Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XVIII (1984), págs. 109-114

ALGUNAS APROXIMACIONES SUCESIVAS PARA LAS APLICACIONES EN LA CLASE D(a,b)

por

Lucimar NOVA G.

Sean X un espacio de Banach y K un subconjunto de X. Una aplicación T de K en sí mismo se dice pertenecer a la clase D(a,b) si satisface:

$$\|Tx-Ty\| \leqslant a\|x-y\| + b(\|x-Tx\| + \|y-Ty\|)$$

para todo $x,y \in K$.

En general se sabe que si T es una contracción, definida en un espacio métrico completo, la sucesión de Picard $\{T^n x_o\}_n$ definida a partir de un x_o arbitrario, converge al único punto fijo de T. Mientras que si T es una aplicación no-expansiva, esto no siempre se tiene (Ej. $X = \ell^2$, uniformemente convexo, $T:X \to X$, $Tx = (0,x_1,x_2,\ldots)$, $T0 = 0$ único punto fijo de T, $T^n x = (0,\ldots,0,x_1,x_2,\ldots)$, $\|T^n x-0\|^2 = \|x\|^2 \neq 0$ si $x \neq 0$).

Los primeros en estudiar este tipo de problemas fueron

Krasnoselskii [4], Schaefer [5], Edelstein [2] y últimamente Browder, Petryshin [1] y W. Kirk [3].

En este artículo usaremos las técnicas desarrolladas por Kirk para los operadores D(a,b), aprovechando condiciones de convexidad sobre K.

Un hecho que llama la atención es que se pueden construir nuevos operadores en D(a,b):

LEMA 1. *Sean* X *un espacio de Banach y* K *un subconjunto convexo de* X. *Si* T *es un operador definido de* K *en sí mismo en la clase* D(a,b) *y* $\alpha \in (0,1)$, $S = \alpha I+(1-\alpha)T$, *entonces* $S \in D(a',b)$ *con* $a' = \alpha+(1-\alpha)a$.

Prueba. Nótese que

$$\begin{aligned}(1-\alpha)(x-Tx) &= (1-\alpha)x-(1-\alpha)Tx\\ &= (1-\alpha)x+\alpha x-[(1-\alpha)Tx+\alpha x]\\ &= x - Sx.\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}\|Sx-Sy\| &= \|\alpha x+(1-\alpha)Tx-\alpha y-(1-\alpha)Ty\|\\ &\leqslant \alpha\|x-y\|+(1-\alpha)\|Tx-Ty\|\\ &\leqslant [\alpha+(1-\alpha)a]\|x-y\|+(1-\alpha)b(\|x-Tx\|+\|y-Ty\|)\\ &= [\alpha+(1-\alpha)a]\|x-y\|+b(\|x-Sx\|+\|y-Sy\|). \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Nótese además que la propiedad

$$(I-T)\left\{\begin{matrix}\text{cerrado}\\ \text{acotado}\end{matrix}\right\} = \text{cerrado}$$

de cierta manera también se conserva para operadores en las clases D(a,b).

LEMA 2. *Bajo las hipótesis del Lema 1,*

$$(I-T)\begin{Bmatrix}\textit{cerrado}\\ \textit{acotado}\end{Bmatrix} = \textit{cerrado} \subseteq X \Leftrightarrow (I-S)\begin{Bmatrix}\textit{cerrado}\\ \textit{acotado}\end{Bmatrix} = \textit{cerrado}.$$

Prueba. En efecto, sean $H \subseteq K$ cerrado y acotado y $\{x_n\} \subseteq H$ tal que $(I-S)x_n \to z$ cuando $n \to \infty$. Debemos ver que $z \in (I-S)H$. De la definición de S, se tiene que $x_n-\alpha x_n-(1-\alpha)Tx_n \to z$ cuando $n \to \infty$, i.e. $(1-\alpha)(x_n-Tx_n) \to z$. Como $\alpha < 1$, entonces $(I-T)x_n \to z/(1-\alpha)$ con $\{x_n\} \subseteq H$, $H \subseteq K$ cerrado y acotado, entonces $z/(1-\alpha) \in (I-T)H$, i.e. existe $w \in H$ tal que $z/(1-\alpha) = w-Tw$, o sea:

$$z = (1-\alpha)(w-Tw) = (I-S)w, \quad w \in H.$$

De otra parte, si $(I-T)x_n \to z$, entonces

$$(I-S)x_n = x_n-\alpha x_n-(1-\alpha)Tx_n = (1-\alpha)(x_n-Tx_n) \to (1-\alpha)z;$$

luego existe $w \in H$ tal que $(1-\alpha)z = (I-S)w = w-Sw$, i.e. $(1-\alpha)z = w-\alpha w-(1-\alpha)Tw = (1-\alpha)(w-Tw)$ y puesto que $\alpha < 1$, $z = (I-T)w$ con $w \in H$. ▲

Otro hecho que merece la pena observar es que se pueden obtener operadores asintóticamente regulares en todo punto:

LEMA 3. *Si además de las hipótesis del Lema 1 consideramos* X *uniformemente convexo,* $a+2b$, $a'+2b < 1$ *y* $F_T = \{x/Tx = x\} \neq \emptyset$, *entonces* S *es asintóticamente regular en todo punto.*

Prueba. Obsérvese que $F_T = F_S$. Sean $x \in K$, $x_n = S^n x$, $u \in F_T$, entonces

$$\|x_n-u\| = \|S^n x-Su\| \leqslant a'\|S^{n-1}x-u\|+b\|S^{n-1}x-S^n x\|$$

$$\leqslant a'\|S^{n-1}-u\|+b\|S^{n-1}x-u\|+b\|u-S^n x\|$$

de donde

$$\|x_n-u\| \leqslant \frac{a'+b}{1-b}\|x_{n-1}-u\|$$

y como $a'+2b < 1$, se tiene que la sucesión $\{\|x_n-u\|\}_n$ es decreciente. Sea

$$d = \lim_{n\to\infty}\|x_n-u\|.$$

Si $d = 0$, entonces

$$\|S^nx-S^{n+1}x\| \leqslant \|S^nx-u\| + \|S^{n+1}x-u\|$$

y así,

$$\lim_{n\to\infty}\|S^nx-S^{n+1}x\| = 0 ;$$

es decir, S es asintóticamente regular en x. Si $d > 0$,

$$x_{n+1}-u = Sx_n-u = \alpha(x_n-u)+(1-\alpha)(Tx_n-u).$$

Sea $z_n = Tx_n-u$, entonces

$$\|z_n\| \leqslant a\|x_n-u\|+b\|x_n-u\|+b\|u-Tx_n\|;$$

es decir,

$$\|z_n\| \leqslant \frac{a+b}{1-b}\|x_n-u\|$$

y como $a+2b < 1$, entonces $\|z_n\| \leqslant \|x_n-u\|$. De donde $\overline{\lim}\|z_n\| \leqslant d$ y puesto que $\{\|x_n-u\|\}_n \searrow d$ y X es uniformemente convexo, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-u-z_n\| = 0.$$

Por tanto,

$$\|S^nx-S^{n+1}x\| = \|x_n-Sx_n\| = (1-\alpha)\|x_n-Tx_n\| = (1-\alpha)\|(x_n-u)-z_n\|$$

y, puesto que $\alpha < 1$, S es asintóticamente regular en x. ▲

TEOREMA 1. *Bajo las hipótesis del Lema 3, si además*

$$(I-T)\left\{\begin{matrix}\textit{cerrado}\\ \textit{acotado}\end{matrix}\right\} = \textit{cerrado} \subseteq X$$

entonces $S^n x_o \to v = Tv$ *para algún* $v \in F_T$.

Prueba. Por el Lema 3, se tiene que S es asintóticamente regular en todo punto. Sea $u = Tu$; como $a'+2b < 1$, entonces $\{\|S^n x_o - u\|\} \downarrow$. Sea $H = \{S^n x_o\}_n$; como

$$\|S^n x_o\| \leqslant \|S^n x_o - u\| + \|u\| \leqslant \|x_o - u\| + \|u\|,$$

entonces $H \subset K$, y es cerrado y acotado. De otra parte, como $S^n x_o - S^{n+1} x_o \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces por el Lema 2, $0 \in \overline{(I-S)(H)} = (I-S)H$, i.e. existe $z \in H$ tal que $z = Sz$, i.e. $z \in F_T = F_S$. Como $z \in \overline{\{S^n x_o\}}$ entonces $S^{n_j} x_o \to z$ cuando $j \to \infty$ y como para todo punto fijo u de T, $\{\|S^n x_o - u\|\} \downarrow$, entonces $S^n x_o \to z = Tz$. ▲

* *

BIBLIOGRAFIA

[1] Browder, F.E. and Petryshyn, W.V., *The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 571-575.

[2] Edelstein, M., *A remark on a theorem of M.A. Krasnoselskii*, Amer. Math. Monthly 73 (1966), 509-510.

[3] Kirk, W.A., *On succesive approximations for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Glasgow Math. J. 12 (1971), 6-9.

[4] Krasnoselskii, M.A., *Two remarks about the method of successive approximations*, Uspehi Mat. Nauk 10 (1955), Nº 1 (63), 123-127.

[5] Schaefer, H., *Über die Methode suksessiver Approximationen*, Iber. Deutsch. Math. Verein. 59 (1957), 131-140.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E., Colombia

(Recibido en junio de 1984)

* *