Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XIX (1985), págs. 233-250

SOBRE LAS SOLUCIONES PERIODICAS DEL PROBLEMA DE DIRICHLET PARA ECUACIONES DE TIPO PARABOLICO

por

Luis A. ORTEGA

ABSTRACT. It is shown that for a Dirichlet's periodic problema studied by Lazer:

$$L(u) = g(x,t,u)+f_1(x,t)+s\emptyset(x,t) \quad \text{in } \Omega\times\mathbb{R}$$
$$u(x,t+T) \equiv u(x,t), \qquad u|\partial\Omega\times\mathbb{R} = 0$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$, and certain restrictions are assumed for g, f_1, and $\emptyset$, there exists a number $\alpha(f_1)$ such that the problem has at least two solution if $s < \alpha(f_1)$, and at least one if $s = \alpha(f_1)$.

1. Introducción. Ambrosetti y G. Prodi demostraron en [1] un resultado muy importante referente al siguiente problema de Dirichlet.

$$-\Delta u = g(u) + f(x) \text{ en } \Omega, \qquad u \equiv 0 \text{ en } \partial\Omega, \tag{1}$$

en donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, con una frontera $\partial\Omega$ de clase $C^{2+\alpha}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función C^2, de valor real, tal que $g''(s) > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, y

$$0 < \lim_{s\to -\infty} g'(s) < \lambda_1 < \lim_{s\to\infty} g'(s) < \lambda_2, \tag{2}$$

donde λ_1,λ_2 son los dos primeros valores propios del siguiente problema de valor propio:

$$-\Delta u = \lambda u \text{ en } \Omega, \quad u \equiv 0 \text{ en } \partial\Omega. \tag{3}$$

Ellos probaron, bajo estas hipótesis, la existencia de una C^1-variedad $\mathbf{M}$ en $C^\infty(\bar{\Omega})$, que divide a este espacio en dos conjuntos abiertos G_1 y G_2 con las siguientes propiedades:
(i) Si $f \in G_1$, el problema (1) no tiene solución.
(ii) Si $f \in \mathbf{M}$, el problema (1) tiene exactamente una solución.
(iii) Si $f \in G_2$, el problema (1) tiene exactamente dos soluciones.

Por su parte, M.S. Berger y E. Podolak han demostrado en [9] el siguiente resultado: Para cada $f_1 \in N^{\perp}$ existe un número real $\alpha(f_1)$ para el cual el problema de Dirichlet:

$$-\Delta u = g(u) + t\phi + f_1 \text{ en } \Omega\ , \quad u \equiv 0 \text{ en } \partial\Omega\ , \tag{4}$$

no tiene solución si $t > \alpha(f_1)$, tiene exactamente una solución si $t = \alpha(f_1)$ y tiene exactamente dos soluciones si $t < \alpha(f_1)$, donde Φ es una función propia del problema (3) que satisface $\int\Phi^2 = 1$ y $N^{\perp} = \{f \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \mid \int f\Phi = 0\}$.

J.L. Kazdan y F.W. Warner [5], H. Amann y P. Hess [2] y E.N. Dancer [4] probaron resulrados similares referentes al problema (4). En [6], Alan C. Lazer demostró que dada $f_1 \in N^*$, existe un número $\alpha(f_1)$ tal que el siguiente *problema periódico de Dirichlet*:

$$\{L[u] = g(x,t,u) + f_1(x,t) + s\phi(x,t) \text{ en } \Omega\times\mathbb{R},$$

$$u(x,t+T) \equiv u(x,t)\}, \qquad (5)$$

con $u \mid \partial\Omega\times\mathbb{R} = 0$, tiene solución si $s < \alpha(f_1)$, y no tiene solución si $s > \alpha(f_1)$, en donde ϕ es solución del problema de valor en la frontera:

$$\{L[\phi] = \lambda_1\phi,\ \phi > 0 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R},\ \phi(x,t+T) = \phi(x,t),$$

$$\phi \restriction \partial\Omega\times\mathbb{R} \equiv 0\} \qquad (6)$$

cuando λ_1 es el valor propio principal , ϕ^* es la solución del problema de valor en la frontera:

$$\{L^*(\phi^*) = \lambda_1\phi^*, \phi^* > 0 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R},$$

$$\phi^*(x,t+T) \equiv \phi^*(x,t), \phi^*\restriction\partial\Omega\times\mathbb{R} \equiv 0\}, \qquad (7)$$

y en donde, finalmente:

$$N^* = \{f \in C^\alpha(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}) \mid f(x,t+T) \equiv f(x,t), (f,\phi^*)_o = 0\}$$

$$L[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - \Big(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(\cdot)\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu\Big),$$

$$(C \leqslant 0), \qquad (8)$$

L^* es el operador adjunto de L, y los coeficientes de L son periódicos con período T.

En el mismo artículo Lazer demostró que si $\hat{\lambda} < \lambda_1$, entonces para todo $f \in C^\alpha(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $f(x,t+T) \equiv f(x,t)$, existe $u \in C^{2+\alpha}(\Omega\times\mathbb{R})$ tal que

$$L[u] \equiv \hat{\lambda}u+f,\ u(x,t+T) \equiv u(x,t),\ u\restriction\partial\Omega\times\mathbb{R} \equiv 0 \qquad (9)$$

Si $f \geqslant 0$, $f \neq 0$, entonces $u > 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$. En este artículo demostramos que el problema (5) tiene por lo menos dos soluciones si $s < \alpha(f_1)$ y por lo menos una solución si $s = \alpha(f_1)$.

2. Definiciones y notaciones. Denotaremos con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ a un dominio acotado con frontera de clase $C^{2+\alpha}$, para algún $\alpha \in (0,1)$, con $[a,b]$ a un intervalo compacto y con u, a una función de valor real, definida en $\bar{\Omega}\times[a,b] = Q$. Escribimos $u \in C^{\alpha}(Q)$ si el número

$$\bar{H}_{\alpha}^{Q}(u) = \sup_{\substack{(x_k,t_k)\in Q \\ k=1,2 \\ (x_1,t_1)\neq(x_2,t_2)}} \frac{|u(x_1,t_1)-u(x_2,t_2)|}{[|x_1-x_2|^2+|t_1-t_2|]^{\alpha/2}} < \infty$$

El conjunto de todas estas funciones es un espacio de Banach, con la norma $\|u\|_{C^{\alpha}(Q)} = \max\limits_{(x,t)\in Q} \|u(x,t)\| + \bar{H}_{\alpha}^{Q}(u)$.

Se escribe también $u \in C^{2+\alpha}(Q)$, si $u_t, u_{x_i}, u_{x_ix_j}, u$ pertenecen a $C^{\alpha}(Q)$, para $1 \leqslant i, j \leqslant N$ y la norma $\|u\|_{C^{2+\alpha}(Q)}$ se define como la suma de las $C^{\alpha}(Q)$-normas de todas estas funciones. Similarmente, $C^{1+\alpha}(Q)$ se define como el conjunto de todas las funciones u definidas en Q, tales que u y u_{x_j} $1 \leqslant i \leqslant N$, pertenecen a $C^{\alpha}(Q)$. Se escribe $u \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $(C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ respectivamente), si $u \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}\times[a,b])$, $(C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}\times[a,b])$, $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}\times[a,b])$ respectivamente) para cualquier $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Denotamos con F al espacio de Banach conformado por las funciones $f \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, tales que $f(x,t+T) \equiv f(x,t)$, con la norma $\|\cdot\|_F$ definida por $\|f\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega}\times[0,T])} = \|f\|_F$. Con

E denotamos al espacio de Banach de todas las funciones $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ que satisfacen $u(x,t+T) \equiv u(x,t)$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$ y $u(x,t) = 0$, para todo $(x,t) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}$, con la norma $\|\cdot\|_E$ definida por $\|u\|_E = \|u\|_{C^{\alpha+2}(\Omega\times[0,T])}$.

En lo que sigue, L denotará al operador definido en (8) con las siguientes condiciones:

A_1) Los coeficientes de L son periódicos en t con período T.

A_2) $a_{ij}(\cdot) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $1 \leq i, j \leq N$, $a_{ij} = a_{ji}$,

$b_i(\cdot) \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $1 \leq i \leq N$,

$C \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $C \leq 0$.

A_3) L es uniformemente parabólico.

El operador L^* adjunto de L, tiene la forma siguiente:

$$L^*[u] = -\frac{\partial u}{\partial t} - \Big(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i^*(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C^*(x,t)u\Big),$$

donde,

$$b_i^* = -b_i + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, C^*(x,t) = C(x,t) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$$

Con $g:\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denotaremos a una función que cumple lo siguiente:

a) $g(x,t+T,u) = g(x,t,u)$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$,

b) $\frac{\partial g}{\partial u}$ es continua, $\frac{\partial g}{\partial u}(\cdot,\cdot,v) \in F$ y $g(\cdot,\cdot,v) \in F$ para cualquier $v \in F$.

c) Existen constantes $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ y $k_3 > 0$ tales que $g(x,t,u) - \lambda_1 u \geq k_1|u| - k_2$, para todo $(x,t,u) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ y existe un número a tal que: $|\frac{\partial g}{\partial u}(x,t,u)| < k_3$, para cualquier $u \in [a,\infty)$ y para todo $(x,t) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}$ (se puede suponer que $\lambda_1 > k_1$, pues $\lambda_1 > 0$).

3. Resultado principal. El principal propósito de esta última sección es probar el siguiente resultado, en donde N^* es el conjunto definido en la introducción.

3.1 TEOREMA. *Para cada* $f_1 \in N^*$, *existe un número* $\alpha(f_1)$ *tal que el problema de Dirichlet:*

$$\{u \in E \text{ y } L[u] = g(\cdot,\cdot,u) + f_1 + s\phi \text{ en } \Omega\times\mathbb{R}\}, \qquad (I)$$

tiene por lo menos dos soluciones si $s < \alpha(f_1)$ *y por lo menos una si* $s = \alpha(f_1)$.

En la demostración de este teorema usaremos los siguientes lemas.

3.2 LEMA. *Para cada* $f \in F$ *existe una única función* $u \in E$ *que cumple* $L[u] = f$. *Además existen constantes* $\bar{k}_1 > 0$ *(la cual depende de un número* $\beta \in (0,1)$, *fijo) y* $\bar{k}_2$ *tales que:*

a) $\|u\|_E \leq \bar{k}_1 \|L[u]\|_F$,

b) $\|u\|_{1+\beta} \leq \bar{k}_2 \|L[u]\|_\infty$.

3.3 LEMA. *Para cada* $r_o > 0$, *existe una constante* $\bar{R}(r_o) > 0$ *tal que si* $f \in F$, $u \in E$ *y* $L[u] = g(\cdot,\cdot,u)+f$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}$ *y* $\|f\|_\infty < r_o$, *entonces* $\|u\|_{1+\beta} \leq R(r_o)$ *(en toda esta sección* $\beta \in (0,1)$ *y se mantiene fijo).*

3.4 LEMA. *Sean*

$$\hat{E} = \{f \in C^{1+\beta}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}) \mid f \equiv 0 \text{ en } \partial\Omega\times\mathbb{R},\ f(x,t+T) \equiv f(x,t) \text{ en } \bar{\Omega}\times\mathbb{R}\}$$

y $i: E \to \hat{E}$ *la inyección de* E *en* $\hat{E}$. *Si* $f_1 \in N^*$, $d \geq 0$ *y*

$M[u] = L[u]+du$ *para todo* $u \in E$, *entonces para cada* $t \in \mathbb{R}$, *la aplicación definida de* $\hat{E}$ *en* $\hat{E}$ *por* $H_t(v) = iM^{-1}(g(\cdot,\cdot,v) + dv + f_1 + t\phi)$, *para cada* $v \in \hat{E}$, *esta bien definida y es continua y compacta* (en toda esta sección $\hat{E}$ tendrá el mismo significado).

Este lema nos permite hablar del grado de Leray-Schauder: $dg(I-H_t, G,p)$ donde G es un conjunto abierto y acotado en $\hat{E}$ y $p \in \hat{E}$.

3.5 LEMA. *Si* $f_1 \in N^*$ *y* $t_o < \alpha(f_1)$, *entonces existen dos funciones* $\bar{u} \subset E$, $\underline{u} \in E$, *tales que*

$$L[\bar{u}] > g(\cdot,\cdot,\bar{u}) + t_o\phi + f_1 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R},$$

$$L[\underline{u}] < g(\cdot,\cdot,\underline{u}) + t_o\phi + f_1 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R}, \text{ y } \underline{u} < \bar{u} \text{ en } \Omega\times\mathbb{R}.$$

3.6 LEMA. *Sea*

$$\tilde{g}(x,t,s) = \begin{cases} g(x,t,\underline{u}(x,t))+d_1\underline{u}(x,t), & si\ s \leqslant \underline{u}(x,t), \\ g(x,t,s)+d_1 s, & si\ \underline{u}(x,t) < s < \bar{u}(x,t), \\ g(x,t,\bar{u}(x,t))+d_1\bar{u}(x,t) & si\ s \geqslant \bar{u}(x,t), \end{cases}$$

donde $|\frac{\partial g}{\partial u}(x,t,s)| \leqslant d_1$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}\times[\bar{\bar{r}},\infty]$ *y* $\bar{\bar{r}} = \min\limits_{\bar{\Omega}\times\mathbb{R}} \underline{u}$. *Entonces* $\tilde{g}$ *es una función acotada y no decreciente en la variable* s.

El lema anterior se usa en la demostración del siguiente lema:

3.7 LEMA. *Si* $t_o < \alpha(f_1)$, *y* $\tilde{H}_{t_o}$ *es la función de* $\hat{E}$ *en* $\hat{E}$ *definida por* $\tilde{H}_{t_o}(v) = iM^{-1}(\tilde{g}(\cdot,\cdot,v)+t_o\phi+f_1)$ *para ca-*

da $v \in \hat{E}$, *donde* $M[u] = L[u]+d_1 u$, *y la función* $i:E \to \hat{E}$ *es la inyección, entonces existe un número real* $\bar{R} > 0$ *tal que* $\|\tilde{H}_{t_o}(v)\|_{1+\beta} < \bar{R}$, *para todo* $v \in \hat{E}$.

3.8 LEMA. ($\bar{R}$ *mencionado en el Lema 3.7*). *Si*

$$G = \begin{cases} u \in \hat{E} \mid \underline{u} < u < \bar{u} \text{ en } \Omega\times\mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial n} < \dfrac{\partial u}{\partial n} < \dfrac{\partial\underline{u}}{\partial n} \text{ en } \partial\Omega\times\mathbb{R} \\ \|u\|_{1+\beta} < \bar{R}, \end{cases}$$

entonces:

i) G *es un conjunto no vacío, abierto y convexo de* $\hat{E}$ *y* $\tilde{H}_{t_o} \mid G \equiv H_{t_o} \mid G$.

ii) $dg(I-H_{t_o},G,0) = 1$.

iii) *Existe un número* $R_o > \bar{R}$ *tal que* $dg(I-H_{t_o},B_{R_o},0) = 0$ *donde* $B_{R_o} = \{u \in \hat{E} \mid \|u\|_{1+\beta} < R_o\}$, *y* $dg(I-H_{t_o},D,P)$, *denota el grado de* $(I-H_{t_o})$ *en* P, *relativo a* D.

Demostración del Teorema 3.1. Supongamos que $t_o < \alpha(f_1)$. Por el Lema 3.8, $dg(I-H_{t_o},G,0) = 1$, $dg(I-H_{t_o},B_{R_o},0) = 0$ y $B_{R_o} \supset G$. Por un resultado estándar de la teoría del grado (ver [7], Teorema 4.3.9), lo anterior implica que $dg(I-H_{t_o},(B_{R_o}\setminus\bar{G}),0) = -1$; por tanto, existen dos funciones, $u_1 \in G$, $u_2 \in (B_{R_o}\setminus\bar{G})$, tales que $H_{t_o}(u_1) = u_1$, y $H_{t_o}(u_2) = u_2$. Esto quiere decir que:

$$u_1 = H_{t_o}(u_1) = M^{-1}(g(\cdot,\cdot,u_1)+d_1u_1+f_1+t_o\phi)$$

$$u_2 = H_{t_o}(u_2) = M^{-1}(g(\cdot,\cdot,u_2)+d_1u_2+f_1+t_o\phi).$$

Estas dos identidades son equivalentes a:

$$M[u_1] = L[u_1]+d_1u_1 = g(\cdot,\cdot,u_1)+d_1u_1+t_o\phi+f_1,$$

$$M[u_2] = L[u_2]+d_1u_2 = g(\cdot,\cdot,u_2)+d_1u_2+t_o\phi+f_1,$$

$$L[u_1] = g(\cdot,\cdot,u_1)+t_o\phi+f_1 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R},$$

$$L[u_2] = g(\cdot,\cdot,u_2)+t_o\phi+f_1 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R}, \quad u_1 \neq u_2.$$

Para demostrar (ii), denotemos con $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ a una sucesión de números reales que cumple las condiciones $t_n < \alpha(f_1)$ para cualquier entero $n \geqslant 1$, y $\lim_{n\to\infty} t_n = \alpha(f_1) = t^*$. Lo anterior implica que existe una sucesión de funciones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ en E tal que $L[u_n] = g(\cdot,\cdot,u_n)+t_n\phi+f_1$ en $\Omega\times\mathbb{R}$, para todo $n \geqslant 1$. Puesto que $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente, existe $r > 0$ tal que $\|t_n\phi+f_1\|_{\infty} \leqslant |t_n|\|\phi\|_{\infty}+\|f_1\|_{\infty} < r$ para todo $n \geqslant 1$. Por el Lema 3.3, existe $R(r) > 0$ que satisface $\|u_n\|_{1+\beta} < R(r)$ para todo $n \geqslant 1$. Ahora bien, como la inyección $i:\hat{E} \to F$ es compacta, existe una subsucesión de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, denotada también con $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, que converge a una función $u \in F$, en la norma de F. Por tanto: $\|u_n-u\|_{\infty} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Lo anterior implica que existe $\bar{\bar{r}} > 0$ tal que $u_n \geqslant \bar{\bar{r}}$ y $u \geqslant \bar{\bar{r}}$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$, para todo $n \geqslant 1$. Se puede suponer, por otra parte, que $\left|\frac{\partial g}{\partial u}(x,t,s)\right| \leqslant k_3$, para todo $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$ y $s \geqslant \bar{\bar{r}}$ Por tanto,

$$\begin{aligned}\|g(\cdot\cdot,u_n)-g(\cdot\cdot,u)\|_{\infty} &= \left|\frac{\partial g}{\partial u}(\cdot,\cdot,\xi(\cdot)(u_n-u)\right\|_{\infty} \\ &\leqslant k_3\|u_n-u\|_{\infty} \to 0,\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. Por el Lema 3.2, existe entonces una función $v \in E$ tal que:

$$L[v] = g(\cdot,\cdot,u) + t^*\phi+f_1 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R} \tag{10}$$

y

$$\|u_n - v\|_{1+\beta} \leq \bar{k}_1 \|L(u_n - v\|_\infty$$

$$= \bar{k}_1 \|g(\cdot,\cdot,u_n) + t_n\phi - g(\cdot,\cdot,u) - t^*\phi\|_\infty$$

$$\leq \bar{k}_1 \|g(\cdot,\cdot,u_n) - g(\cdot,\cdot,u)\|_\infty + \bar{k}_1 \|\phi\|_\infty |t_n - t^*|$$

$$\leq \bar{k}_1 k_3 \|u_n - u\|_\infty + \bar{k}_1 \|\phi\|_\infty |t^* - t_n| \to 0$$

si $n \to \infty$. Por lo anterior, tenemos que $u_n \to v$, cuando $n \to \infty$, en la norma de F. Como $\|u_n - u\|_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$, tenemos $u \equiv v$. Por (10), podemos concluir finalmente que

$$L[u] = g(\cdot\cdot,u) + t^*\phi + f_1 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R}, \text{ donde } t^* = \alpha(f_1). \quad \Delta$$

Demostración del Lema 3.2. Denotemos con $x = (x_1,\ldots,x_n)$ a un punto variable en $\mathbb{R}^n$ y sean $s_o = \min\limits_{\bar{\Omega}} x_1$ y $s_1 = \max\limits_{\bar{\Omega}} x_1$. Si $\psi(x) = e^{\gamma(s_1 - s_o)} - e^{\gamma(x_1 - s_o)}$ donde $\gamma > 0$, entonces $\psi(x) \geq 0$ en $\bar{\Omega}$ y $L(\psi)(x,t) \geq m\gamma^2 - k\gamma$, donde m es la constante asociada a L por ser uniformemente parabólico, y k es la cota de $|b_1(x,t)|$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$. Seleccionamos $\gamma > 0$ lo suficientemente grande para que $L(\psi)(x,t) \geq 1$. Haremos la demostración para $f \in F$, $f(x,t) \geq 0$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$, y $f(x,0) \equiv 0$. La demostración en el caso general es fácil, usando este caso particular. Denotemos con $v(x,t) = \psi(x)\|f\|_\infty$ y con $z(x,t)$ a la solución del problema inicial con valor en la frontera:

$$L[z](x,t) = f(x,t) \text{ en } \bar{\Omega}\times[0,\infty),\ z(x,0) \equiv 0,$$

$$z\restriction\partial\Omega\times[0,\infty) \equiv 0.$$

Puesto que $L[z] \geq 0$ en $\bar{\Omega}\times[0,\infty)$ y $z \equiv 0$ en $\partial\Omega\times[0,\infty) \cup \Omega\times\{0\}$, síguese, por el principio máximo, que $z(x,t) \geqslant 0$ en $\bar{\Omega}\times[0,\infty)$. Hagamos $z_1(x,t) \equiv z(x,t+T)$, para $t \geqslant 0$. Ya que $f \in F$ y los coeficientes de L son T-periódicos en t, entonces $L[z_1] \equiv f$. Como

$$L[z_1-z] \equiv 0, \quad (z_1-z)(x,0) = z_1(x,0) = z(x,T) \geqslant 0$$

y $(z_1-z)|\partial\Omega\times[0,\infty) \equiv 0$, tenemos que $z(x,t) \leqslant z_1(x,t) = z(x,t+T)$ en $\Omega\times[0,\infty)$. Por tanto, si $z_m(x,t) \equiv z(x,t+mT)$, resulta que $z_m(x,t) \leqslant z_{m+1}(x,t)$ para $m \geqslant 1$, y $(x,t)\bar{\Omega}\times[0,\infty)$. Puesto que $L[v](x,t) = \|f\|_\infty L(\psi)(x,t) \geqslant \|f\|_\infty \geqslant f$, y $v(x,0) \geqslant 0$, se deduce del principio máximo, que $z(x,t) \leqslant v(x,t) \leqslant d_1\|f\|_\infty$, donde $d_1 = e^{\gamma(s_1-s_o)}$. Por consiguiente, $0 \leqslant z_m(x,t) \leqslant z_{m+1}(x,t) \leqslant d_1\|f\|_\infty$ en $\Omega\times[0,\infty)$ para todo $m >1$; esto es, el $\lim_{m\to\infty} z_m(x,t) \equiv u(x,t)$ existe en $\bar{\Omega}\times[0,T]$. Sea $\theta(t)$ una función suave, definida en $[0,\infty)$, tal que $\theta(0) = 0$ y $\theta(t) = 1$ para $t \geqslant T/2$. Si para cada $m \geqslant 1$, escribimos $w_m = \theta z_m$, entonces $L[w_m] = \theta' z_m+\theta f = h_m$, en $\bar{\Omega}\times[0,\infty)$. Ahora bien, por estimaciones previas tenemos que $\|h_m\|_\infty \leqslant d_2\|f\|_\infty$, en $\bar{\Omega}\times[0,\infty)$, donde d_2 es independiente de f. Dado que $w_m = 0$ en $\partial\Omega\times[0,\infty) \cup \Omega\times\{0\}$, por un resultado conocido (ver [8], págs. 342-343), para cualquier $r > 0$ existe entonces $d_3 = d_3(r)$ tal que, $\|w_m\|_{1+\beta}^{\Omega\times[0,r]} \leqslant d_3\|h_m\|_\infty^{\Omega\times[0,r]}$. Si $r > T/2$, vemos que

$$\|z_m\|_{1+\beta}^{\Omega\times[T/2,r]} \leqslant d_3\|h_m\|_\infty^{\Omega\times[0,r]} \leqslant d_2d_3\|f\|_\infty, \tag{11}$$

para todo $m \geqslant 1$.

Como la inyección de $C^{1+\beta}(\bar{\Omega}\times[T/2,r])$ en $C^\alpha(\Omega\times[T/2,r])$ es compacta, existe una subsuseción de $\{z_m\}_{m=1}^\infty$ que converge en $C^\alpha(\bar{\Omega}\times[T/2,r])$ y puesto que cualquiera de tales subsucesiones converge a $u(x,t)$ en $\bar{\Omega}\times[T/2,r]$, tenemos que $u \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}\times[T/2,r])$ y $\|z_m - u\|_{\alpha}^{\Omega\times[T/2,r]} \to 0$, cuando $m \to \infty$, para todo $r > T/2$. Denotemos con Φ a una función suave tal que $\Phi(T/2) = 0$, $\Phi(t) \equiv 1$ para $t \geq T$. Sea $n > m \geq 1$; ya que $\Phi(z_n - z_m) = 0$ en $\partial\Omega\times[T/2,\infty) \cup \bar{\Omega}\times\{T/2\}$, por un resultado conocido (ver [3] pág. 65, Teoremas 6 y 7), para todo $r > T/2$ existe una constante $d_4 = d_4(r)$ independiente de m y n que cumple

$$\|\phi(z_n - z_m)\|_{2+\alpha}^{\Omega\times[T/2,r]} \leq d_4 \|L(\Phi(z_n - z_m))\|_{\alpha}^{\Omega\times[T/2,r]}$$

Ya que

$$\begin{aligned}\|L(\Phi(z_n - z_m))\|_{\alpha}^{\Omega\times[T/2,r]} &= \|\Phi\ (z_n - z_m)\|_{\alpha}^{\Omega\times[T/2,r]} \\ &\leq d_5 \|z_n - z_m\|_{\alpha}^{\Omega\times[T/2,r]}\end{aligned}$$

se tiene que:

$$\|z_n - z_m\|_{\alpha+2}^{\bar{\Omega}\times[T,r]} \leq \|\Phi(z_n - z_m)\|_{2+\alpha}^{\bar{\Omega}\times[T/2,r]} \leq d_4 d_5 \|z_n - z_m\|_{\alpha}^{\bar{\Omega}\times[T/2,r]}$$

Lo anterior implica que $\{z_n\}^{\infty}$ converge a u en $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}\times[T,r])$, para cualquier $r > T$. Esto quiere decir que u es de clase $C^{2+\alpha}$ en $\Omega\times[T,r]$, para $r > T$, y para $x \in \bar{\Omega}$ y $t > T$, se tiene entonces $u(x,t+T) = \lim_{m\to\infty} z_m(x,t+T) = \lim_{m\to\infty} z_{m+1}(x,t) = u(x,t)$; además para $x \in \partial\Omega$ y $t \geq T$, $u(x,t) = \lim_{m\to\infty} z_m(x,t) = 0$; y existe una única extensión de u a $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$, que es T-periódica en t. Si denotamos esta extensión otra vez con u, entonces $u \in E$ y $L[u] = f$. Retornando a la desigualdad (11) tenemos que

$$\begin{aligned}\|u\|_{1+\beta} = \lim_{m\to\infty} \|z_m\|_{1+\beta}^{\Omega\times[T,2T]} &\leq \lim_{m\to\infty} \|z_m\|_{1+\beta}^{\bar{\Omega}\times[T/2,2T]} \\ &\leq d_2 d_3 \|f\|_{\infty},\ \bar{k}_2 = d_2 d_3.\end{aligned}$$

La unicidad es consecuencia inmediata del principio máximo. Por lo tanto, el operador $L:E \to F$ es uno a uno y sobre. Por el teorema de la función abierta, L^{-1} es continua; en consecuencia, existe una constante $\bar{k}_1$ que satisface la desigualdad (a). ▲

Demostración del Lema 3.3. Usando las hipótesis sobre la función g y las relaciones comunes existentes entre el operador L y su adjunto L^*, es fácil demostrar que para r_o dado, existe $r_1 > 0$ tal que si $u \in E$, $f \in F$, $\|f\|_\infty < r_o$ y $L[u] = g(\cdot\cdot,u)+f$ entonces $\|u\|_\infty \leqslant r_1$. Si $f \in F$, $u \in E$, $\|f\|_\infty < r_o$ y $L[u] = g(\cdot,\cdot,u)+f$, entonces

$$\|u\|_{1+\beta} < \bar{k}_2\|L[u]\|_\infty \leqslant \bar{k}_2(\|g(\cdot,\cdot,u)\|_\infty + \|f\|_\infty)$$

$$\leqslant \bar{k}_2[k_3\|u\|_\infty + \sup_{\bar{\Omega}\times\mathbb{R}}|g(x,t,0)| + \|f\|_\infty]$$

$$\leqslant \bar{k}_2|k_3r_1+r_o + \sup_{\bar{\Omega}\times\mathbb{R}}|g(x,t,0)|] \equiv R(r_o). \quad ▲$$

Las demostraciones de los lemas 3.4, 3.6 y 3.7 son inmediatas.

Demostración del Lema 3.5. Tomemos $t_o < t_1 < \alpha(f_1)$, (t_1 fijo). Por (5), existe una función $\bar{u} \in E$ tal que $L[\bar{u}] = g(\cdot,\cdot,\bar{u}) + t_1\phi + f_1$ en $\Omega\times\mathbb{R}$. Como $\phi > 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$, se tiene

$$L[\bar{u}] = g(\cdot,\cdot,\bar{u}) + t_1\phi+f_1 > g(\cdot,\cdot,\bar{u})+t_o\phi+f_1 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R}.$$

Sea $\bar{r}_1 = \min_{\Omega\times\mathbb{R}}(f_1+t_o\phi)$. Para $f = -k_2+(\bar{r}_1-1)$, por (9), existe una función $\underline{u} \in E$ tal que

$$L[\underline{u}] = (\lambda_1 - k_1)\underline{u} - k_2 + (\bar{r}_1 - 1) \leq g(\cdot,\cdot,\underline{u}) + (\bar{r}_1 - 1) < g(\cdot,\cdot,\underline{u}) + t_o\phi + f_1$$

en $\Omega\times\mathbb{R}$. Puesto que

$$L[\bar{u}] > g(\cdot\cdot,\bar{u}) + t_o\phi + f_1 > (\lambda_1 - k_1)\bar{u} + (\bar{r}_1 - 1) - k_2 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R},$$

tenemos:

$$L[\bar{u} - \underline{u}] > (\lambda_1 - k_1)(\bar{u} - \underline{u}) \text{ en } \Omega\times\mathbb{R} \qquad (12)$$

Hagamos $z = \bar{u} - \underline{u}$ y $h = L[z] - (\lambda_1 - k_1)z$ en $\Omega\times\mathbb{R}$. Como $L[u] = (\lambda_1 - k_1)z + h$ y $h > 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$, por (9) tenemos que $0 < z = \bar{u} - \underline{u}$ en $\Omega\times\mathbb{R}$. ▲

Demostración del Lema 3.8. La demostración de (i) es consecuencia directa de las definiciones de G y $\tilde{H}_{t_o}$. Para demostrar (ii), supongamos que $v \in \hat{E}$, $u = \tilde{H}_{t_o}(v)$ y $u \in E \subset \hat{E}$. Por el Lema 3.5 tenemos que:

$$M[\bar{u} - u] > d_1\bar{u} + g(\cdot,\cdot,\bar{u}) + t_o\phi + f_1 - (\tilde{g}(\cdot,\cdot,v) + t_o\phi + f_1)$$

$$= \tilde{g}(\cdot,\cdot,\bar{u}) - \tilde{g}(\cdot,\cdot,v) \geq 0 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R}.$$

De esta desigualdad y del principio del máximo para las ecuaciones parabólicas, se deduce que $\bar{u} - u > 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$ y $\frac{\partial}{\partial\vec{n}}(\bar{u} - u) < 0$ en $\partial\Omega\times\mathbb{R}$. Usando este mismo argumento podemos probar que $\partial u/\partial\vec{n} < \partial\underline{u}/\partial\vec{n}$ en $\partial\Omega\times\mathbb{R}$. Ya que $\|u\|_{1+\beta} = \|\tilde{H}_{t_o}(v)\|_{1+\beta} < R$ (ver Lema 3.7), tenemos que $u = \tilde{H}_{t_o}(v) \in G$, para todo $v \in \hat{E}$. Tomemos $\bar{\phi} \in G$, ($\bar{\phi}$ fijo) y consideremos la homotopía compacta $\tilde{H}_\lambda(v) = \lambda\tilde{H}_{t_o}(v) + (1-\lambda)\bar{\phi}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, para todo $v \in \hat{E}$. Ya que $\tilde{H}_{t_o}(v) \in G$ y G es un conjunto convexo, se sigue que $\tilde{H}_\lambda(v) \in G$, para cada $v \in \hat{E}$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Por la propiedad de invariabilidad de las homotopías en la teoría del grado, obtenemos: $dg(I-\tilde{H}_o, G, 0) = dg(I-\tilde{H}_1, G, 0)$. Como $\tilde{H}_{t_o} = \tilde{H}_1$, $\tilde{H}_o$ es constante en $\hat{E}$ $(\tilde{H}_o = \bar{\phi})$, se tiene que $1 = dg(I-\tilde{H}_o, G, 0) = dg(I-\tilde{H}_1, G, 0)$. Puesto que $\tilde{H}_{t_o}|_G \equiv H_{t_o}|_G$, se sigue que

$$1 = dg(I-\tilde{H}_o, G, 0) = dg(I-\tilde{H}_1, G, 0) = dg(I-\tilde{H}_{t_o}, G, 0)$$

$$= dg(I-H_{t_o}, G, 0).$$

Para demostrar (iii) seleccionemos un número real t_1 tal que $t_1 > \alpha(f_1)$ y $t_1 > |t_o|$. Para $r_3 > \|f_1\|_\infty + t_1\|\phi\|_\infty \geq \|f_1 + t_1\phi\|_\infty$, por el Lema 3.3 existe $R(r_3) > 0$ tal que si $f \in F$, $\|f\|_\infty < r_3$ y $L[u] = g(\cdot,\cdot,u)+f$ en $\Omega\times\mathbb{R}$, entonces

$$\|u\|_{1+\beta} < R(r_3). \tag{13}$$

Si $t \in [t_o, t_1]$ y $H_t(u) = u$, $u \in \hat{E}$, entonces $L[u] = g(\cdot,\cdot,u)+f_1+t\phi$ en $\Omega\times\mathbb{R}$ y

$$\|f_1+t\phi\| \leq \|f_1\|_\infty + |t|\|\phi\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty + t_1\|\phi\|_\infty < r_3.$$

Por esta desigualdad y por (3) tenemos que $\|u\|_{1+\beta} < R(r_3) \leq \max\{R(r_3), \bar{R}+1\} = R_o$. Por tanto, si $\|u\|_{1+\beta} = R_o$, $u \in \hat{E}$ y $t \in [t_o, t_1]$ entonces $u \neq H_t(u)$. La invariabilidad de las homotopías en la teoría del grado nos dice ahora que

$$dg(I-H_{t_o}, B_{R_o}, 0) = dg(I-H_{t_1}, B_{R_o}, 0). \tag{14}$$

Como $t_1 > \alpha(f_1)$, el problema periódico de Dirichlet $\{u \in E$ y $L[u] = g(\cdot,\cdot,u)+f_1+t_1\phi$ en $\Omega\times\mathbb{R}\}$ no tiene solución en virtud de (5), por consiguiente $(I-H_{t_1})(v) \neq 0$ para cualquier $v \in \hat{E}$, lo cual es equivalente a decir que:

$$dg(I-H_{t_1}, B_{R_o}, 0) = 0. \tag{15}$$

De (14) y (15) deducimos finalmente que $0 = dg(I-H_{t_1}, B_{R_o}, 0)$ $= dg(I-H_{t_o}, B_{R_o}, 0)$. ▲

REFERENCIAS

[1] Ambrosetti, A. and Prodi, G., *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach Space.* Ann. Math. Pure Appl. 93 (1972), 231-247.

[2] Amann, H. and Hess, P., *A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems.* Proc. Royal Soc. Edinburgh 84A (1979), 145-151.

[3] Avner Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type,* Prentice Hall, Inc., Englewood, Cliffs, N.J., 1964.

[4] Dancer, E.N., *On the ranges of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations,* J.Math. Pure . et Appl. 57 (1978), 351.366.

[5] Kazdan, J.L. and Warner, F.W., *Remars on some Quasilinear Elliptic Quations, Comm.* Pure and Appl. Math. XXVIII (1975), 567-597.

[6] Lazer, A., *Some remarks on periodic solutions of parabolic Differential Equations,* En Dynamical Systems II. Edited by A.R. Bednarek, L. Cesari, Academic Press (1980), 228-246.

[7] N.G. Lloyd, *Degree Theory,* Cambridge University Press, 1978.

[8] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov and N.N. Uralceva, *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type,* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968 (Translated from the Russian by S. Smith).

[9] Berger, M.S. and Podolak, E., *On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem,* Indiana Univ. Math. J., 24 (1975) 837-846,

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
CALI, Valle, Colombia

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
BOGOTA. D.E. Colombia.

(Recibido en marzo de 1984; versión revisada en marzo 1985).