INTRODUCCION A LA TEORIA DE LOS GRUPOS II.

Por Pablo Casas.

Nota. En lo sucesivo indicaremos la ley de composición interna de un grupo así: $(x, y) \to xy$, en lugar de $(x, y) \to x \top y$. Esto lo haremos para abreviar la escritura y en vista de que no hay lugar a posibles confusiones.

Teorema 3 — 1. *En un grupo G un elemento simétrico a izquierda es también elemento simétrico a derecha.*

Demostración: Sea a un elemento de G y sea a' su elemento simétrico a izquierda.

Por definición $a'a = e$, multiplicando a la derecha los dos miembros de esta igualdad por a', se obtiene que

$$(1) \qquad (a' a)a' = ea'.$$

Por la propiedad asociativa $(a'a)a' = a' \ (aa')$ y por definición $ea' = a'$, reemplazando en (1) se obtiene que

$$(2) \qquad a'(aa') = a'.$$

Sea a'' el elemento simétrico a izquierda de a', o sea que $a'' \ a' = e$. Multiplicando a la izquierda los dos miembros de la igualdad (2) por a'' se obtiene que

$$(3) \qquad a''(a' \ (aa') \ ) = a''a'.$$

Pero por la propiedad asociativa $a'' \ (a' \ (aa') \ ) = (a''a') \ (aa')$, reemplazando en (3) se obtiene que

$$(4) \qquad (a'' \ a') \ (aa') = a''a'.$$

Por definición $a'' \ a' = e$, entonces de (4) se obtiene que $e(a \ a') = e$, luego $a \ a' = e$. q. e. d.

Podemos sintetizar la demostración de este teorema así:

$$aa' = e(a\,a') = (a''\,a')\,(a\,a') = a''\,(a'(a\,a')) = a''((a\,a')a') =$$
$$= a''(ea') = a''\,a' = e.$$

Teorema 3 — 2. *En un grupo G un elemento neutro a izquierda es también elemento neutro a derecha.*

Demostración: Sea a un elemento de G y sea a' su elemento simétrico.

Por el teorema 3 — 1 $aa' = e$, multiplicando a la derecha los dos miembros de esta igualdad por a se obtiene que

(1) $$(aa')a = ea.$$

Por la propiedad asociativa $(aa')a = a(a'a)$, reemplazando en (1) se obtiene que

(2) $$a(a'a) = ea.$$

Por definición $a'a = e$ y $ea = a$, reemplazando en (2) se obtiene que

$$ae = a. \qquad \text{q. e. d.}$$

Podemos sintetizar la demostración de este teorema así:

$$ae = a(a'a) = (aa')a = ea = a.$$

Teorema 3 — 3. *Si* $a'\,a = e$ y $a'_1\,a = e$ *entonces* $a'_1 = a'$.

Demostración: Por hipótesis $a'_1\,a = e$, multiplicando a la derecha los dos miembros de esta igualdad por a' se obtiene que

(1) $$(a'_1\,a)a' = ea'.$$

Por la propiedad asociativa $(a'_1\,a)\,a' = a'_1\,(aa')$ y por definición $ea' = a'$, reemplazando en (1) se obtiene que

(2) $$a'_1\,(a\,a') = a'.$$

Por el teorema 3 — 1 $aa' = e$, reemplazando en (2) se obtiene que $a'_1\,e = a'$, pero por el teorema 3 — 2 $a'_1\,e = a'_1$, luego $a'_1 = a'$ q. e. d.

Podemos sintetizar la demostración de este teorema así:

$$a'_1 = a'_1 e = a'_1 (a a') = (a'_1 a)a' = ea' = a'.$$

Teorema 3 — 4. *En un grupo G el elemento simétrico del elemento simétrico de cualquier elemento del grupo es igual al elemento mismo.*

O sea que, si con a′ *indicamos el elemento simétrico del elemento* a *y con* a″ *indicamos el elemento simétrico del elemento* a′, *entonces* a″ = a.

Demostración: Por definición $e = a'a$, multiplicando a la izquierda los dos miembros de esta igualdad por a'' se obtiene que

(1) $$a'' e = a''(a'a).$$

Por el teorema 3 — 2 $a'' e = a''$ y por la propiedad asociativa $a''(a'a) = (a''a')a$, reemplazando en (1) se obtiene que

(2) $$a'' = (a'' a')a.$$

Por definición $a''a' = e$, reemplazando en (2) se obtiene que $a'' = ea$, pero por definición $ea = a$, entonces

$$a'' = a. \quad \text{q. e. d.}$$

Podemos sintetizar la demostración de este teorema así:

$$a'' = a'' e = a''(a' a) = (a'' a')a = ea = a.$$

Teorema 3 — 5. *Sea G un grupo y sean* a *y* b *dos elementos cualesquiera de G. Existe uno y sólo un elemento* x *en G, tal que* ax = b.

En otras palabras: la ecuación ax = b *tiene una y sólo una solución en G.*

Demostración: Supongamos que exista un x en G tal que $ax = b$. Entonces, multiplicando a la izquierda los dos miembros de esta igualdad por a', se obtiene que

(1) $$a'(ax) = a'b.$$

Por la propiedad asociativa $a'(ax) = (a'a)x$ y $(a'a)x = ex = x$, reemplazando en (1) se obtiene que $x = a'b$. Esto quiere decir que, si existe x necesariamente debe ser de la forma $x = a'b$.

Mostremos, ahora, que $a'b$ es en efecto una solución de $ax = b$.

Reemplazando en $ax = b$ a x por $a'b$ se obtiene que $a(a'b) = (aa')b = eb = b$.

Luego $x = a'b$ verifica la ecuación dada.

Teorema 3 — 6. *Sea G un grupo y sean* a *y* b *dos elementos cualesquiera de G. Existe uno y sólo un elemento* y *en G, tal que* ya = b.

En otras palabras: la ecuación ya = b *tiene una y sólo una solución en G.*

Hacer la demostración como *ejercicio.*

Teorema 3 — 7. *Si* a *y* b *son dos elementos cualesquiera de un grupo G, entonces* (ab)′ = b′a′.

Demostración: 1) $(ab)'$ es, por definición, el elemento simétrico de ab.

2) Demostremos que $b'a'$ también es el elemento simétrico de ab, o sea que $(b'a')(ab) = e$.

Por la propiedad asociativa y por definición se tiene que $(b'a')(ab) = b'(a'(ab)) = b'((a'a)b) = b'(eb) = b'b = e$, luego $b'a'$ también es elemento simétrico de ab. Por el teorema 3—3 se concluye que $(ab)' = b'a'$. q. e. d.

Grupo finito. Se llama grupo finito a todo grupo que consta de un número finito de elementos.

Grupo infinito. Se llama grupo infinito a todo grupo que consta de un número infinito de elementos.

Orden de un grupo. El número de elementos de un grupo se llama *orden* del grupo.

Se dice que todo grupo finito es de *orden finito* y que todo grupo infinito es de *orden infinito.*

IV. TABLAS DE COMPOSICION.

La composición interna de un grupo puede mostrarse completamente por medio de una tabla, llamada de composición, en la cual figuran todos los elementos del grupo.

Ejemplo: sea el grupo $G = \{e, a, b\}$ en que

e es el elemento neutro

a es el elemento simétrico de b

b es el elemento simétrico de a

$aa = b$ y $bb = a$.

Este grupo lo podemos mostrar por medio de la siguiente tabla:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

En la fila exterior y en la columna exterior se indican los elementos del grupo.

El compuesto de dos elementos es el elemento que se halla en la intersección de la fila encabezada por uno de los elementos de la composición con la columna encabezada por el otro elemento de la composición.

Como norma general, para no cometer errores, es conveniente tomar la columna exterior como la de encabezamiento para los elementos que figuren a la izquierda en los elementos compuestos y la fila exterior como la de encabezamiento para los elementos que figuren a la derecha.

La existencia de una sola solución de $ax = b$ para cada dos elementos cualesquiera de un grupo está mostrada por el hecho de que cada elemento del grupo sólo figura una vez en cada columna y en cada fila.

Ejercicios.

1. Demostrar que el conjunto $\{e, a, b, c, d, f, g\}$ con la composición dada en la tabla siguiente forma un grupo.

$\cdot$	e	a	b	c	d	f	g	h
e	e	a	b	c	d	f	g	h
a	a	b	c	e	g	h	f	d
b	b	c	e	a	f	d	h	g
c	c	e	a	b	h	g	d	f
d	d	h	f	g	e	b	c	a
f	f	g	d	h	b	e	a	c
g	g	d	h	f	a	c	e	b
h	h	f	g	d	c	a	b	e

2. Demostrar que en un grupo de $2n$ elementos existe, además del elemento neutro, otro elemento que es el simétrico de sí mismo.

3. Sean $a, b, c,$ tres elementos cualesquiera de un grupo G. Demostrar que la ecuación $xaxba = xbc$ tiene solamente una solución en G.

4. Dado un triángulo equilátero y tomando como ejes de simetría las perpendiculares trazadas por cada vértice a los lados opuestos y como centro de simetría el ortocentro del triángulo, escribir la tabla de composición de las simetrías del triángulo y demostrar que el conjunto de estas simetrías es un grupo.

5. Decir si todos los números irracionales, con la multiplicación ordinaria como operación de composición, forman un grupo.