PROBLEMAS

Los problemas son señalados por cero, uno o dos asteriscos según su grado de dificultad. Las soluciones de los problemas deben ser enviadas a REVISTA DE MATEMATICAS ELEMENTALES, Universidad de los Andes, Calle 18-A, Carrera 1-E, Bogotá, Colombia, antes del 28 de febrero de 1953. La solución a cada problema debe venir en hoja por separado. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas.

17. Encontrar un cuadrado perfecto de cuatro cifras tal que las dos primeras cifras sean iguales entre sí y también las dos últimas.

18. ¿Cuáles son los números que terminan por dos cifras iguales y sus cuadrados también?

19. Demostrar que un número que contiene sólo 1 como cifras (en el sistema decimal), no puede ser el cuadrado de un número entero.

20. ¿Puede ser el producto de cuatro números enteros positivos consecutivos un cuadrado perfecto?

*21. Demostrar que el producto de tres enteros positivos consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto, ni el doble de un cuadrado perfecto.

22. Demostrar que la diferencia entre la media aritmética y la media geométrica de dos números positivos a y b está comprendida entre

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \quad \text{y} \quad \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

23. Resolver el sistema siguiente de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y &= 4, \\ xz + yu &= 7, \\ xz^2 + yu^2 &= 12, \\ xz^3 + yu^3 &= 21. \end{aligned}$$

24. Construir un triángulo, conociendo los ángulos que forman entre sí los segmentos que unen el centro del círculo circunscrito con los vértices, y la longitud de un tal segmento.

25. (a) Si con a se designa la medida de una longitud dada, ¿para qué valores de m tiene la ecuación

$$(m+1)x^2 - 2(m+3)ax + (m+2)a^2 = 0,$$

dos raíces positivas?

(b) Suponiendo que esta condición sea realizada, consideremos el triángulo ABC rectángulo en A, tal que $AB = x'$, $AC = x''$, donde x' y x'' son las raíces de la ecuación propuesta. Hagamos girar el triángulo sucesivamente alrededor de AB y de AC. Calcular en función de m la suma de los volúmenes así generados.

(c) Determinar m de manera que esta suma sea igual a $\frac{2\pi\lambda a^3}{3}$ siendo λ un número positivo dado. Discutir.

(d) Hagamos girar BAC alrededor de la hipotenusa BC; así se genera un sólido P. Demostrar que P se puede inscribir en una esfera S y calcular el radio de S en función de m. Decir cómo varía el radio cuando varía m.

(Bachillerato, 1ª parte, Aix-Marseille, Francia, 1948).

26. Se dan en el espacio dos triángulos ABC y $A'BC$ teniendo el lado BC común, siendo AA' perpendicular al plano $A'BC$.

(a) Sea $A'K$ la altura del triángulo $A'BC$; ¿qué se puede afirmar de los planos $AA'K$ y ABC? Demostrarlo.

(b) Sean BL y BM las perpendiculares trazadas de B a $A'C$ y AC; mostrar que el plano LBM es perpendicular al plano del triángulo ABC. Si H' es el ortocentro[1] del triángulo ABC y H el del triángulo $A'BC$, mostrar que H' es la proyección de H sobre el plano ABC.

(c) A se mueve sobre la semirrecta $A'x$ perpendicular al plano del triángulo fijo $A'BC$. Determinar el lugar del punto H'.

(d) Dado $A'B = c$, $A'C = b$, $AA' = m$ y el ángulo $BA'C = \alpha$, determinar el volumen del tetraedro $A'ABC$.

(Bachillerato, 1ª parte, Aix-Marseille, Francia, 1948).

---

[1] El ortocentro es el punto en que se cortan las tres alturas de un triángulo.