Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XVIII (1984), págs. 83 - 98

TEORIA DE PUNTOS CRITICOS DE FUNCIONES LOCALMENTE LIPSCHITZIANAS Y SUS APLICACIONES

by

Mario ZULUAGA URIBE

§1. Introducción. El estudio de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales con parte no lineal discontinua ha tenido un floreciente desarrollo en los últimos años debido a su relación con problemas tecnológicos. Por ejemplo la *Ecuación de Elanbaas* sobre conductividad térmica en medios electrizados viene expresada así:

$$\Delta v = \frac{c}{k} f(v) \text{ en } \Omega,$$
$$v = 0 \text{ en } \partial\Omega,$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} t+t_o & \text{si } t > T-t_o \\ 0 & \text{si } t \leq T-t, \end{cases}$$

k representa una constante de conductividad térmica del medio y c un parámetro. En este artículo estudiaremos el siguiente problema elíptico:

$$\Delta u = \phi(x,u) \text{ en } \Omega,$$
$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega,$$

donde $\phi:\Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ presenta discontinuidades en u.

Haremos uso de las técnicas del cálculo subdiferencial desarrolado por F. Clarke en [4] y haremos una generalización, a funciones localmente lipschitzianas, de los métodos de reducción que han sido desarrollados por A. Castro y A. Lazer en [1] y [6] para funciones de clase C^1.

§2. **Elementos del cálculo subdiferencial.** Sea E un espacio de Banach reflexivo con E^* su dual. Denotaremos con $\langle z^*,x\rangle$ la imagen de $x \in E$ por el funcional $z^* \in E^*$.

DEFINICION 2.1. Sea $f:E\to\mathbb{R}$. Decimos que f es *localmente lipschitziana* si para cada $x \in E$ existe una vecindad U de x y una constante $k > 0$, que depende de U, tal que

$$|f(y)-f(z)| \leq k\|y-z\| \tag{2.1}$$

para todo $y,z \in U$.

DEFINICION 2.2. Sea $f:E\to\mathbb{R}$ localmente lipschitziana. Para cada $v \in E$ definimos la derivada direccional generalizada en x y en la dirección de v como:

$$f^{\circ}(x,v) = \overline{\lim_{\substack{h\to 0\\ \lambda\to 0^+}}} \frac{f(x+h+\lambda v)-f(x+h)}{\lambda} \tag{2.2}$$

Unas de las consecuencias más inmediatas de la definición (2.2) son las siguientes:

a) $f^{\circ}(x,v_1+v_2) \leqslant f^{\circ}(x,v_1) + f^{\circ}(x,v_2)$

b) $f^{\circ}(x,\lambda v) = \lambda f^{\circ}(x,v)$ para $\lambda \geqslant 0$.

Como consecuencia de (a) y (b) se desprende que

c) $f^{\circ}(x,-):E \to \mathbb{R}$ es convexa.

Debido a que es localmente lipschitziana se sigue que:

d) $|f^{\circ}(x,v)| \leqslant k\|v\|$, donde $k > 0$ depende de x y una vecindad de x.

La siguiente definición es debida a F.H. Clarke y aparece en [4].

DEFINICION 2.3. El *gradiente generalizado* de $f:E \to \mathbb{R}$, *localmente lipschitziano en* x, y denotado por $\partial f(x)$ se define:

$$\partial f(x) = \{z \in E^{*}:\langle z,v\rangle \leqslant f^{\circ}(x,v),\ v \in E\}. \tag{2.3}$$

Las propiedades F-1 a F-9 que aparecen en seguida se deben a F.H. Clarke y su prueba aparece en [4]. La propiedad F-10, debida a K.C. Chang, aparece en [2].

F-1 El conjunto $\partial f(x)$ es no vacío, convexo y compacto en la topología estrella débil ($\mathcal{D}^{*}$).

F-2 Para cada $v \in E$, $f^{\circ}(x,v) = \mathrm{Max}\{\langle z,v\rangle,\ z \in \partial f(x)\}$.

F-3 Sea $\Omega \subset E^{*}$ convexo y compacto en la topología $\mathcal{D}^{*}$, entonces $\partial f(x) \subset \Omega$ si y sólo si $f^{\circ}(x,v) \leqslant \mathrm{Max}\{\langle z,v\rangle,\ z \in \Omega\}$.

F-4 Si f es convexo entonces $\partial f(x) = \{z \in E^{*},\ f(y)-f(x) \geqslant \langle z,y-x\rangle\}$ cualquiera que sea $y \in E$.

F-5 Si f admite una derivada de Gateaux en una vecindad V de x y $\mathcal{D}f:V \to E^{*}$ es continua, entonces $\partial f(x) = \{\mathcal{D}f(x)\}$.

F-6 Si x es un punto de mínimo local de f entonces $0 \in \partial f(x)$.

F-7 Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\partial(\lambda f)(x) = \lambda \cdot \partial f(x)$.

F-8 Para todo f, g localmente lipschitzianas,

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x).$$

F-9 Sea $z_i \in \partial f(x_i)$ para $i = 1,2,\ldots$ y supóngase que $x_i \to x$ y que $z_i \to z$ en el sentido de la topología $\mathcal{D}^*$. Entonces $z \in \partial f(x)$.

F-10 Sean E y F dos espacios de Banach reflexivos tales que $E \subset F$, E denso en F y la inclusión $i:E \to F$ continua. Sea f localmente lipschitziana en F y llamemos $\hat{f} = f|_E$ entonces

$$\partial\hat{f}(x) \subset \partial f(x) \tag{2.4}$$

para todo $x \in E$. Si f es, además, convexa, en (2.4) se tiene la igualdad.

§3. <u>Teorema principal</u>.

En esta sección consideraremos un espacio de Hilbert real H y dos subespacios X y Y, ortogonales entre sí, cerrados y tales que $H = X \oplus Y$, con $\dim X < \infty$. Llamaremos P_1 y P_2 a las proyecciones ortogonales de H sobre X y Y respectivamente.

DEFINICION 3.1. Sea $J:H \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana. Decimos que $u \in H$ es un *punto crítico* de J si $0 \in \partial J(u)$.

TEOREMA 3.2. *Sea $J:H \to \mathbb{R}$ una aplicación que satisface las siguientes condiciones:*

1) *J es localmente lipschitziana.*

2) *$J(x) \to -\infty$ cuando $\|x\| \to \infty$, $x \in X$.*

3) *Para cada $x \in X$ la aplicación $J_x: Y \to \mathbb{R}$, $J_x(y) = J(x+y)$ es es-*

trictamente convexa, y $J_x(y) \to \infty$ *si* $\|y\| \to \infty$.

4) *Existe* $m > 0$ *tal que para todo* $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$

$$|<z_1 - z_2, \; y_1 - y_2>| \geqslant m\|y_1 - y_2\|^2 \tag{3.0}$$

cualquiera sea $z_1 \in \partial J_x(y_1)$, $z_2 \in \partial J_x(y_2)$.

Entonces existen $x_o \in X$, $y_o \in Y$ *tales que* $x_o + y_o$ *es punto crítico de* J *en el sentido de la definición* 3.1.

Demostración. La prueba la haremos con la ayuda del siguiente lema .

LEMA 3.3. *Sea* $J: H \to \mathbb{R}$ *localmente lipschitziana. Para cada* $x \in X$, *y cada* $y \in Y$ *definimos* $J_x: H \to \mathbb{R}$, $J_y: H \to \mathbb{R}$ *así:*

$$\begin{aligned} J_x(h) &= J(x + p_2 h) \\ J_y(h) &= J(y + p_1 h). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Entonces se tiene:

a) *Si* $0 \in \partial J_y(x)$ *entonces* $\partial J_x(y) \subset \partial J(x+y)$.

b) *Si* $0 \in \partial J_x(y)$ *entonces* $\partial J_y(x) \subset \partial J(x+y)$.

Demostración. Observemos que $J_x|_Y$ coincide con la aplicación $J_x: Y \to \mathbb{R}$ que aparece en la condición 3) del Teorema 3.2. Es claro que J_x, J_y son localmente lipschitzianas. Daremos únicamente la prueba de la parte a); la parte b) tiene una demostración análoga. Sea $w \in \partial J_x(y)$. Para cada $v \in H$,

$$<w, v> \leqslant J_x^o(y, v) \leqslant J^o(x+y, p_2 v). \tag{3.2}$$

Por otro lado, para todo $v \in H$

$$J^o(x+y, \; p_1 v) \geqslant J_y^o(x, v). \tag{3.3}$$

Como $0 \in \partial J_y(x)$, $J_y^o(x, v) \geqslant 0$ y de la desigualdad (3.3) tenemos para todo $v \in H$

$$J^{o}(x+y,p_1 v) \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Afirmamos que para todo $v \in H$, se tiene que

$$\begin{aligned} J^{o}(x+y,p_2 v) &\leqslant J^{o}(x+y,p_1 v+p_2 v) \\ &= J^{o}(x+y,v). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si no fuese así existiría $v_o \in H$ tal que $J^{o}(x+y,p_2 v_o) >$ $J^{o}(x+y,v_o)$. De la propiedad F-2 del §2 se sigue que $\max\{<z,p_1 v_o>: z \in \partial J(x+y)\} < 0$, que es contrario a la desigualdad (3.4).

Reemplazando (3.5) en (3.2) obtenemos que $w \in \partial J(x+y)$ como queríamos. Así queda probado el lema.

Pasemos ahora a la prueba del Teorema 3.2. La condición (3) implica la existencia de un único punto mínimo de la función $J_x: Y \to \mathbb{R}$, $x \in X$. Ver por ejemplo [5]. Podemos construír una función $T: X \to Y$ donde $T(x)$ es el único punto de mínimo de J_x. Esto es $J_x(y) > J_x(T(x))$ si $y \neq T(x)$. De la propiedad F-6 del §2, se sigue que $0 \in \partial J_x(T(x))$. Aplicando la desigualdad (3.0) a $y_1 = 0$, $y_2 = T(x)$, y usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene

$$\|\partial J_x(0)\| \geqslant m\|T(x)\|, \tag{3.6}$$

donde (3.6) debe entenderse válida para todo $z \in \partial J_x(0)$. Como $\partial J_x(0)$ es acotada y como $\dim X < \infty$, de (3.6) se sigue que T envía conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Nuestro siguiente propósito es ver que T es continua. Supongamos que T no es continua en x. Entonces existen $\varepsilon_o > 0$, una secuencia $\{x_n\} \subset X$ tal que $x_n \to x$ y una subsecuencia

$\{T(x_{n_k})\} \subset \{T(x_n)\}$ tal que $\|T(x_{n_k})-T(x_n)\| > \varepsilon_o$. El conjunto $\overline{\{T(x_{n_k})\}}$ es cerrado y acotado, por lo tanto débilmente compacto. De otra parte J_χ es convexa y, por lo tanto, débilmente inferiormente semicontinua. Es bien conocido que funciones débilmente inferiormente semicontinuas alcanzan un mínimo en conjuntos débilmente cerrados (véase por ejemplo [9], pág.78). Concluímos que existe $y_1 \in Y$ tal que $\|y_1-T(x)\| > \varepsilon_o$ que satisface

$$J_\chi(T(x)) < J_\chi(y_1) < J_\chi(T(x_{n_k})) \qquad (3.7)$$

para todo n_k, $k = 1,2,\ldots$.

Como J es continua, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ $J_{\chi_n}(T(x)) < J_\chi(y_1)$. De 3.7) se deduce que para n_k suficientemente grande $J_{\chi_n}(T(x)) < J_{\chi_{n_k}}(T(x_{n_k}))$, cualquiera que sea $n \geq N$. Tomando $n = n_k$ tenemos que $J_{\chi_{n_k}}(T(x)) < J_{\chi_{n_k}}(T(x_{n_k}))$ que es contrario a la definición de la función T. Esto prueba la continuidad de T.

Sea $J_\chi : H \to \mathbb{R}$ tal como se definió en (3.1). Veamos que $0 \in \partial J_\chi(T(x))$. En efecto, $J_{\chi|Y}$ alcanza en $T(x)$ un mínimo. Por otra parte:

$$J^o_\chi(T(x),v) = \overline{\lim_{\substack{h\to o\\ \lambda\to o^+}}} \frac{1}{\lambda}[J(x+T(x)+p_2(h+\lambda v))-J(x+T(x)+p_2h)]$$

Si tomamos $h \in X$ entonces $p_2h = 0$ y el numerador del cociente anterior es mayor o igual a cero, luego $J^o_\chi(T(x),v) \geq 0$ que equivale a $0 \in \partial J_\chi(T(x))$. Afirmamos que existe $x_o \in X$ tal que $0 \in \partial J_{T(x_o)}(x_o)$. En efecto $J_\chi(T(x)) = J(x+T(x)) \leq J_\chi(0) = J(x)$, entonces de la condición (2) del Teorema 3.2 se deduce que la aplicación $J(\cdot+T\cdot) : X \to \mathbb{R}$ tiende a $-\infty$ si $\|x\| \to \infty$. Puesto que T es continua, $J(\cdot+T\cdot)$ también lo es y como $\dim X < \infty$ tenemos que existe $x_o \in X$ en el cual $J(\cdot+T\cdot)$ alcanza un máximo absoluto. Por otro lado, para cada $v \in H$

$$-J(x_o+T(x_o)+\lambda p_1 v) + J(x_o+T(x_o)) \geq 0$$

y esto implica que $(-J_{T(x_o)})^o(x_o,v) \geq 0$, de modo que $0 \in \partial(-J_{T(x_o)})(x_o)$. De la propiedad F-7 del §2 se sigue que $0 \in \partial J_{T(x_o)}(x_o)$. Como $0 \in \partial J_{x_o}(T(x_o)) \cap \partial J_{T(x_o)}(x_o)$ del Lema 3.3 se tiene que $0 \in \partial J(x_o+T(x_o))$ y el Teorema 3.2 queda probado.

§4. Aplicaciones a un problema elíptico.

En esta sección Ω denotará una región acotada de $\mathbb{R}^n$. Estudiaremos la existencia de soluciones del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \phi(x,u) \text{ en } \Omega, \\ u &= 0 \text{ en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde Δ representa al operador diferencial $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\phi:\Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sujeto a algunas condiciones que daremos posteriormente, y $\partial\Omega$ representa la frontera de Ω. Por $C_o^1(\Omega)$ representamos el conjunto de las funciones continuamente diferenciables con soporte compacto contenido en Ω. Lo dotamos con el producto interno

$$\langle u,v\rangle_1 = \int_\Omega u\cdot v + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \tag{4.2}$$

y a su complemento lo llamamos el *espacio de Sobolev* $H_o^1(\Omega)$.

En lo que sigue $\| \ \|_1$, $\langle\ ,\ \rangle_1$ denotarán la norma y el producto interno en $H_o^1(\Omega)$ y $\| \ \|_o$, $\langle\ ,\ \rangle_o$ denotarán la norma y el producto interno en $L^2(\Omega)$.

DEFINICION 4.1. Sea $J:H_o^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla u)^2 - \int_\Omega\{\int^u \phi(x,s)ds\} \tag{4.3}$$

donde $(\nabla u)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2$. Decimos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una *solución débil* del problema (4.1) si $0 \in \partial J(u)$.

COMENTARIO. La Definición 4.1, dada por K.C. Chang en [2], constituye una generalización natural del concepto de solución débil de un problema del tipo (4.1), que aparece en la literatura cuando el funcional J es de clase C^1, debido a que en este caso $\partial J(u)$ consistiría del único elemento $\nabla J(u)$. En general nuestro funcional J de (4.3) no será de clase C^1 sino localmente lipschitziano o a lo sumo lipschitziano sobre conjuntos acotados.

Sea $\{\lambda_n\}$ el conjunto de valores propios del problema

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{en } \Omega \,, \\ u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

y sean $\{\psi_1,\ldots,\psi_n\ldots\}$ las soluciones débiles correspondientes. Llamaremos $X = \langle\psi_1,\ldots\psi_{k-1}\rangle$ al espacio generado por las k-1 primeras funciones propias del problema (4.4). Sea $Y = \langle\psi_k,\psi_{k+1},\ldots\rangle$. Es bien sabido (ver [7]) que $H_0^1(\Omega) = X \oplus Y$ y se satisface

$$\|x\|_1 \leq \lambda_{k-1}\|x\|_0 \,, \tag{4.5}$$

$$\|y\|_1 \geq \lambda_k\|y\|_0 \,, \tag{4.6}$$

para todo $x \in X$, $y \in Y$.

TEOREMA 4.1. *Supongamos que ϕ $\Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface las siguientes propiedades*

A. $\phi(x,u) = \gamma u - h(u) + f(x)$ *donde* $f \in L^2(\Omega)$, $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es creciente,* $\lambda_k > \gamma > 0$, λ_k *es el k-ésimo valor propio del problema* (4.4), $\gamma \in \mathbb{R}$.

B. $|\phi(x,u)| \leqslant C_1(x)+C_2|u|$ *para algún* $C_1(x) \in L^2(\Omega)$, $C_2 > 0$.

C. *Los números*

$$\phi'(\pm\infty) = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\gamma t-h(t)}{t}$$

satisfacen $\phi'(-\infty)<\lambda_{k-1} < \phi'(+\infty) < \lambda_k$.

Entonces el problema (4.1) *tiene, por lo menos, una solución débil.*

Demostración. Veamos primero que la aplicación J definida en (4.3) es localmente lipschitziana y que

$$\partial J(u)\subset-\Delta u-\gamma u-f+[\underline{h}(u),\bar{h}(u)] \tag{4.7}$$

donde

a) $\Delta u \subset H_o^1(\Omega)^*$, $\int_\Omega \Delta u\cdot v = \int_\Omega <\nabla u\cdot\nabla v>$.

b) $\bar{h}(t) = \overline{\lim}_{s\to t} h(s)$, $\underline{h}(t) = \underline{\lim}_{s\to t} h(s)$ y $[\underline{h}(u),\bar{h}(u)] = \{s \in L^2(\Omega)$: $\underline{h}(u(x)) \leqslant s(x) \leqslant \bar{h}(u(x))\}$

En efecto: la aplicación $g(u) = \int_\Omega\int_o^u \phi(x,t)dt$ es localmente lipschitziana puesto que de la condición B se desprende que

$$|g(u)-g(v)| \leqslant [\|C_1\|_o + \frac{C_2}{2} \operatorname{Max}_{w\in U}\|w\|_o]\|u-v\|_o ,$$

donde U es una vecindad que envuelve a u, v. De otra parte $H_o^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es una inclusión continua lo cual prueba que g es localmente lipschitziana. Es bien sabido que $\frac{1}{2}\int_\Omega(\nabla u)^2$ define en $H_o^1(\Omega)$ una norma equivalente y así queda probado que J es localmente lipschitziana.

Para ver (4.7) escribamos J así

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega(\nabla u)^2 - \frac{\gamma}{2}\int_\Omega u^2 - \int_\Omega f\cdot u + \int_\Omega\int_o^u (h(s))ds. \tag{4.8}$$

Consideremos el último sumando, $F(u) = \int_\Omega\int_o^u h(s)ds$. De la condición **B** y del hecho de que h es creciente se desprende que F es localmente lipschitziana y convexa. Un cálculo nos muestra que

$$F^{o}(u,v) \leqslant \begin{cases} \int_{\Omega} \bar{h}(u)\cdot v, & v \geqslant 0, \\ \int_{\Omega} \underline{h}(u)\cdot v, & v < 0. \end{cases}$$

Entonces $\partial F(u) \subset [\underline{h}(u),\bar{h}(u)]$. Por otra parte, si $w \in [\underline{h}(u),\bar{h}(u)]$ entonces $w(v-u) \leqslant \int_{u}^{v} h(t)dt$ para todo $v \in L^{2}(\Omega)$. De la propiedad F-4 del §2 se sigue que $w \in \partial F(u)$ y de ahí $\partial F(u) = [\underline{h}(u),\bar{h}(u)]$. Los otros tres sumandos del miembro derecho de (4.8) tienen como gradiente generalizado a $-\Delta u$, $-\gamma u$, $-f$, respectivamente. De F-8 se sigue (4.7).

Consideremos, para cada $x \in X$, la aplicación $J_{x}: Y \to \mathbb{R}$, $J_{x}(y) = J(x+y)$ donde J es la aplicación definida en (4.3). Veamos que J_{x} es estrictamente convexa y que $J_{x}(y) \to +\infty$ si $\|y\|_{1} \to \infty$. De la condición B se deduce la existencia de $M > 0$, $\varepsilon > 0$ tales que

$$\left.\begin{aligned} \phi(x,t) &< (\lambda_{k}-\varepsilon)t+M+f(x), \quad t \geqslant 0, \\ \phi(x,t) &> (\lambda_{k}-\varepsilon)t-M+f(x), \quad t < 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

De (4.9) se obtiene

$$\int_{\Omega}\{\int_{0}^{x+y} |(\lambda_{k}-\varepsilon)t+M+f(z)|dt\}dz \geqslant \int_{\Omega}\{\int_{0}^{x+y} \phi(z,t)dt\}dz. \tag{4.10}$$

De la desigualdad (4.6) se sigue que

$$\int_{\Omega}\{\int^{x+y} |(\lambda_{k}-\varepsilon)t+M+f(z)|dt\}dz \leqslant \frac{\lambda_{k}-\varepsilon}{2}\| x+y\|_{o}^{2}+M_{1}\| x+y\|_{o}$$

$$\leqslant \frac{\lambda_{k}-\varepsilon}{2}\left[\frac{\|y\|_{1}^{2}}{\lambda_{k}}+\|x\|_{o}\right]+M_{1}\| x+y\|_{o} \tag{4.11}$$

para algún $M_{1} > 0$. De (4.3), (4.10) y (4.11) se sigue que

$$J_x(y) \geq \frac{1}{2}\Big[1-\frac{\lambda_k-\varepsilon}{\lambda_k}\Big]\|y\|_1^2 + \frac{1}{2}\Big[1-\frac{\lambda_k-\varepsilon}{\lambda_k}\Big]\|x\|_1^2 - M_1\|x+y\|_0 . \qquad (4.12)$$

Debido a que $1 > (\lambda_k-\varepsilon)/\lambda_k$, de (4.12) se sigue que $J_x(y) \to \infty$ si $\|y\|_1 \to \infty$. Para ver que J_x es estrictamente convexa introducimos la siguiente

DEFINICION 4.2. Una transformación afín $A(x) = \alpha+T(x)$, T una funcional lineal, se dice una *función soporte* de J en x_0 si $A(x) \leq J(x)$ para todo x y $A(x_0) = J(x_0)$.

Es bien sabido que una función es convexa en un abierto si, y sólo si, admite en cada punto del abierto una función soporte (ver [8]). Para $x \in X$, fijo escribamos J_x así

$$J_x(y) = \frac{1}{2}\|y\|_1^2 - \frac{\gamma}{2}\|y\|_0^2 + \int_\Omega\{\int_0^{x+y} h(t)dt\}dz \qquad (4.15)$$
$$+ \int_\Omega(-f)y + \frac{1}{2}\|x\|_1^2 - \frac{\gamma}{2}\|x\|_0^2 - \int_\Omega f\cdot x .$$

En (4.13) estamos tomando $\sqrt{\int_\Omega(\nabla u)^2}$ como norma equivalente para $H_0^1(\Omega)$, ver [7]. $\int_\Omega -f\cdot y$ es un funcional lineal, luego es convexo, como h es creciente entonces $\int_\Omega\int_0^u h(t)dt$ es convexo. Bastaría probar que

$$B(y) = \frac{1}{2}\|y\|_1^2 - \frac{\gamma}{2}\|y\|_0^2$$

es estrictamente convexo. Para simplificar veamos que B tiene en $y = 0$ una función soporte; el caso $y \neq 0$ lo podemos reducir al anterior por una traslación. Sea $y \in Y$ fijo y no nulo. Sea $Y_0 = \{ty : t \in \mathbb{R}\}$. Definamos $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(t) = B(ty)$. Puesto que $\lambda_k > \gamma$, de (4.6) se deduce que g es estrictamente convexa y admite en cada punto una función soporte (ver [8]). Sea G dicha función soporte. Definamos en Y_0 la siguiente función: $A_0(ty) = G(t)$; es claro que A_0 es una función soporte de B en 0 con respecto a Y_0. Por el teorema de Hahn-Banach (ver [8]), A_0 admite una extensión A afín a todo el espacio V tal que $A(0) = B(0)$, $A(y) = B(y)$ para todo $y \in V$. Puesto que g es estrictamente convexa, B también lo será y queda demostrada la convexidad estricta de J_χ.

Para finalizar la prueba del Teorema 4.1 solo resta probar la existencia de $m > 0$ tal que para todo $z_1 \in \partial J_\chi(y_1)$, $z_2 \in \partial J_\chi(y_2)$ se satisface la desigualdad (3.0). En efecto, análogamente a la desigualdad (4.7) tenemos

$$\partial J_\chi(y) \subset -\Delta(y) - \gamma y - f + [\underline{h}(x+y), \bar{h}(x+y)].$$

Puesto que h es creciente entonces es continua salvo un número contable de puntos. Para $S(t) \in L^2(\Omega)$, $S(t) \in [\underline{h}(x+y), \bar{h}(x+y)]$, se tiene que $S(t) = h(x(t)+y(t))$ para casi todo $t \in \Omega$. Sea $z_1 \in \partial J_\chi(y_1)$, $z_2 \in \partial J_\chi(y_2)$ entonces

$$z_1 = -\Delta(y_1) - \gamma y_1 - f + S_1$$
$$z_2 = -\Delta(y_2) - \gamma y_2 - f + S_2$$

con $S_i \in [\underline{h}(x+y_i), \bar{h}(x+y_i)]$, $i = 1,2$. Debido a (4.6), h creciente y $\lambda_k > \gamma$ tenemos

$$<z_1 - z_2, y_1 - y_2> = \int_\Omega [\nabla(y_1 - y_2)]^2 - \gamma \int_\Omega (y_1 - y_2)^2 + \int_\Omega (S_1 - S_2)(y_1 - y_2)$$
$$\geqslant (1 - \frac{\gamma}{\lambda_k}) \int_\Omega [\nabla(y_1 - y_2)]^2 = m\|y_1 - y_2\|_1^2, \quad m > 0.$$

De otra parte: de la condición C se deduce la existencia de $M > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que para todo $t \in \mathbb{R}$, $\phi(x,t) > (\lambda_{k-1}+\varepsilon)t - M + f(x)$ y entonces

$$J(x) \leqslant \frac{1}{2}\|x\|_1^2 - \frac{1}{2}(\lambda_{k-1}+\varepsilon)\|x\|_0^2 + \|f(x) - M\|_0 \|x\|_0. \tag{4.14}$$

De (4.14) y (4.5) se obtiene

$$J(x) < -\frac{\varepsilon}{2}\|x\|_o^2 + \|f(x)-M\|_o\|x\|_o \qquad (4.15)$$

Si $\|x\|_1 \to \infty$ entonces $\|x\|_o \to \infty$ y de (4.15) obtenemos que $J(x) \to -\infty$. Vemos entonces que se satisfacen todas las hipótesis del Teorema 3.2 y queda demostrado el Teorema 4.1.

Otros trabajos donde se estudian problemas en los que $\phi(x,u)$ presenta discontinuidades con respecto a u son [2], [3].

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Castro, A. and Lazer, A., "Critical Point Theory and the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem", Annali di Mat. pura ed applicata (IV), Vol. CXX (1979), 113-137.

[2] Chang. K.C., "Variational methods for non differential functionals and its applications to partial differential equations", J. of Math. Analysis and its applications, 80 (1981), 102-129.

[3] ——————., "On the multiple solutions of the elliptic differential equations with discontinuous nonlinear term", SCI, Sinica 21 (1978), 139-158.

[4] Clarke, F.H., "A new approach to Lagrange Multipliers", Math. of Operations Research, Vol. 1, #2 (1976), 165-174.

[5] Ekeland, I. and Teman, R., *Convex Analysis and Varional problems*, Studies in Mathematics and applications, North Holland Publishing Company, Oxford, 1976.

[6] Lazer A. Landesman, E. and Meyers, D., "On the sadle point problems in the calculus of variations; the Rietz algorithm and monotone convergence", J. Math. and Appl. 53 (1975), 549-614.

[7] Mijailov, V.P., *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*, Mir, Moscú, 1978.

[8] Varberg, D.E. and Wayne, R., *Convex functions*. Academic Press N.Y., 1973.

[9] Vainberg, M.M., *Variational methods for the study of nonlinear operators*, Holden-Day, San Francisco, London, Amsterdam, 1964.

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E. COLOMBIA.

(Recibido en marzo de 1983, versión revisada en Mayo de 1984).

* *