*Revista Colombiana de Matemáticas*
*Vol. XVIII (1984), págs. 115-136*

# TRANSFORMADAS DE POISSON DE FUNCIONES NO-ESTANDARES

por

Yu TAKEUCHI

§1. **Introducción.** Sean U el círculo abierto con centro en 0, T el perímetro de U en el plano cartesiano x,y (o en el plano complejo z = x+iy). En coordenadas polares $(r,\theta)$, U y T pueden escribirse así:

$$U = \{(r,\theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi\}, \quad T = \{(1,\theta) \mid -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi\}.$$

En la práctica, T puede ser identificado con el intervalo $[-\pi,\pi]$, si consideramos que $-\pi = \pi$. Así, por ejemplo, si f es una función en T y $\mu$ es una medida en T, entonces se escribe comúnmente

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)d\mu(t)$$

en lugar de escribir correctamente $\int_T f d\mu$.

Sea el núcleo de Poisson

$$P_r(\theta-t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\ ; \tag{1}$$

si $f \in L_1(T)$, la función $F(r,\theta)$ definida por:

$$F(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)f(t)dt \tag{2}$$

se llama *la transformada de Poisson de* f, y se denota con:

$$F = P[f]. \tag{3}$$

Si $\mu$ es una medida finita (o una carga finita) de Borel en T, se define análogamente la transformada de Poisson de $\mu$, $P[d\mu]$, como sigue:

$$P[d\mu] = F(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)d\mu(t). \tag{4}$$

Es bien sabido que $P[f]$ es una *función armónica* en U y que si, además, f es continua en T se tiene:

$$F(r,\theta) = P[f] \rightarrow f(\theta) \text{ cuando } r \rightarrow 1^-. \tag{5}$$

Aún más, se sabe que si $\mu$ es una medida finita de Borel en T entonces $P[d\mu]$ es una función armónica positiva en U; recíprocamente, si $u(r,\theta)$ es una función armónica positiva en U entonces existe una medida $\mu$ finita de Borel en T que cumple

$$u(r,\theta) = P[d\mu]. \tag{6}$$

Más generalmente, si $\mu$ es una *carga* finita de Borel en T ( esto es, si $\mu = \mu_1-\mu_2$ donde $\mu_1,\mu_2$ son medidas finitas de Borel en T), entonces $F(r,\theta) = P[d\mu]$ es armónica en U, y satisface además a la siguiente *condición de acotación*:

$$\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |F(r,\theta)|d\theta < +\infty \qquad (7)$$

Recíprocamente, toda función armónica en U que satisface la condición de acotación (7) es la transformada de Poisson de una carga finita de Borel en T. Sin embargo, no toda función armónica en U satisface la condición (7). Por ejemplo,

$$u(r,\theta) = \frac{r\text{sen}\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

es armónica en U, pero:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(r,\theta)|d\theta = 2\cdot\log\frac{1+r}{1-r} \to +\infty \quad (r \to 1^-).$$

Tales funciones armónicas no pueden entonces relacionarse con las transformadas de Poisson de algunas funciones, medidas o cargas. El uso de funciones no-estándares nos ofrece una situación más ventajosa y sencilla cuando de funciones armónicas en U se trata; en efecto, en el presente trabajo veremos que *toda* función armónica en U es la *parte estándar* de la transformada de Poisson de alguna función no-estándar, sin que necesariamente subsista la condición de acotación (7).

## §2. Transformada de Poisson de una función no-estándar.

**2.1. NOTACIONES.** A través del presente trabajo utilizaremos las siguientes notaciones.

$\mathcal{F}^*$ es un ultrafiltro regular en $\mathbb{N}$ con el que se construye el cuerpo $\mathbb{R}^*$ de números no-estándares como ultrapotencia de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^* = \Pi\mathbb{R}/F^*.$$

Se denota con $[(a_n)_n]$ al número no-estándar representado por la sucesión real $(a_n)_n$.

Si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^*$ y $\alpha-\beta$ es un número infinitesimal, escribimos $\alpha \approx \beta$.

Las letras $x,y,r,\theta,t$ siempre representarán *variables reales*, mientras que las letras $x^*,y^*,\rho,\theta^*$, $\tau$ serán *variables no-estándares* correspondientes.

Se denota con $U^*$ al círculo unitario con centro en 0 en el plano no-estándar $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$; o sea, usando las *coordenadas polares no-estándares* $(\rho,\theta^*)$, tenemos:

$$U^* = \{(\rho,\theta^*) \in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^* \mid 0 \leqslant \rho < 1,\ -\pi \leqslant \theta^* \leqslant \pi\}.$$

Se denotará con $T^*$ el perímetro de $U^*$ (la circunferencia unitaria con centro en 0 en el plano no-estándar); en la práctica, podemos identificar $T^*$ con el *intervalo no-estándar* $[-\pi,\pi] = \{\tau \in \mathbb{R}^* \mid -\pi \leqslant \tau \leqslant \pi\}$ , considerando que $-\pi = \pi$.

Se denotan con $D_R$ y $D_R^*$ al *disco real* y al *disco no-estándar* de radio R con centro en 0:

$$D_R = \{(r,\theta) \in U \mid 0 \leqslant r \leqslant R,\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi\},$$

$$D_R^* = \{(\rho,\theta^*) \in U^* \mid 0 \leqslant \rho \leqslant R,\ -\pi \leqslant \theta^* \leqslant \pi\},$$

respectivamente.

**2.2. FUNCION ARMONICA NO-ESTANDAR.** Sea $u:U^* \to \mathbb{R}^*$ la función generada por la sucesión de funciones reales $(u_n(r,\theta))_n$; esto es,

$$u(\rho,\theta^*) = [(u_n(r_n,\theta_n))_n] \quad \text{para} \quad \rho = [(r_n)],\ \theta^* = [(\theta_n)];$$

entonces se escribe: $u = \mathrm{gen}(u_n)$.

DEFINICION 1. Decimos que $u:U^* \to \mathbb{R}^*$ es *armónica* en $U^*$ si

$$\{n \in \mathbb{N} \mid u_n(r,\theta) \text{ es armónica en } U\} \in \mathcal{F}^*. \tag{1}$$

## 2.3. TRANSFORMADA NO-ESTANDAR DE POISSON.

DEFINICION 2. Sea $h(\tau) = \mathrm{gen}(h_n)$ una función no estándar de $T^*$ en $\mathbb{R}^*$ en donde $h_n(t) \in L_1(T)$ para todo $n = 1,2,\ldots$; la función no-estándar $F(\rho,\theta^*)$ definida por:

$$F(\rho,\theta^*) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P^*(\theta^*-\tau)\cdot h(\tau)d\tau, \tag{2}$$

donde $P^*(\theta^*-\tau)$ es la extensión natural del núcleo de Poisson $P_r(\theta-t)$:

$$P^*(\theta^*-\tau) = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta^*-\tau)+\rho^2}, \tag{3}$$

se llama *la transformada no-estándar* de Poisson de h, y se denota con

$$F(\rho,\theta^*) = P^*[h]. \tag{4}$$

Si $F_n(r,\theta)$ es la transformada de Poisson de la función $h_n(t)$:

$$F_n(r,\theta) = P[h_n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\cdot h_n(t)dt, \tag{5}$$

entonces es evidente que la función no-estándar $F(\rho,\theta^*)$ es la generada por la sucesión de funciones $(F_n(r,\theta))_n$; o sea,

$$P^*[h] = F(\rho,\theta^*) = \mathrm{gen}(F_n). \tag{6}$$

Como $F_n(r,\theta) = P[h_n]$ es *armónica real* en U *para todo* n, entonces $P^*[h] = F(\rho,\theta^*)$ es *armónica* en $U^*$, según la Definición 1.

Supongamos ahora que la función no-estándar $h(\tau)$ sea *continua* en $T^*$; es decir, que $h(\tau+\varepsilon) \approx h(\tau)$ para todo $\varepsilon \approx 0$, para todo $\tau \in T^*$; entonces (ver [2]), dado a (real) > 0, existe b (real) > 0 tal que

$$|h(\tau)-h(\sigma)| < a \quad \text{si} \quad |\tau-\sigma| < b. \tag{7}$$

Utilizando un método similar al usado en el caso de la transformada de Poisson de una *función real*, se puede demostrar sin dificultad que existe c (real) > 0 tal que

$$|F(\rho,\theta^*)-h(\theta^*)| < 2a \quad \text{si} \quad |\rho-1| < c;$$

o sea

$$P^*[h] = F(\rho,\theta^*) \approx h(\theta^*) \quad \text{si} \quad \rho \approx 1. \tag{8}$$

Podemos interpretar (8) como la *continuidad* de la transformada $P^*[h] = F(\rho,\theta^*)$ en $T^*$ en caso de que $h(\tau)$ sea *continua* (en el sentido de las *funciones no-estándares*) en $T^*$. A título de ejemplo veamos cuál es la transformada de Poisson no-estándar de la siguiente función no-estándar:

$$h(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{en} \quad (0,\varepsilon) \\ 0 & \text{en otra parte,} \end{cases}$$

donde $\varepsilon$ es un número infinitesimal positivo. Aplicando (2) obtenemos:

$$P^*[h] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta^*-\tau)+\rho^2}\,d\tau.$$

Si $\tau \approx 0$ entonces $\cos(\theta^*-\tau) \approx \cos\theta^*$; luego se tiene

$$P^*[h] \approx \frac{1}{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta^*+\rho^2} \quad \text{para } \rho \not\approx 1.$$

## §3. Parte estándar de la transformada de Poisson.

TEOREMA 1. *Sea* $h(\tau) = \mathrm{gen}(h_n)$ *una función no-estándar de* $T^*$ *en* $\mathbb{R}^*$. *Si la transformada no-estándar de Poisson de* $h(\tau)$, $P^*[h] = F(\rho,\theta^*)$, *es de valor finito para todo* $(\rho,\theta^*) \in U^*$ *con* $\rho \not\approx 1$, *entonces* $F(\rho,\theta^*)$ *es continua para* $\rho \approx 1$, *y la función real* $u(r,\theta) = \mathrm{Est}\, F(r,\theta)$ *es armónica en* $U$, *donde* $u(r,\theta)$ *es la parte estándar de la restricción del círculo real* $U$ *de la función no-estándar* $F(\rho,\theta^*)$: $u(r,\theta) = \mathrm{Est}(F|_U) = (\mathrm{Est}\, F)|_U$.

Daremos la demostración del Teorema 1 en cuatro partes:

**(i)** *Dado* $S$ *real,* $S < 1$, *la función no-estándar* $F(\rho,\theta^*)$ *es finitamente acotada en el disco no-estándar* $D_S^*$.

*Demostracion de (i).* (Ver [4]). Sabemos que $F(\rho,\theta^*) = \mathrm{gen}(F_n)$ donde $F_n(r,\theta) = P[h_n]$. Supongamos que

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \sup_{D_S} |F_n(r,\theta)| = +\infty\} \in \mathcal{F}^* \qquad (9)$$

donde $D_S$ es el *disco real* de radio $S$ con centro en 0. Entonces, para cada $n \in A$ existe $(r_n,\theta_n) \in D_S$ tal que $|F_n(r_n,\theta_n)| > n$; esto es

$$[(|F_n(r_n,\theta_n)|)_n] > [(n)_n]. \qquad (10)$$

Si escribimos $\rho_o = [(r_n)_n]$, $\theta_o^* = [(\theta_n)]$, $\lambda = [(n)_n]$ entonces (10) puede expresarse como:

$$|F(\rho_o,\theta_o^*)| > \lambda.$$

Pero esto *contradice* el hecho que $F(\rho,\theta^*)$ es de valor finito para todo $\rho \neq 1$, puesto que $\lambda$ es un número infinito. Por tanto, se tiene que $A \notin \mathcal{F}^*$ y, por consiguiente, $\mathbb{N}-A = \{n \in \mathbb{N} \mid \sup_{D_S} |F_n(r,\theta)| \neq \infty\} \in \mathcal{F}^*$. Definimos

$$M_n = \begin{cases} \operatorname{Sup}_{D_S} |F_n(r,\theta)| & \text{si } n \in \mathbb{N}-A \\ 1 & \text{si } n \in A. \end{cases}$$

Existe entonces por la definición de extremo superior, $(r_n,\theta_n) \in D_S$ tal que $|F_n(r_n,\theta_n)| > M_n-1$. Si escribimos $\rho_o = [(r_n)]$, $\theta_o^* = [(\theta_n)]$, $M = [(M_n)]$, entonces $|F(\rho_o,\theta_o^*)| > M-1$, lo que implica que $M \in \mathbb{R}^*$ es un *número finito*. Es evidente que $M$ es una cota finita de la función no-estándar $F(\rho,\theta^*)$ en $D_S^*$. Esto concluye la demostración de (i). ▲

Nótese que podemos considerar a $M$ como una *cota uniforme* de la sucesión de funciones reales $(F_n(r,\theta))_n$ en el disco real $D_S$.

(ii) *Dado* $R < 1$, *la sucesión de funciones reales* $(F_n(r,\theta))_n$ *es uniformemente equicontinua en el disco real* $D_R$.

Para demostrar esto, recordemos el siguiente lema, cuya demostración se encuentra en [1].

LEMA 1. *Una función real* $v(r,\theta)$ *es armónica en* U *si y sólo si se tiene la siguiente igualdad válida para todo* $0 \leq r < R < 1$:

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}\, v(R,t)\,dt. \qquad (11)$$

Para demostrar la equicontinuidad de la sucesión de funciones $(F_n(r,\theta))_n$ escogemos $S$ tal que $R < S < 1$; como $F_n(r,\theta)$ es armónica en U entonces por el Lema 1, tenemos:

$$F_n(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{S^2-r^2}{S^2-2Sr\cos(\theta-t)+r^2}\, F_n(S,t)\,dt. \quad (n=1,2,\ldots) \quad (12)$$

La función $\dfrac{S^2-r^2}{S^2-2Sr\cos\theta+r^2}$ es *uniformemente continua* en el disco $D_R$; en efecto, dado $\varepsilon$ (real) > 0 existe $\delta$ (real) > 0 tal que

$$\left|\frac{S^2-r^2}{S^2-2Sr\cos\theta+r^2} - \frac{S^2-(r')^2}{S^2-2Sr'\cos\theta'+(r')^2}\right| < \varepsilon \qquad (13)$$

si $|(r,\theta)-(r',\theta')| < \delta$ , $(r,\theta)$, $(r',\theta') \in D_R$. De (12), (13), para $|(r,\theta)-(r',\theta')| < \delta$ tenemos la siguiente desigualdad:

$$|F_n(r,\theta)-F_n(r',\theta')|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left\{\frac{S^2-r^2}{S^2-2Sr\cos(\theta-t)+r^2} - \frac{S^2-(r')^2}{S^2-2Sr'\cos(\theta'-t)+(r')^2}\right\}\right.$$

$$\left.\times\ F_n(S,t)\right|dt$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi}|F_n(S,t)\ dt \leqslant \varepsilon\cdot M, \qquad (14)$$

donde M es una *cota uniforme* de sucesiones $(F_n(r,\theta))_n$ en $D_S$. Como $\delta$ es independiente de n, la desigualdad (14) nos dice que la sucesión de funciones $(F_n(r,\theta))_n$ es equicontinua en $D_R$. ▲

(**iii**) LEMA 2. *Sea* $(g_n(t))_n$ *una sucesión de funciones reales, equicontinua en un intervalo* $[a,b]$. *Si* $g(\tau) = \text{gen}(g_n)$ *entonces tenemos:*

$$\text{Est}\int_a^b g(\tau)d\tau = \int_a^b \text{Est}\ g(t)dt. \qquad (15)$$

*Demostración.* Como $(g_n(t))_n$ es una sucesión equicontinua de funciones reales en $[a,b]$, entonces la función no-estándar generada $g(\tau) = \text{gen}(g_n)$ es *continua* y *de valor finito* en el intervalo no-estándar $[a,b]$ (ver §3, Cap.III, [2]). Por tanto, la función real $\tilde{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $\tilde{g}(t) = \text{Est } g(t)$ ($t$ real, $t\in[a,b]$) es continua en $[a,b]$. Si $f(\tau)$ es la *extensión natural* de $\tilde{g}(t)$ entonces tenemos que $f(\tau)\approx g(\tau)$ para todo $\tau\in\mathbb{R}^*$, $\tau\in[a,b]$. Por tanto, se tiene que

$$\int_a^b g(\tau)d\tau \approx \int_a^b f(\tau)d\tau = \int_a^b \tilde{g}(t)dt = \int_a^b \text{Est } g(t)dt,$$

esto es

$$\text{Est}\int_a^b g(\tau)d\tau = \int_a^b \text{Est } g(t)dt. \ \blacktriangle$$

(**iv**) Finalmente, a continuación daremos la demostración del Teorema 1. Dado $(r,\theta)$ con $r<1$, escogemos $R$ tal que $r<R<1$. Del Lema 1 tenemos:

$$F_n(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}F_n(R,t)dt. \quad (n=1,2,3,..). \quad (16)$$

Como la función $(R^2-r^2)/\{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2\}$ es continua en $t\in T$ y la sucesión de funciones $(F_n(r,t))_n$ es equicontinua en $T$, entonces la función integrando en el segundo miembro de (16) forma una sucesión equicontinua en $T$. Aplicando el Lema 2 a esta sucesión equicontinua y usando (16) tenemos:

$$\text{Est } F(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{Est }\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}F(R,t)dt. \quad (17)$$

Es decir,

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}u(R,t)dt.$$

Finalmente, por el Lema 1, se tiene que la función real $u(r,\theta)$ es armónica en $U$. $\blacktriangle$

**COROLARIO 1.** *Si una antiderivada de la función no-están-*

*dar* $h(\tau)$ *es de valor finito en* $[-\pi,\pi]$, *entonces* $P^*[h] = F(\rho,\theta^*)$ *es de valor finito para todo* $(\rho,\theta^*) \approx U^*$ *con* $\rho \not\approx 1$, *y la función* $u(r,\theta) = \text{Est } F(r,\theta)$ *es armónica en* U.

*Demostración.* Supongamos que $H(\tau) = D^{-1}h(\tau)$ es de valor finito en $[-\pi,\pi]$. Aplicando la integración por partes a la integral de Poisson, tenemos:

$$F(\rho,\theta^*) = P^*[h] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho^*(\theta^*-\tau)H'(\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} H(\tau)\, P_\rho^*(\theta^*-\tau)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P^{*\prime}(\theta^*-\tau)H(\tau)d\tau, \qquad (18)$$

donde $P_\rho^{*\prime}(\tau)$ es la derivada de $P_\rho^*(\tau)$ (que es la extensión natural de $P_r'(t)$). Como $P_\rho^{*\prime}(\tau)$ es de valor finito para todo $\tau$ cuando $\rho \not\approx 1$, de (18) se deduce que $F(\rho,\theta^*)$ es de valor finito para $\rho \not\approx 1$. ▲

Observemos que la función $H(\tau) = D^{-1}h(\tau)$ no siempre es $2\pi$-periódica (o sea, no siempre está definida en $T^*$). En el caso en que $D^{-m}h(\tau)$ $(m > 1)$ sea $2\pi$-*periódica* en $\mathbb{R}^*$, y además *de valor finito* para todo $\tau$, entonces, aplicando m veces la integración por partes a la integral de Poisson, es posible demostrar que $F(\rho,\theta^*)$ es de valor finito para $\rho \not\approx 1$.

COROLARIO 2. *Si una anti-derivada de la función no-estándar* $h(\tau)$ *es de valor infinitesimal para todo* $\tau \in [-\pi,\pi]$ *entonces*

$$u(r,\theta) = \text{Est } F(r,\theta) = 0. \qquad (19)$$

*Demostración.* Supongamos que $D^{-1}h(\tau) \approx 0$ para todo $\tau \in [-\pi,\pi]$. De (18) se obtiene inmediatamente que $F(\rho,\theta^*) \approx 0$ para $\rho \not\approx 1$; por tanto: $u(r,\theta) = \text{Est } F(r,\theta) = 0$, tal como queríamos demostrar. ▲

Consideremos ahora, a título de ejemplo, la siguiente función:

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2}(\tau+\varepsilon) & \text{en } [-\varepsilon,0] \\ -\frac{1}{\varepsilon^2}(\tau-\varepsilon) & \text{en } [0,\varepsilon] \\ 0 & \text{en otra parte,} \end{cases}$$

donde $\varepsilon$ es un infinitesimal positivo. Se observa que $D^{-1}\delta$ es de *valor finito*. Como $\delta(\tau)$ es un *modelo no-estándar* de la *distribución delta de Dirac*, tenemos

$$\text{Est } P^*[\delta]|_U = \text{Est } F(r,\theta) = \text{Est } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r^*(\theta-\tau)\delta(\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} <\delta_t, P_r(\theta-t)> = \frac{1}{2\pi} P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

la cual es una función real armónica en U. Como

$$\delta'(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2} & \text{en } (-\varepsilon,0) \\ -\frac{1}{\varepsilon^2} & \text{en } (0,\varepsilon) \\ 0 & \text{en otra parte.} \end{cases}$$

vemos que la antiderivada de segundo orden es de valor finito, luego la función

$$\text{Est } P^*[\delta']|_U = \text{Est } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r^*(\theta-\tau)\delta'(\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}<\delta'_t, P_r(\theta-t)> = \frac{1}{2\pi}P'_r(\theta)$$

es armónica en U. En la misma forma, se ve que las $P_r^{(m)}(\theta)$ ($m = 1,2,3,\ldots$) son armónicas en U.

Otro ejemplo sería la función $h(\tau) = \operatorname{sen}\lambda\tau$ donde $\lambda$ es un número infinito positivo. Como $D^{-1}h(\tau) = -\frac{\cos\lambda\tau}{\lambda} \approx 0$ para todo $\tau \in T^*$, se tiene que

$$P^*[\operatorname{sen}\lambda\tau] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)\operatorname{sen}\lambda\tau}{1-2\rho\cos(\theta^*-\tau)+\rho^2}d\tau \approx 0$$

para $\rho \neq 1$.

§4. Representación de una función armónica real mediante la transformada de Poisson. Nuestro propósito es demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 2. *Si* $u(r,\theta)$ *es una función real, armónica en* $U$, *entonces existe por lo menos una función no-estándar* $h(\tau)$ *en* $T^*$ *que cumple*

$$u(r,\theta) = \mathrm{Est}\ P^*|h|\restriction_U. \tag{20}$$

El siguiente lema será necesario para demostrar el anterior teorema:

LEMA 3. *Si* $u(r,\theta)$ *es real y armónica en* $U$ *entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\, u(R,t)dt \to u(r,\theta). \tag{21}$$

*cuando* $R \to 1^-$.

*Demostración.* Como $u(r,\theta)$ es armónica en $U$ entonces existe una función $f(z)$ de variable compleja, analítica en $U$, tal que (ver [1]):

$$u(r,\theta) = \mathrm{Real}\ f(z) \text{ donde } z = re^{i\theta}. \tag{22}$$

Sea

$$f(z) = \sum_{k=o}^{\infty} C_k z^k \tag{23}$$

el desarrollo de $f(z)$ en serie de potencias de $z$, de modo que la serie (23) converge *uniformemente en compactos* en $U$, dada la analiticidad de $f(z)$ en $U$. Por otra parte, sabemos que

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = 2\ \{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\theta\}\ (0 \leqslant r < 1).$$

Por tanto, tenemos, para $0 \leqslant r \leqslant R < 1$, la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{2\pi}P_r(\theta-t)u(R,t) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos k(\theta-t)\right\}\times\text{Real}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} C_k R^k e^{ikt}\right\}. \quad (24)$$

Nótese que la serie en (24) converge absoluta y uniformemente (para t). Integrando (24) con respecto a t en $[-\pi,\pi]$, tenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)u(R,t)dt = \text{Real}\left\{\sum_{k=o}^{\infty} C_k r^k R^k e^{ik}\right\}, \quad (25)$$

puesto que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos k(\theta-t)\,\text{Real}\{C_m e^{imt}\}dt =$$

$$= \begin{cases} \pi\text{Real}\{C_k e^{ik\theta}\} & \text{si } k = m \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = m. \end{cases}$$

Para $r < 1$ dado, la serie en (25) converge uniformemente en $R \in [0,1]$; luego

$$\lim_{R\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)u(R,t)dt = \text{Real}\left\{\sum_{k=o}^{\infty} C_k r^k e^{ik\theta}\right\}$$

$$= \text{Real } f(z) = u(r,\theta),$$

lo cual demuestra el lema. ▲

*Demostración del Teorema 2.* Sea $(R_n)_n$ una sucesión que tiende a 1, con $R_n < 1$ para todo n. Sea $h(\tau) = \text{gen}(h_n)$ con

$$h_n(t) = u(R_n,t) \qquad (n = 1,2,3,\ldots); \quad (26)$$

entonces, por el Lema 3, tenemos:

$$P[h_n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - r)h_n(t)dt \to u(r,\theta),$$

cuando $n \to \infty$; o sea:

$$P^*[h]_{|U} \approx u(r,\theta) \quad \text{para} \quad (r,\theta) \in U,$$

lo cual prueba el Teorema 2. ▲

Nótese que la función $h(\tau)$ dada por (26) es de clase $C^\infty$ (esto quiere decir que $h_n(t) \in C^\infty$ para todo n), ya que cualquier función armónica en U es de clase $C^\infty$.

Evidentemente, la función $h(\tau)$ que satisface la ecuación (20) no es única.

COROLARIO 1. *Sea* $u(r,\theta)$ *una función real, armónica en* U, *que satisface la siguiente condición de acotación*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(r,\theta)|d\theta \neq \infty. \tag{27}$$

*Entonces existe una función no-estándar* $h(\tau)$ *en* $T^*$ *que satisface la ecuación* (20) *y cumple además que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(\tau)|d\tau \tag{28}$$

*es de valor finito.*

*Demostración.* Evidentemente, la función no-estándar dada por (26) satisface la condición (28). ▲

COROLARIO 2. *Sea* $u(r,\theta)$ *una función real, armónica y positiva en* U. *Entonces existe una medida finita de Borel en* T, μ, *tal que*

$$u(r,\theta) = P[d\mu]. \tag{29}$$

*Demostración.* De (26) se tiene que $h_n(t) = r(R_n,t) \geq 0$ para todo $t \in T$, para todo n. Esto es, $h(\tau) \geq 0$ para todo $\tau \in T^*$.

Como una función armónica y positiva siempre satisface la condición de acotación (27), entonces $\int_{-\pi}^{\pi} h(\tau)d\tau$ es de *valor finito.* Por tanto, existe una medida finita $\mu$ de Borel en T tal que (ver [3]), para cualquier *función continua* $f(t)$ en T, se cumple:

$$\mathrm{Est}\int_{-\pi}^{\pi} f^{*}(\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)d\mu(t),$$

donde $f^{*}(\tau)$ es la extensión natural de la función real $f(t)$. Como $P_r(\theta-t)$ es continua en T, se tiene que

$$\mathrm{Est}\ P^{*}[h]_{|U} = \mathrm{Est}\int_{-\pi}^{\pi} P_r^{*}(\theta-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)d\mu(t) = P[d\mu],$$

tal como queríamos demostrar. ▲

COROLARIO 3. *Sea* $u(r,\theta)$ *una función real, armónica y acotada en* U. *Entonces existe una función real y acotada* $f(t)$ , $t \in T$ *tal que*

$$u(r,\theta) = P[f]. \tag{30}$$

*Demostración.* Si M es una cota de la función $u(r,\theta)$ en U, entonces la función $h(\tau)$ dada por (26) también satisface la misma acotación: $|h(\tau)| \leqslant M$ para todo $\tau \in [-\pi,\pi]$. Sea $g(\tau) = D^{-1}h = \int_{0}^{\tau} h(\sigma)d\sigma$, $\tau \in [-\pi,\pi]$. Entonces $g(\tau)$ es *continua* en $[-\pi,\pi]$ . En efecto, si $\varepsilon \approx 0$ entonces:

$$|g(\tau+\varepsilon)-g(\tau)| = \left|\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} h(\sigma)d\sigma\right| \leqslant \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} Md\sigma = M\cdot\varepsilon \approx 0,$$

o sea

$$g(\tau+\varepsilon) \approx g(\tau) \quad \text{si} \quad \varepsilon \approx 0.$$

Si definimos $g_o(t) = \text{Est } g(t)$, entonces la función real $g_o(t)$ es *continua* y *de variación acotada* (aún más, $g_o(t)$ es absolutamente continua; ver [5]), ya que $g_o(t)$ satisface la condición de Lipshitz:

$$|g_o(b)-g_o(a)| = |\text{Est}(g(b)-g(a)| \leqslant \int_a^b |h(\sigma)|d\sigma = (b-a)M.$$

Por consiguiente, $g_o(t)$ es *derivable en casi toda parte*, y la *derivada es acotada* en $[-\pi,\pi]$. Si definimos la función real $f:[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ como la derivada de $g_o: f(t) = g_o'(t)$, entonces

$$(D^{-1}f)(t) = g_o(t). \tag{31}$$

Si denotamos con $f^*(\tau)$, $g_o^*(\tau)$ a las *extensiones naturales* de las funciones reales $f(t)$, $g_o(t)$, respectivamente, entonces (31) implica:

$$(D^{-1}f^*)(\tau) = g_o^*(\tau).$$

Por la *continuidad* de $g(\tau)$, se tiene que $g(\tau) \approx g_o^*(\tau)$ para todo $\tau$, o sea: $D^{-1}(h-f^*)(\tau) = (D^{-1}h)(\tau)-(D^{-1}f^*)(\tau) = g(\tau) - g_o^*(\tau) \approx 0$, para todo $\tau$. Por el Corolario 2 del Teorema 1 se tiene que $P^*[h]-P^*[f^*] = P^*[h-f^*] \approx 0$; o sea, $u(r,\theta) = \text{Est } P^*[h]_{|U} = \text{Est } P^*[f^*]_{|U} = P[f]$, tal como queríamos demostrar. ▲

Por ejemplo, si

$$u(r,\theta) = \frac{r \operatorname{sen}\theta}{1-2r\cos\theta+r^2},$$

la cual es armónica en U, y tomamos

$$R_n = 1 - \frac{\sqrt{1+4n}-1}{2n} \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

obtenemos:

$$h_n(t) = u(R_n,t) = \frac{\operatorname{sen} t}{2(1-\cos t)+(\frac{1}{n})} \qquad (n = 1,2,3,\ldots);$$

por consiguiente,

$$h(\tau) = \frac{\operatorname{sen}\tau}{2(1-\cos\tau)+\varepsilon} \quad \text{con} \quad \varepsilon = [(\tfrac{1}{n})].$$

De modo que

$$\frac{r\operatorname{sen}\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = \operatorname{Est}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\tau)+r^2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\tau}{2(1-\cos\tau)+\varepsilon}\,d\tau.$$

Nótese que $\int_{-\pi}^{\pi}|h(\tau)|d\tau = \log(1+\frac{4}{\varepsilon})$ es un número no-estándar de *valor infinito*.

Si ahora, como otro ejemplo, hacemos

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\log k}\, r^k \cos\theta$$

vemos que es armónica en U, puesto que

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^{\log k}} = 1.$$

Además tenemos que $h(\tau) = \operatorname{gen}(h_n)$ donde:

$$h_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\log k}(R_n)^k \cos kt \qquad (R_n \to 1).$$

Nótese que en este caso ninguna antiderivada (de ningún orden) de la función no-estándar $h(\tau)$ es de valor finito en $T^*$.

## §5. Representacion de una función armónica no-estándar mediante la transformada de Poisson.

Nuestro resultado es el siguiente:

**TEOREMA 3.** *Sea* $u(\rho,\theta^*)$ *una función no-estándar, armónica en* $U^*$. *Entonces existe* $h(\tau):T^* \to \mathbb{R}^*$ *tal que*

$$u(\rho,\theta^*) \approx P^*[h] = F(\rho,\theta^*) \qquad (32)$$

*para todo* $(\rho,\theta^*) \in U^*$, *con* $\rho \neq 1$.

Para demostrar el anterior teorema necesitamos el siguiente lema:

**LEMA 4.** *Sea* $\{f_n(r)\}_n$ *una familia de funciones reales, positivas y crecientes en* $[0,1)$. *Entonces existen una función real* $g(r)$, *positiva y creciente en* $[0,1)$ *y una sucesión* $(M_n)$ *tales que*

$$f_n(r) < M_n + g(r) \quad \textit{para todo} \quad r \in [0,1), \quad \textit{para todo}\ n \in \mathbb{N}. \qquad (33)$$

*Demostración.* Sean $a_1 = f_1(\frac{1}{2})$, $a_2 = \text{Máximo}\{f_1(\frac{2}{3}), f_2(\frac{2}{3})\}$, y, en general, $a_k = \text{Máximo}\{f_1(\frac{k}{k+1}), f_2(\frac{k}{k+1}), \ldots, f_k(\frac{k}{k+1})\}$. Definimos $g(r)$ como sigue:

$$g(r) = \begin{cases} a_1 & \text{en } [0,\frac{1}{2}) \\ a_2 & \text{en } [\frac{1}{2},\frac{2}{3}) \\ .. & ........ \\ a_k & \text{en } [\frac{k-1}{k}, \frac{k}{k+1}) \\ .. & ........ \end{cases}$$

Evidentemente $g(r)$ es creciente y definida en $[0,1)$. Para cada $n$ tenemos que $f_n(r) \leqslant g(r)$ si $r \in [(n-1)/n, 1)$. Si escogemos $M_n = f_n((n-1)/n)$, entonces se obtiene la desigualdad $f_n(r) \leqslant M_n + g(r)$ para todo $r \in [0,1)$, como queríamos demostrar. ▲

*Demostración del Teorema 3.* Supongamos que la función no-estándar $u(\rho,\theta^*)$ sea la generada por la sucesión de funciones reales $(u_n(r,\theta))_n$, donde, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u_n(r,\theta)$ es armónica en U, para toda n. Sean

$$u_n(r,\theta) = \text{Real } f_n(z) = \text{Real} \sum_{k=o}^{\infty} C_k^{(n)} r^k e^{ik\theta} \qquad (34)$$

$$(n = 1,2,3,\ldots).$$

Por (25) tenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)u_n(R,t)dt = \text{Real} \sum_{k=o}^{\infty} C_k^{(n)} r^k R^k e^{ik\theta} \qquad (35)$$

$$(n = 1,2,3,\ldots.).$$

De (34) y (35), resulta que

$$\left|u_n(r,\theta)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)u_n(R,t)dt\right| = \left|\text{Real}\left\{ \sum_{k=o}^{\infty} C_k^{(n)} r^k e^{ik\theta}(1-R^k)\right\}\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=o}^{\infty} |C_k^{(n)}| r^k (1-R)(1+R+\ldots+R^{k-1}) \leqslant (1-R)\sum_{k=o}^{\infty} k|C_k^{(n)}|r^k. \qquad (36)$$

Para cada n, $\sum_{k=o}^{\infty} k|C_k^{(n)}|r^k$ es una función de valor real positivo, creciente en $[0,1)$; luego, aplicando el Lema 4, existen g(r) y $(M_n)_n$ tales que

$$\sum_{k=o}^{\infty} k|C_k^{(n)}|r^k < M_n+g(r), \qquad (37)$$

para todo $r \in [0,1]$, para todo n = 1,2,3,.... Si escogemos $R_n$ como:

$$R_n = 1-\frac{1}{n(1+M_n)} \qquad (n = 1,2,3,\ldots), \qquad (38)$$

entonces de (36) y (37) obtenemos:

$$\left|u_n(r,\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)u_n(R_n,t)dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n(1+M_n)}(M_n+g(r)) \leqslant \frac{1}{n}(1+g(r)). \tag{39}$$

Haciendo

$$h(\tau) = \text{gen}(h_n),\ h_n(t) = u_n(R_n,t) \quad (n=1,2,3,\dots), \tag{40}$$

obtenemos

$$|u_n(r,\theta)-P[h_n]| \leqslant \frac{1}{n}(1+g(r)) \quad \text{para todo n.} \tag{41}$$

Sabemos también que si $\rho = [(r_n)] \not\approx 1$, existe entonces un real $a, 0 \leqslant a < 1$ tal que $\rho \leqslant a$. Sin pérdida de generalidad, podemos pues suponer que $r_n < a$ para todo n; por tanto, la desigualdad (41) puede expresarse como

$$|u(\rho,\theta^*) - P^*[h]| \leqslant \varepsilon(1+g(a)),$$

donde $\varepsilon = [(\frac{1}{n})]$ es un unfinitesimal positivo. Por consiguiente se tiene $u(\rho,\theta^*) \approx P^*[h]$ para $\rho \not\approx 1$. ▲

* *

## REFERENCIAS

[1] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, Mc Graw Hill, New York, 1966.

[2] Takeuchi, Y., *Teoría de Funciones No-estándar*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1983.

[3] Blanco, L., "Versión no-estándar del teorema de Riesz y de la medida sobre ℝ", Tesis de grado, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1984.

[4] Mantilla, I., "Integrabilidad según Riemann de Funciones no-estándar", Tesis de Grado, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1984.

[5] Riesz, F. and Nagy, B.S., *Functional Analysis*, Frederick Ungar Pub. Co. New York, 1965.

*

*Departamento de Matemáticas y Estadística*
*Universidad Nacional de Colombia.*
*Bogotá, D.E., Colombia (S.A.)*

(Recibido en enero de 1984).