Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XVIII (1984), págs. 145-149

CORRIGENDUM ET ADDENDUM A L'ARTICLE "UNITE ET SEMI-NORMES DANS LES ALGEBRES LOCALEMENT CONVEXES"

par

M. OUDADESS

1. Introduction. Dans l'article "Unité et Semi-Normes dans les Algèbres Localement Convexes" (Revista Colombiana de Matemáticas, Vol. XVI (1982), 141-150) la preuve du théorème 2, p.145, est incorrecte et donc le corollaire de ce théorème est inexact. Ainsi le problème de Żelasko, posé dans [4] et traité dans [3], reste ouvert dans le cas général. Sont également inexacts:

- La dernière phrase dans l'exemple 1 (p.146).
- Le contenu des lignes 4 à 7 du "3. B_o-algèbres" (p.147)
- Le contenu des lignes 8 à 11 (p.149).

Nous montrons ici que la réponse au problème de Żelazko est positive dans le cas des B_o-algèbres unitaires admettant un caractère continu non nul et étendons ce résultat aux algèbres localement convexes modulo une condition supplémentaire sur la famille des semi-normes définissant la topologie.

En utilisant notre théorème 1 de [3] et un résultat d'Akkar nous montrons que les fonctions entières opèrent dans les a.l.A-convexes complètes.

La terminologie est celle de [3].

Je remercie Messieurs les Professeurs M. Akkar, J. Esterle et J.L. Nieto pour leurs conseils et suggestions.

II. Sur le problème de Żelazko.

Dans la démonstration du théorème 2 de [3], je pose:

$$q_{\lambda,\lambda'}(x) = \operatorname{Sup}\{p_\lambda(xy) : p_{\lambda'}(y) \leqslant 1\}$$

et affirme, sans preuve, que c'est une norme d'algèbre. On ne peut pas voir directement que ce n'en est pas une. L'algèbre L^ω d'Arens [2] permet de voir que ce n'est pas toujours le cas. En effet $L^\omega = \bigcap_{p>1} L^p[0,1]$ est une a.l.c. métrisable el complète sans caractère continu non nul, donc sans topologie séparée d'a.l.m.c, où les semi-normes

$$p_n(f) = \left[\int_0^1 |f(t)|^n dt\right]^{1/n}$$

vérifient $p_n(1) = 1$, pour tout n.

Dans ce qui suit on obtient que la réponse au problème de Żelazko est positive dans le cas des B_o-algèbres admettant un caractère continu non nul.

THÉORÈME 1. *Soit* (E,τ) *une* B_o*-algèbre commutative unitaire admettant un caractère continu non nul. Alors sa topologie* τ *peut être définie par une famille de semi-normes* $(p_n)_n$ *telle que* $p_n(e) = 1$ *pour tout* n.

Preuve. Soit χ un caractère continu de E et M son noyau. Alors $E = M \oplus \mathbb{C}e$. Donc un x dans E s'écrit $x = u+\lambda e$, où simplement $x = u+\lambda$, où $\lambda = \chi(x)$. Si $(q_n)_n$ est une famille de semi-normes définissant τ, posons

$$p_n(x) = q_n(u) + |\lambda| = q_n(u) + |\chi(x)|, \text{ pour tout } n.$$

Il est clair que $p_n(e) = 1$, pour tout n. Vérifions que:

(a) $(p_n)_n$ définit τ.

(b) $p_n(xy) \leqslant p_{n+1}(x)p_{n+1}(y)$, pour tout n et tous x, y.

Preuve de (a): on a

$$q_n(x) = q_n(u+\lambda) \leqslant q_n(u)+|\lambda|q_n(e) \leqslant \mathrm{Max}(1,q_n(e))p_n(x).$$

D'au autre coté, χ étant continu, il existe m et k_m tels que $|\lambda| = |\chi(x)| \leqslant k_m q_m(x)$ pout tout x. Alors, en supposant $n \geqslant m$ (on peut considérer Max(n,m)).

$$\begin{aligned} p_n(x) = q_n(u)+|\lambda| &= q_n(x-\lambda)+|\lambda| \\ &\leqslant q_n(x)+|\lambda|q_n(e)+|\lambda| \\ &\leqslant q_n(x)+k_m q_m(x)q_n(e)+k_m q_m(x) \\ &\leqslant [1+k_m q_n(e)+k_m]q_n(x). \end{aligned}$$

Preuve de (b):

$$\begin{aligned} p_n(xy) = p_n[(u+\lambda)(v+\mu)] &= q_n(uv+\lambda v+\mu u)+|\lambda||\mu| \\ &\leqslant q_{n+1}(u)q_{n+1}(v)+|\lambda|q_{n+1}(v) \\ &\qquad +|\mu|q_{n+1}(u)+|\lambda||\mu| \\ &\leqslant [q_{n+1}(u)+|\lambda|][q_{n+1}(v)+|\mu|] \\ &= p_{n+1}(x)p_{n+1}(y). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

En général, dans le cas d'une a.l.c, à produit continu, la démonstration précédente peut être reprise si on suppose que la famille $(q_\lambda)_\lambda$ de semi-normes définissant la topologie est *filtrante croissante,* i.e. pour tous λ, μ de Λ il existe ν de Λ tel que $q_\lambda(x) \leqslant q_\nu(x)$ et $q_\mu(x) \leqslant q_\nu(x)$, pout tout x. On a alors le

THÉORÈME 2. *Soit* (E,τ) *une a.l.c., à produit continu, commutative unitaire admettant un caractère continu (non nul) et telle que la famille* $(q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *de semi-normes définissant* τ *est fitrante croissante. Alors, sa topologie peut être définie par une* $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *de semi-normes telle que* $q_\lambda(e) = 1$, *pour tout* λ.

REMARQUE. L'existence d'un caractère continu non nul ne peut pas servir à caractériser les a.l.c. pour lesquelles la réponse au problème de Żelazko est positive, comme l'indique l'algèbre d'Arens.

III. Fonctions entières dans les a.l.A.-Convexes.

On dit qu'une fonction entière $\Sigma a_n Z^n$ opere dans une a.l.c. (E,τ) si, pour tout $x \in E$, la serie $\Sigma a_n x^n$ converge dans (E,τ).

THÉORÈME. *Soit* (E,τ) *une a.l.A.-convexe commutative unitaire complète. Alors les fonctions entières opèrent dans* (E,τ).

Preuve. Soit $M(\tau)$ la topologie d'a.l.m.c. plus fine que τ du théorème 1 de [3]; $(E,M(\tau))$ étant une a.l.m.c. séparée est limite inductive bornologique (et réunion filtrante) d'a.l.m.c. métrisables (E_i,τ_i) avec injections continues dans $(E,M(\tau))$, cf. [1], Théoreme II.2.4.

L'injection continue $j_i:(E_i,\tau_i) \to (E,\tau)$ se prolonge en un morphisme continu d'algèbre $\hat{j}_i:\widehat{(E_i,\tau_i)} \to (E,\tau)$, où $\widehat{(E_i,\tau_i)}$ est la complétée de (E_i,τ_i).

Soit maintenant $x \in E$. Il existe i tel que $x \in E_i$. Soit $f(Z) = \Sigma a_n Z^n$ une fonction entière. On a $f(x) = \Sigma a_n x^n$ qui est un élément de (E_i,τ_i) ([2], Théorème 3). Alors $\hat{j}(f(x))$ est un élement de (E,τ). Mais $\hat{j}(f(x)) = \Sigma a_n[\hat{j}_i(x)]^n$ et $x \in E_i$, donc $\hat{j}_i(x) = j_i(x) = x$. Donc $\Sigma a_n x^n \in E$. ▲

* *

REFERENCES

[1] Akkar, M., "Étude Spéctrale et Structures d'Algèbres Topologiques et Bornologiques Complètes", Thèse Sc. Math. Univ. Bordeaux I. (1976).

[2] Arens, R., *The space L^ω and convex topological rings*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 931-935.

[3] Oudadess, M., *Unité et Semi-Normes dans les Algèbres Localement Convexes*, Revista Colombiana de Matemáticas, Vol. XVI (1982), 141-150.

[4] Żelazko, W., *Selected topics in topological algebras*, Lecture Notes Series Nº 31 (1971), Aarhus Universität.

*

Ecole Normale Superieure Takaddoum
3.P. 5118.
Rabat, MAROC.

(Recibido en Abril de 1984).