{x},\bar{y}))$$

avec $g(\bar{x})$ *et* $h(\bar{x},\bar{y}) \in \wedge L$, *et* $h(\bar{x},\bar{y})$ *peut ne pas figurer.*

Démonstration. D'apres 2.13 et 3.22 on peut supposer $\sigma \in T$ de la forme

$$\forall \bar{x}\, \exists \bar{y} (g(\bar{x}) \to h_1(\bar{x},\bar{y}) \vee \ldots \vee h_n(\bar{x},\bar{y}))$$

avec g et h_i conjonction d'atomiques (où les h_i peuvent ne pas figurer). Comme $M(T)$ a des presque-produits, on peut démontrer qu'il existe un $1 \leq i \leq n$ tel que

$$T \vdash h_i(\bar{x},\bar{y}) \leftrightarrow h_1(\bar{x},\bar{y}) \vee \ldots \vee h_n(\bar{x},\bar{y}).$$

3.24. PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) T *est Horn convexe.*

(b) (i) $\vdash T \leftrightarrow T_1$ *où les* $\sigma \in T_1$ *sont de la forme*

$$\sigma = \forall \bar{x}\, \exists \bar{y} (g(\bar{x}) \to h(\bar{x},\bar{y}))$$

avec $g(\bar{x})$ *conjonction d'atomiques,* $h(\bar{x},\bar{y})$ *conjonction d'atomiques et* $h(\bar{x},\bar{y})$ *peut ne pas figurer.*

(ii) $\forall\sigma \in T$ *il existe* $r < u$, *formules* $\gamma_i(\bar{x})$, $\mu_i(\bar{x},\bar{y})$, $i < r$, *telles que*

$$T \vdash \bigvee_{i=1}^{r} \gamma_i(\bar{x})$$

$$T \vdash \gamma_i(\bar{x}) \to \exists^1 \bar{y}(\sigma(\bar{x},\bar{y}) \wedge \mu_i(\bar{x},\bar{y}))$$

$$T \vdash \gamma_i(\bar{x}) \to \exists^1 \bar{y}\ \mu_i(\bar{x},\bar{y})$$

avec les γ_i *universelles et* μ_i *pure.*

3.25. La proposition 3.24 est une caractérisation des théories Horn convexes "à la Bacsich - Hughes". On donnera une autre caractérisation, "à la Mal'cev".

3.26. PROPOSITION. *Soit* T *fortement convexe, Horn, avec les notations de* 3.14; *soit* $\alpha \in \{\alpha_i\}$ *alors il existe un ensemble* $\{\beta_j\}$ *tel que:*

$$T \vdash \alpha^R(x) \leftrightarrow \bigvee_j \beta_j(x)$$

les β_j *sont pures et* $T \vdash \exists^{\leq 1} x\ \beta_j(x)$.

3.27. PROPOSITION. *Soit* T *fortement convexe, Horn. Soit* α *et* $\{\beta_i\}$ *comme dans* 3.26, *alors il existe* $\beta \in \{\beta_j\}$ *tel que* $T \vdash \beta(x) \leftrightarrow \alpha^R(x)$ *et* $\beta(x)$ *est* Δ' *pure univalente.*

Démonstration. Soit c une nouvelle constante. On a

$$T + \alpha^R(c) \vdash \bigvee_j \beta_j(c)$$

par compacité

$$T + \alpha^R(x) \vdash \bigvee_{j=1}^{n} \beta_j(c)$$

mais $T + \alpha^R(c)$ est Horn et les $\beta_j(c)$ sont positives, donc il existe j_0 tel que $T + \alpha^R(c) \vdash \beta_{j_0}(c)$.

3.28. PROPOSITION. *Soit* T *fortement convexe, Horn, alors il existe un ensemble des formules* $\{\beta_i\}_I$ *pures univalentes telles que* $T \vdash R(x) \leftrightarrow \bigvee_i \beta_i(x)$.

3.29. PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) T *est Horn convexe.*

(b) (i) $\vdash T \leftrightarrow T_1$ *où les formules de* T_1 *sont de la forme*

$$\forall\bar{x}\ \exists\bar{y}(g(\bar{x}) \rightarrow h(\bar{x},\bar{y})),$$

$g(\bar{x}),\ h(\bar{x},\bar{y}) \in \wedge L$; $h(\bar{x},\bar{y})$ *peut ne pas figurer,*

(ii) *pour chaque* $\sigma \in T_1$ *il existe* $\mu_\sigma(\bar{x},\bar{y})$ *tel que*

$$T \vdash \forall\bar{x}\ \exists^1\bar{y}((g(\bar{x}) \rightarrow h(\bar{x},\bar{y}) \wedge \mu_\sigma(\bar{x},\bar{y}))$$

$$T \vdash \exists^1\bar{y}(\mu_\sigma(\bar{x},\bar{y})) \wedge (\mu_\sigma(\bar{x},\bar{y}) \rightarrow \mu'(\bar{x},\bar{y}))$$

où μ' *est une formule universelle.*

Démonstration. Exercice.

3.30. REMARQUE. Soit T_1 comme dans 3.29, $\sigma \in T_1$ et $A \models T_1$.

$$\sigma = \forall\bar{x}\ \exists\bar{y}\ \sigma_1(\bar{x},\bar{y}) \quad \text{où} \quad \sigma_1(\bar{x},\bar{y}) = g(\bar{x}) \rightarrow h(\bar{x},\bar{y})$$

$$\bar{x} = (x_1,\ldots,x_{r\sigma}),\quad \bar{y} = (y_1,\ldots,y_{s\sigma}).$$

On peut définir

$$h^\sigma(\bar{x}) = (h_1^\sigma(\bar{x}),\ldots,h_{s\sigma}^\sigma(\bar{x}))$$

tel que

$$A \models \sigma_1(\bar{x},h^\sigma(x)) \wedge \mu_\sigma(\bar{x},h^\sigma(\bar{x})).$$

Soit

$$L^* = L \cup \{h_1^\sigma,\ldots,h_{s\sigma}^\sigma\}_{\sigma\in T_1}$$

et

$$T_1^* = \{\forall\bar{x} \mid \sigma_1(x,h^\sigma(x)) \wedge \mu_\sigma(\bar{x},h^\sigma(\bar{x}))\}_{\sigma\in T_1}.$$

Alors il existe un isomorphisme des catégories.

$$\begin{tikzcd} M(L,T_1) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "G"'] & & M(L^*,T_1^*) \arrow[dl, "G^*"] \\ & \mathrm{Ens} & \end{tikzcd}$$

tel que $G^*\phi = G$, T_1^* est Horn universelle; en plus T_1 est positive si et seulement si T_1^* l'est.

3.31. THÉORÈME. *A fonctions de Skolem définissables près, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) T *est Horn convexe,*

(b) T *est Horn universelle.*

Exemple typique: la théorie des groupes.

3.32. THÉORÈME. *A fonctions de Skolem définissables près, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) T *est Horn convexe positive,*

(b) T *est une variété.*

§4. Sur les formules Horn convexes positives.

4.1. PROPOSITION. *Soit* T *une théorie positive. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $G:M(T) \to \mathrm{Ens}$ *a un adjoint,*

(b) *il existe une théorie* T_1 *Horn convexe, telle que* $\vdash T \leftrightarrow T_1$.

Démonstration. (b) → (a) 3.32 et [Gratzer, 1968].

(a) → (b). **(1)** M(T) a des presque produits. Soit $A \models T$, $B \models T$ et $A\times B$ le produit de A et B dans $M(L,\phi)$. Soit F l'adjoint de G. On a le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
FG(A\times B) \arrow[rr, "p_1\times q_1"] \arrow[drr, "p_1"'] \arrow[ddrr, "q_1"] & & A\times B \arrow[d, "p"'] \arrow[dd, bend left, "q"] \\
& & A \\
G(A\times B) \arrow[uu, "\Phi"] \arrow[urr, "p"] \arrow[rr, "q"'] & & B
\end{tikzcd}$$

où Φ est déterminé par l'adjonction. On a

$$(p_1\times q_1)\circ\Phi = \text{identité}.$$

Les conditions suivantes:

$FG(A\times B) \models T$, $p_1\times q_1$ homomorphisme surjective et T positive, entraînent $A\times B \models T$.

(2) M(T) a des noyaux. Soit $f,g:A \rightrightarrows B$ deux flèches de M(T) et Ker(f,g) le noyau de f et g dans $M(L,\phi)$. Dans le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ker}(f,g) \arrow[r] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
FG\mathrm{Ker}(f,g) \arrow[ur, "\psi"] & & & \\
& G\mathrm{Ker}(f,g) \arrow[ul, "\Phi"] \arrow[uur, "1"'] & &
\end{tikzcd}$$

on a $\psi\phi = 1$. Les conditions suivantes: $FG\mathrm{Ker}(f,g) \models T$, ψ homomorphisme surjectif et T positive, entraînent: $\mathrm{Ker}(f,g) \models T$, donc M(T) est presque complete et on peut appliquer 2.14.

4.2. PROPOSITION. *Soit* $G{:}M(T) \to \mathrm{Ens}$ *un foncteur monadique* [Pareigis, 1970]. *Alors* M(T) *est cocomplète et presque complète.*

Démonstration. On sait [Pareigis, 1970] que M(T) est cocomplète. Soit A et B $\models$ T, on a deux flèches de M(T):

$$\begin{tikzcd} & FG(A\times B) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

D'après 2.11 (version co), il existe un produit de A et B dans M(T), de même si f et g sont deux flèches de M(T) le noyau de f et g existe dans M(T).

4.3. PROPOSITION. *Soit* $G{:}M(T) \to \mathrm{Ens}$ *monadique et* $f{:}A \to B$ *une flèche de* M(T), *alors sur l'image ensembliste* f(A) *il existe un modèle de* T *et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \\ & f(A) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Implicite dans [Pareigis, 1970].

4.4. THÉORÈME. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) M(T) *est complète et cocomplète,*

(b) M(T) *est complète,*

(c) M(T) *est presque complète et a un objet final,*

(d) *à une fonction de Skolem près,* T *est une quasivariété* [Mal'cev, 1973].

Démonstration. Soit Φ le foncteur de la remarque 3.30:

$$M(L,T_1) \xrightarrow{\Phi} M(L^*,T_1^*) ,$$

il est un isomorphisme, donc $M(L,T_1)$ a un objet final si et seulement si $M(L,T_1^*)$ en a. Aussi on a les résultats:

(i) M(T) est stable par presque produits, par sous-structures et a un objet final si et seulement si M(T) a un système d'axiomes T' de la forme

$$\forall\bar{x}(g_1(\bar{x})\wedge\ldots\wedge g_n(\bar{x}) \to g(\bar{x}))$$

avec g_i, g atomiques [Mal'cev, 1973].

(ii) Si M(T) est presque complète et a un objet final, alors M(T) a des sommes et des conoyaux (2.11 en version co); l'objet initial est $FG\phi$.

4.5. THÉORÈME. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) G:M(T) $\to$ Ens *est monadique,*

(b) T *est Horn, convexe et positive,*

(c) *à des fonctions de Skolem près,* T *est une variété.*

§5. <u>Sur les épimorphismes d'une variété.</u>

5.1. Soit T une variété, K une sous-catégorie pleine de M(T); R = M(T) $\to$ K un adjoint de E:K $\to$ M(T) et

$$\phi_A : A \to ERA \qquad \psi_A : REA \to A$$

les morphismes définissant l'adjonction. K est appelée une ME-*enveloppe* de M(T) si

(a) les ϕ_A sont des monomorphismes de M(T),

(b) si f est mono de M(T) alors R(f) est mono de M(T),

(c) si f est épi de K alors f est surjective.

5.2. Soit ME l'ensemble des monos-épis de M(T). On dit que ME est *transférable* dans M(T) si le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, dashed, "g'"] \\ C \arrow[r, dashed, "f'"'] & D \end{tikzcd} \qquad f, f' \in ME$$

peut être complété.

5.3. PROPOSITION. *Si* M(T) *possède une* ME-*enveloppe* K *alors:*

(1) *Les* ϕ_A *sont des épimorphismes de* M(T).

(2) *Si* $\phi_A = h \circ f$ *avec* f *et* h *deux monomorphismes alors* $f \in$ ME *et on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "f"'] & ERA \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\phi_B"'] & ERB \end{tikzcd}$$

avec g *un isomorphisme.*

(3) *Soit* $m : A \to C \in$ M(T), *une condition nécessaire et suffisante pour que* m *soit un épimorphisme de* M(T) *est l'existence de* f,h,p *et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\phi_A"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "m"'] & & ERA \\
& B \arrow[ur, "h"'] \arrow[dl, "p"] & \\
C & &
\end{tikzcd}$$

avec f, h *monos et* p *surjective.*

(4) ME *est transférable dans* M(T).

Démonstration. (1) et (2) sont exercices.

(3) Soit le diagramme commutatif suivant avec m un épimorphisme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\phi_A"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "m"'] & & ERA \arrow[dd, "ER(m)"] \\
& B \arrow[ur, "h"'] \arrow[dl, "p"] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{I})"] & \\
C \arrow[rr, "\phi_C"'] & & ERC
\end{tikzcd}$$

ou le diagramme (I) est un produit fibré canonique dans M(T) ER(m) est épi dans K, donc surjective; d'où p est surjective.

(4) Soit f∈ME, g∈M(T), on a le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrr, "\phi_A"] \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[ddr, "f"'] \arrow[ddd, "g"'] & & & ERA \arrow[ddl, "ER(f)"'] \arrow[ddd, "ER(g)"] \\
& D \arrow[urr, dashed, "h"'] \arrow[d, dashed, "p"] & & \\
& B \arrow[r, "\phi_B"'] & ERB & \\
C \arrow[rrr, "\phi_C"'] & & & ERC
\end{tikzcd}$$

ER(f) est iso, donc p l'est aussi.

5.4. DÉFINITION. D ∈ M(T) est appelée ME-*injectif* si $(x,D):(B,D) \to (A,D)$ est surjective pour tous les $x:A \to B \in$ ME. f ∈ ME est appelé ME-*essentiel* si gf ∈ ME entraîne g ∈ ME. Une ME-*enveloppe injective* de A ∈ M(T) est un morphisme $f:A \to B$, ME-essentiel avec B ME-injectif.

5.5. THÉORÈME. *Soit* T *une variété. Sont équivalents:*

(a) M(T) *a une* ME-*enveloppe injective,*

(b) *les* ME *sont transférables dans* M(T),

(c) *chaque* $A \in M(T)$ *a une* ME-*enveloppe injective.*

Démonstration. (a) $\rightarrow$ (b) [5.3 (4)]; (c) $\rightarrow$ (b) exercice; (b) $\rightarrow$ (a) et (b) $\rightarrow$ (c):

(1) si $f \in$ ME alors f est ME-essentiel. En effect, soit $gf \in$ ME. Alors il existe $h \in$ ME et $j \in M(T)$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "gf"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dr, "j"] & \\
& C \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h"'] & & D
\end{tikzcd}$$

Alors $g \in$ ME.

(2) Soit $A \in M(T)$. On peut démontrer par induction infinie l'existence d'un $B \in M(T)$ et d'un $x:A \rightarrow B \in$ ME tel que si $y:B \rightarrow C \in$ ME alors C = B. Soit B = ERA et $x = \phi_A$ alors ϕ_A est une ME-enveloppe injective de A.

(3) Soit $f:A \rightarrow B \in M(T)$ alors le diagramme suivant peut etre complété

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "f"'] & ERA \arrow[d, dashed, "ERf"] \\
B \arrow[r, "\phi_B"'] & ERB
\end{tikzcd}$$

car ERB est ME-injective. Soit $K = \{ERA\}A \in M(T)$.

(4) D'après [Pareigis, 1970] le foncteur $E:K \rightarrow M(T)$ est monadique. Soit $f:A \rightarrow B \in M(T)$. On a le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
ERA \arrow[rr, "ERf"] \arrow[dr, "ERg"'] & & ERB \\
& ER(fA) \arrow[ur, "ERi"'] & \\
A \arrow[uu] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \arrow[uu] \\
& fA \arrow[uu, "\phi_{fA}"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

et on a $(ERf)(ERA) = ER(fA)$. Si f est épi de $M(T)$, ERf et ERi le seront aussi; d'où $ER(fA) = ERB$ et ERf est surjectif. Si f est mono alors g est un iso, donc ERg l'est aussi, donc ERf est injectif.

(5) Soit $f:A \to B$ épi de K alors $E(f)$ est épi de $M(T)$ donc $RE(f)$ est surjective et d'après le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} REA \arrow[r, "REf"] \arrow[d, "\psi_A"'] & REB \arrow[d, "\psi_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

on a f surjective.

5.6. COROLLAIRE. *Si* $M(T)$ *a une enveloppe* K *alors elle est unique.*

Démonstration. Soit $A \in M(T)$. On aura

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[dr, "\phi'_A"'] & ERA \arrow[d, shift right, "h"'] \\ & E'R'A \arrow[u, shift right, "h'"'] \end{tikzcd}$$

$hh' = 1 = h'h$ car ERA et $E'R'A$ sont ME-injectifs.

5.7. LEMME. *Soit* $M(T)$ *avec les* ME *transférables. Alors si* $f:A \to B \in ME$ *et* $a,b:A \to C \in M(T)$, *alors il existe* $c,d:B \to D$ *et* $g:C \to D \in ME$ *avec* $cf = ga$ *et* $df = gb$.

5.8. DÉFINITION. Soit

$\Omega(T) = \{\theta(x,y) \mid T \vdash \forall\bar{x}\, \exists^{\leq 1}\bar{y}\ \theta(\bar{x},\bar{y})$ et $\theta(\bar{x},\bar{y})$ pure$\}$

$\Lambda(T) = \{\theta \in \Omega(T) \mid \theta$ est conjonction de formules atomiques$\}$.

5.9. LEMME. *Soit* $M(T)$ *avec les* ME *transférables. Si*

$f:A \to N \in ME$ *et* $b \in B$ *alors il existe* $\bar{a} \in A$ *et* $\theta \in \Lambda(T)$ *tels que* $B \vdash \theta(a,b)$

Démonstration. On a $b \in \mathrm{Dom}(A, A(b))$ par le lemma précédent, d'où le résultat.

5.10. REMARQUES. Soit $M(T)$ une variété et F l'adjoint de $G:M(T) \to \mathrm{Ens}$. Si K est un ensemble, $G^K:M(T) \to \mathrm{Ens}$ est le foncteur

$$G^K(A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(K, GA).$$

Une transformation naturelle $\lambda:G^K \to G$ est la donnée pour chaque $A \models T$ d'une fonction $\lambda_A:A^K \to A$ telle que si $f:A \to B \in M(T)$ alors on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} A^K \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, "f^K"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B^K \arrow[r, "\lambda_B"'] & B \end{tikzcd}$$

5.11. Par le lemme de Yoneda, on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(G^K, G) \xrightarrow{Y} GF(K)$$

définie de la façon suivante. Si $\lambda:G^K \to G$ alors on a $\lambda:F(K)^K \to GF(K)$; soit $\Phi:K \to GF(K)$ l'inclusion de K dans $GF(K)$, alors $Y(\lambda)$ est défini par $\lambda(\Phi)$. Réciproquement, soit $a \in GF(K)$. On définit $\lambda:G^K \to G$ par: si $f:K \to GA \in \mathrm{Ens}$, alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} GF(K) \arrow[r, "\hat{f}"] & A \\ K \arrow[u, "\Phi"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

et $\lambda(f) = \hat{f}(a)$.

5.12. Soit F un symbole de fonction du langage L de T, d'arité p. Si $\lambda_i \in \mathrm{Hom}_{Cat}(G^K,G)$, $i = 1,\ldots,p$, on définit $F(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ par

$$F(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)(A) = F(\lambda_1(A),\ldots,\lambda_p(A)).$$

Si c est une constante de L et a est sa réalisation dans F(K), alors on définit la réalisation de c dans $\mathrm{Hom}_{Cat}(G^K,G)$ par $Y^{-1}(a)$, donc on a:

5.13. Supposons qu'on a bien ordonné K: $K=\{K_\lambda \mid \lambda \in K\}$, et soit p_λ la projection $p_\lambda : G^K \to G$ définie de la façon suivante: si $A \models T$ alors $p_\lambda(b_j) = b_\lambda$. Alors on a $Y(p_\lambda) = K_\lambda$.

5.14. Soit $a \in F(K)$, alors il existe un terme t tel que $a = t(K_{i_1},\ldots,K_{i_a})$, d'ou

$$Y^{-1}(a) = t(p_{i_1},\ldots,p_{i_a}).$$

Dans la suite, on identifiera $\mathrm{Hom}_{Cat}(G^K,G)$ et F(K).

5.15. DÉFINITION. Soit $\Gamma(T)$ l'ensemble de formules $\theta(\bar{x},\bar{y})$ de la forme

$$\theta(\bar{x},\bar{y}) = \bigwedge_{i=1}^{\omega} \theta_i(\bar{x},\bar{y})$$

avec $\theta_i(\bar{x},\bar{y})$ conjonction d'atomiques:

$$\theta_i(\bar{x},\bar{y}) = (\rho_i(\bar{x},\bar{y}) = \pi_i(\bar{x},\bar{y}))$$

avec $\bar{x} = (x_0,x_1,\ldots)$, $\bar{y} = (y_0,y_1,\ldots)$, en plus

$$T \vdash \forall\bar{x}\, \exists^{\leq 1}\bar{y}\, \theta(\bar{x},\bar{y});$$

$\theta(\bar{x},\bar{y})$ est bien défini (remarque 5.14), car on se place dans

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(G^{\omega},G)$.

5.16. *Enveloppe implicite définie par* $\theta \in \Lambda(T)$ (on a une définition analogue pour $\theta \in \Gamma(T)$). Soit $\theta(\bar{x},\bar{y}) \in \Lambda(T)$ avec $\bar{x} = (x_0,\ldots,x_{n-1})$ et $\bar{y} = (y_0,\ldots,y_{m-1})$.

Si $A \models T$ soit

$$V(A) = \{\bar{a} \in A \mid \exists \bar{b} \in A \text{ et } A \models \theta(\bar{a},\bar{b})\}.$$

Si $f:A \to B \in m(T)$ soit $V(f):V(A) \to V(B)$ la fonction

$$V(f)(a_0,\ldots,a_{n-1}) = (fa_0,\ldots,fa_{n-1}).$$

Alors V est un sous-foncteur de G^n:

$$\begin{tikzcd} V(A) \arrow[r] \arrow[d, "V(f)"'] & G^n(A) \arrow[d, "G^n(f)"] \\ V(B) \arrow[r] & G^n(B) \end{tikzcd}$$

Soit la fonction $\eta(A):V(A) \to G^n(A)$ défini par $\eta(A)(\bar{a}) = \bar{b}$ si et seulement si $A \models \theta(\bar{a},\bar{b})$, alors $\eta:V \to G^m$ est une transformation naturelle. (V,η) est appelée l'enveloppe implicite défini par θ. Notation $EI(\theta)$.

5.17. THÉORÈME [Grätzer, 1968. Chapitre 1]. *Soit* $A \models T$, $H \subset A\times A$ *et* $\Theta(H)$ *la relation de congruence engendrée par* H. *Alors* $c \equiv d(\Theta(H))$ *si et seulement si, il existe* $i < u$, *une séquence* $c = z_0,\ldots,z_i = d$ *avec* $\langle a_j,b_j\rangle \in H$ *et fonctions algébraiques unaires* p_j, $j = 1,\ldots,i$, *tels que* $\{p_j(a_j),p(b_j)\} = \{z_{j-1},z_j\}$, $j = 1,\ldots,i$.

5.18. Soit $\theta \in \Lambda(T)$ (ou $\theta \in \Gamma(T)$), si $\bar{x} = (x_0,\ldots,x_{n-1})$ et $\bar{y} = (y_0,\ldots,y_{m-1})$ dire qu'il existe un terme t tel que $\bar{y} = t(\bar{x})$ est équivalent par définition a l'existence de m-termes t_i tels que $y_i = t_i(\bar{x})$, $i = 0,\dots,m-1$.

5.19. PROPOSITION. *Soit* M(T) *une variété. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) (a) M(T) *a une envoloppe* K.

(b) *pour toute formule* $\theta(\bar{x},\bar{y}) \in \Lambda(T)$ *il existe un terme* t *tel que* $T \vdash \theta(x,y) \to \bar{y} = t(\bar{x})$.

(2) *les épis de* M(T) *sont surjectifs.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que (2) → (b). Soit (V,η) l'enveloppe implcite définie par θ, et $\theta = \bigwedge_{i=1}^{r} (\rho_i = \pi_i)$. Alors $\rho_i,\pi_i \in \mathrm{Hom}_{Cat}(G^{n+m},G)$, $i = 1,\dots,r$. Soit $H = \{(\rho_i,\pi_i) \mid i = 1,\dots,r\}$ et $\circledast(H)$ la relation de congruence engendrée par H. Soit $j:\mathrm{Hom}_{Cat}(G^n,G) \to \mathrm{Hom}_{Cat}(G^{n+m},G)$ définie par $j(f) = fop$ où $p:G^{n+m} \to G^n$ est la fonction $p(a_0,\dots,a_{n+m-1}) = (a_0,\dots,a_{n-1})$. Soit $\widehat{\circledast(H)} = (j\times j)^{-1}(\circledast(H))$, alors on a $\circledast(\widehat{\circledast(H)}) = \widehat{\circledast(H)}$. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(G^n,G) & \xrightarrow{\quad j \quad} & \mathrm{Hom}(G^{n+m},G) \\
\downarrow s & & \downarrow s \\
\mathrm{Hom}(G^n,G)/\widehat{\circledast(H)} & \xrightarrow{\quad r \quad} & \mathrm{Hom}(G^{n+m},G)/\widehat{\circledast(H)}
\end{array}$$

avec $r(\rho(\lambda)) = \rho(j(\lambda))$. Pour tout $A \models T$, $\bar{x} \in A^n$ on a

(1) il existe au plus un $\bar{y} \in A^m$ tel que

$$e_1(\bar{x},\bar{y}) = e_2(\bar{x},\bar{y}) \quad \forall (e_1,e_2) \in \circledast(H),$$

(2) $\bar{x} \in V(A)$ si et seulement si il existe un $\bar{y}$ comme dans (1).

r *est une épimorphisme,* car si on a fr = gr on aura le diagramme

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & n+m \arrow[d, "\phi"] \arrow[rd, shift left, "g\circ\rho\circ\phi"] \arrow[rd, shift right, "f\circ\rho\circ\phi"'] & \\
F(n) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\rho"'] & F(n+m) \arrow[r, shift left, "g\circ\rho"] \arrow[r, shift right, "f\circ\rho"'] \arrow[d, "\rho"] & X \\
F(n)/\circledast(H) \arrow[r, "r"] & F(n+m)/\circledast(H) \arrow[ru, shift left, "f"] \arrow[ru, shift right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

d'ou $f\circ\rho\circ\phi = (\bar{x},\bar{y})$ et $g\circ\rho\circ\phi = (\bar{x},\bar{z})$ avec $\bar{x} \in X^n$, $\bar{y},\bar{z} \in X^m$. Alors $\forall (a,b) \in \circledast(H)$ on a:

$$a(\bar{x},\bar{y}) = (f\circ p)(Y(a)) = (f\circ p)(Y(b)) = b(\bar{x},\bar{y})$$

aussi $a(\bar{x},\bar{y}) = b(\bar{x},\bar{z})$, donc $\bar{y} = \bar{z}$ et $f = g$. Alors r est surjectif par hypothèse.

Soit $q: G^{n+m} \to G^m$ définit $q(\bar{x},\bar{y}) = \bar{y}$; alors il existe un $t: G^n \to G$ tel que $r(\rho(t)) = \rho(q)$; donc $s(j(t)) = s(q)$ et $j(t) = q(\circledast(H))$; d'après (6.17) on a $\forall A \models T$, $t(\bar{x}) = q(\bar{x},\eta(\bar{x})) = \eta(\bar{x})$. $\forall \bar{x} \in V(A)$ donc on a $T \vdash \theta(\bar{x},\bar{y}) \to \bar{y} = t(\bar{x})$.

5.21. PROPOSITION. *Soit* $M(T)$ *une variété. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(3) *Si* $\theta(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma(T)$ *alors il existe un terme* t *tel que*

$$T \vdash \theta(\bar{x},\bar{y}) \to \bar{y} = t(\bar{x}).$$

(2) *Les épis de* $M(T)$ *sont surjectifs.*

Démonstration. (2) $\to$ (3) (voir (5.19)). (3) $\to$ (2): Soit $f: A \to B$ un mono-épi non surjectif. On peut supposer B dénombrable [Bacsich, 1974]. Soit $n = f(A)$, $m = B - f(A)$ et le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, shift left, "r"] \arrow[r, shift right, "\rho"'] & F(n+m) \arrow[r, "\psi"] & B \\
& n+m \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où $(a,b) \in E$ si et seulement si $\psi(a) = \psi(b)$; et $r(a,b) = a$, $s(a,b) = b$. Si $\hat{E} = (j\times j)^{-1}(E)$ où

$$j : \mathrm{Hom}(G^n, G) \to \mathrm{Hom}(G^{n+m}, G),$$

alors on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{iso}"'] & B \arrow[d, "\mathrm{iso}"] \\
F(n)/\hat{E} \arrow[r, "f"] & F(n+m)/E
\end{tikzcd}$$

si $a \in F(n+m)$ alors $Y^{-1}(a) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(G^{n+m}, G)$; si $M \models T$ on a

$$(Y^{-1}(a))(M) : M^{n+m} \to M\ ;$$

donc si $\bar{x} = (x_i)_{i<n}$ et $\bar{y} = (y_j)_{j<m}$ on a

$$\theta(\bar{x},\bar{y}) = \bigwedge_{(a,b)\in E} (a(\bar{x},\bar{y}) = b(\bar{x},\bar{y})).$$

$\theta(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma(T)$, sinon, soit $M \models T$, $p \in M^n$, $q,r \in M^m$ et $M \models \theta(p,q) \wedge \theta(p,r)$. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(n+m) \arrow[r, shift left, "\overline{(p,q)}"] \arrow[r, shift right, "\overline{(p,r)}"'] & M \\
n+m \arrow[u] \arrow[ur, shift left, "(p,q)"] \arrow[ur, shift right, "(p,r)"'] &
\end{tikzcd}$$

si $(a,b) \in E$ alors $\overline{(p,q)}(a) = a(p,q) = b(p,q) = \overline{(p,q)}(b)$ de même $\overline{(p,r)}(a) = \overline{(p,r)}(b)$ d'où on a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(n) \arrow[r] \arrow[d, dash] & F(n+m) \arrow[d, dash] \arrow[dr, shift left, "\overline{(p,q)}"] \arrow[dr, shift right, "\overline{(p,r)}"'] & \\
F(n)/E' \arrow[r, "f"] & F(n+m)/E \arrow[r, shift left, "\overline{\overline{(p,r)}}"] \arrow[r, shift right, "\overline{\overline{(p,q)}}"'] & M
\end{tikzcd}$$

alors $\overline{\overline{(p,q)}}f = \overline{\overline{(p,r)}}f$, d'où $\overline{\overline{(p,q)}} = \overline{\overline{(p,r)}}$ et $\overline{(p,q)} = \overline{(p,r)}$, $q = r$. Par hypothèse il existe un terme t tel que ,

$$T \vdash \theta(\bar{x},\bar{y}) \to \bar{y} = t(\bar{x})$$

donc f est surjective.

5.22. PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Si* $\theta(x,y) \in \Lambda(T)$ *alors il existe un terme* t *tel que*

$$T \vdash \theta(\bar{x},\bar{y}) \to \bar{y} = t(\bar{x}).$$

(2) *Les monos épis* $f: E(n)/\Theta(\widehat{H}) \to F(n+m)/\Theta(H)$ *avec* n,m H *finis sont surjectifs.*

5.23. THÉORÈME. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) (a) M(T) *a une enveloppe* K,

(b) *pour toute formule* $\theta(\bar{x},\bar{y}) \in \Lambda(T)$ *il existe un terme* t *tel que*

$$T \vdash \theta(\bar{x},\bar{y}) \to \bar{y} = t(\bar{x}).$$

(2) *Les épis de* M(T) *sont surjectifs.*

(3) *Si* $\theta(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma(T)$ *alors il existe un terme* t *tel que* $T \vdash \theta(\bar{x},\bar{y}) \to \bar{y} = t(\bar{x})$.

5.24. COROLLAIRE. $b \in DOM(A,B)$ *si et seulement si il existe* $\theta(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma(T)$, $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in B$, $p_1(\bar{b}) = b$ *et* $B \models \theta(\bar{a},\bar{b})$.

§6. Sur les catégories abéliennes.

6.1. Un mono (resp. un épi) est appelé *régulier* s'il est de la forme Ker(f,g) (resp. Coker(f,g)).

6.2. PROPOSITION. *Soit* T *une variété. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *tout mono de* M(T) *est régulier,*

(b) *si* $f:A \to B$ *est un mono de* M(T), *alors* A = DOM(A,B).

(c) *pour toute formule pure* $\theta(z,x)$ *telle que*

$$T \vdash \forall\bar{z}\ \exists^{\leq 1} x\ \theta(z,x)$$

alors il existe un terme $t(\bar{z})$ *tel que*

$$T \vdash \forall\bar{z}\ \forall x(\theta(z,x) \to x = t(\bar{z})).$$

Démonstration. (b) → (c) [Bacsich, 1974]; (a) → (b) exercice.

6.3. PROPOSITION. *Soit* T *une variété telle que les monos sont réguliers, alors les épis sont surjectifs et réguliers.*

6.4. PROPOSITION. *Si* M(T) *est une catégorie abélienne* [Freyd, 1964], *alors le foncteur* G:M(T) → Ens *est monadique.*

Démonstration. Soit A et B ∈ M(T), $A*B$ le produit dans M(T) et $A\times B$ le produit dans M(ϕ). On aura le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
& A*B \arrow[dl, shift right, "\pi_1"'] \arrow[dr, shift left, "\pi_2"] \arrow[rrr, shift left, "\phi"] & & & A\times B \arrow[lll, shift left, "\psi"] \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
A \arrow[ur, shift right, "i_1"'] & & B \arrow[ul, shift left, "i_2"] & A & & B
\end{tikzcd}$$

avec $\phi(x) = (\pi_1(x), \pi_2(x))$ et $\psi(a,b) = i_1(a) + i_2(b)$. On a $\phi\circ\psi = 1 = \psi\circ\phi$, d'où $A*B$ est isomorphe à $A\times B$. Toute catégorie abélienne est convexe [Freyd, 1964]. M(T) a un objet nul, donc on peut supposer T une quasivariété, car par un théoreme de Feferman et Vaught [Chang-Keisler, 1973], M(T) a des presque-produits. La suite est un exercice.

6.5. PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) M(T) *a un objet nul canonique (préservé par* G),

(b) *il existe une et seulement une formule pure* $\phi(x)$, *à* T *isomorphisme pres, telle que* $T \vdash \exists^1 x\, \phi(x)$.

6.6. PROPOSITION. *Soit* M(T) *une variété. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) M(T) *est abélienne.*

(2) (a) M(T) *a un objet nul,*

(b) *tout mono est régulier,*

(c) M(T) *est modulaire.*

6.7. THÉORÈME. *À des fonctions de Skolem pres, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) M(T) *est abélienne.*

(b) M(T) *est isomorphe a la catégorie des modules sur un anneau* R.

(c) (i) T *est une variété,*

(ii) *il existe une et une seule formule pure* $\phi(x)$, *à* T *isomorphisme près, telle que*

$$T \vdash \exists^1 x\, \phi(x),$$

(iii) *pour toute formule pure* $\theta(\bar{z},x)$ *telle que*

$$T \vdash \forall\bar{z}\, \exists^{\leq 1} x\, \theta(\bar{z},x)$$

il existe un terme $t(z)$ *tel que*

$$T \vdash \forall\bar{z}\, \forall x(\theta(\bar{z},x) \rightarrow x = t(\bar{z})),$$

(iv) *il existe un entier* n *et une suite* $m_0, m_1, \ldots, m_n$ *de termes a quatre variables telles que*

$$T \vdash (m_0(x,y,z,t) = x) \wedge (m_n(x,y,z,t) = t)$$

$$T \vdash (m_i(x,y,y,x) = x, \quad i = 0,\ldots,n$$

$$T \vdash m_i(x,y,y,t) = m_{i+1}(x,y,y,t), \text{ pour } i \text{ impair}$$

$$T \vdash m_i(x,x,y,y) = m_{i+1}(x,x,y,y), \text{ pour } i \text{ paire}$$

Démonstration. (a) → (b). Soit M(T) abélienne. Par 6.4, T est une variété (a des fonctions de Skolem près). D'après le corollaire 2.2 de [Johnson et Manes, 1970] on a (b). (a)→(c) il en résulte de 6.3, 6.5, 6.6 et [Day, 1969].

§7. Conclusion.

Theories de Horn convexes.

7.1. M(L,T) est *stable par produits cartésiens* si les conditions suivantes: A est un modèle de T, B est un modèle de T, entraînent A×B est un modèle de T.

7.2. THÉORÈME. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) M(L,T) *est stable par produits cartésiens et est convexe.*

(b) T *est une théorie de Horn convexe.*

(c) *A fonctions de Skolem définissables près,* T *est une théorie de Horn universelle.*

7.3. THÉORÈME. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) T *est une théorie de Horn convexe et l'algebre ré-*

duite à un seul élément est un modele de T.

(b) M(L,T) *est une catégorie complète et le foncteur* G *a un adjoint.*

(c) À *functions de Skolem définissables près,* T *est une quasi-variété.*

(d) M(L,T) *est localment de présentation finie.*

7.4. THÉORÈME. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) T *est une théorie de Horn convexe positive.*

(b) G *est un foncteur monadique.*

(c) À *fonctions de Skolem définissables pres,* T *est une variété.*

Exemple typique. La théorie des groupes avec la multiplication (une seule fonction de Skolem définissable est nécessiare, elle est fournie par l'inverse).

7.5. THÉORÈME. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) M(L,T) *est une catégorie abélienne.*

(b) M(L,T) *est isomorphe à la catégorie des modules sur un anneau* R.

(c) À *fonctions de Skolem définissables près,* T *est une variété, en outre:*

(i) *il existe une et une seule formule pure* $\phi(x)$, *à* T *équivalence près, telle que*

$$T \vdash \exists^{1} x\ \phi(x);$$

(ii) *pour toute formule pure* $\gamma(\bar{w},x)$ *telle que*

$$T \vdash \exists^{\leqslant 1} x\ \gamma(\bar{w},x),$$

il existe un terme $\tau(\bar{w})$ *tel que*

$$T \vdash \gamma(\bar{w},x) \to x = \tau(\bar{w});$$

(iii) *il existe un entier* n *et une suite* $m_0,\dots,m_n$ *de termes à quatre variables tels que*

$$T \vdash (m_0(x,y,z,t) = x) \wedge (m_n(x,y,z,t) = t),$$

$$T \vdash m_i(x,y,y,x) = x, \quad i = 0,\dots,n,$$

$$T \vdash m_i(x,y,y,t) = m_{i+1}(x,y,y,t), \quad i \textit{ impair},$$

$$T \vdash m_i(x,x,y,y) = m_{i+1}(x,x,y,y), \quad i \textit{ pair}.$$

Sur les Epimorphismes d'une variété. Soit T une variété. Soient $\alpha = (a_0,a_1,\dots)$ et $\beta = (b_0,b_1,\dots)$ deux ensembles disjoints de variables. Etant donnée une formule ϕ de L, la notation $\phi(\alpha,\beta)$ veut dire que l'ensemble de variables libres de ϕ est un sous-ensemble de

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \{a_i,b_i\};$$

même notation pour $\phi(\alpha)$.

7.6. Soit D[T] l'ensemble des formules $\delta(\alpha,\beta)$ telles que

$$\delta(\alpha,\beta) = \bigwedge_{i=0}^{\infty} \phi_i(\alpha,\beta),$$

avec ϕ_i formules atomiques de L et $T \vdash \exists^{\leqslant 1} \beta\delta(\alpha,\beta)$.

7.7. THÉORÈME. *Soit* T *une variété. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *les épimorphismes de* M(L,T) *sont surjectifs;*

(b) *pour toute formule* $\delta(\alpha,\beta)$ *de* D[T] *il existe des termes* $\tau_0,\tau_1,\dots$ *de* L *tels que*

$$T \vdash \delta(\alpha,\beta) \to \bigwedge_i [b_i = \tau_i(\alpha)].$$

BIBLIOGRAPHIE

1 Bacsich, *Defining algebraic elements*, J.S.L. 38,1(1973).

2 Bacsich, *Model theory of epimorphisms*, Canad. Math. Bull. 17(4) (1974).

3 Bacsich et Hughes, *Syntactic characterisations of amalgamation, convexity and related properties*, J.S.L. 39, 3 (1974).

4 Chang et Keisler, *Model Theory*, North Holland, 1973.

5 Coste, *Une approche logique des théories définissables par limites projectives finies*, Seminaire Bénabou, 1976.

6 Csakany, *Varieties of modules and affine modules*, Acta Mathematica, tome 26 (1975), 263-266.

7 Day, *A characterization of modularity for congruence lattices of algebras*, Canad. Math. Bull. 12, 2 (1969).

8 Eklof, *Categories of local functors*, Lectures Notes in Mathematics, 498, Springer-Verlag, 1975.

9 Fittler, *Direct limit of models*, Zeitschr. F. Math. Logik und Grundlangen D. Math. 16 (1970).

10 ———, *A characteristic direct limit property*. Zeitschr. F. Math. Logik und Grundlangen. D. Math. 18 (1970).

11 ———, *Categories with ultraproducts*. Comment. Math. Helv. 48 (1973).

12 ———, *Some categories of models*. Arch. Math. Logik 15 (1972).

13 ———, *Saturated models of incomplete theories*, Arch. Math. Logik 16 (1974).

14 Freyd, *Abelian categories*, Harper and Row, 1964.

15 ———, *The theories of functors and models*, Symposium on the theory of models, North-Holland, 1965.

16 Grätzer G., *Universal Algebra*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1968.

17 Isbell, *Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras*, Ruzprawy Mat. 36 (1964).

18 ———, *Structure of categories*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966).

19 Johnson et Manes, *On modules over a semiring*, J. of Algebra 15 (1970).

20 Johnson, *Algebraic extensions of relational systems*, Math. Scand. 11 (1962).

21 Keane, *Abstract Horn theories*, Model theory and topoi, Lec. Notes in Math. 445, Springer-Verlag, 1974.

22 Keisler, *Theory of models with generalized atomic formulas*, J.S.L. 25, 1 (1960).

23 Kreisel-Krivine, *Eléments de Logique Mathématique*, Dunod, 1967.

24 Lawvere, *Functorial semantics of algebraic theories*, Proc. Nat. Acad. Sci. 50, (5) (1963).
25 Linton, *Procedings of the conference on categorical algebra*, La Jolla 1965, Springer-Verlag, 1966.
26 Mal'cev, *The metamathematics of algebraic systems*, North-Holland, 1971.
27 ————, *Algebraic Systems*, Springer-Verlag, 1973.
28 Pareigis, *Categories and functors*, Academic Press, 1970.
29 Richter, *Limites in categorien von relational systemen*, Zeitschr, F. Math. 17 (1971).
30 Robinson, *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*, North-Holland, 1963.

* *

GR22 C.N.R.S.
Institut de Programmation
4, place Jussieu
75230 Paris, FRANCIA

(Recibido en Octubre de 1981)