*Revista Colombiana de Matemáticas*
*Vol. XIX (1985), págs. 277-296*

# EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS

Myriam Muñoz de Özak

**ABSTRACT**. In classic theorems, when we have a stochastic differential equation of the form $dX_t = f(t,X_t)dt + G(t,X_t)dW_t$, $X_{t_o} = \xi$, $t_o \leq t \leq T < \infty$, where $W_t$ is a Wiener Process and $\xi$ is a random variable independent of $W_t - W_{t_o}$ for $t \geq t_o$, in order to have existence and uniqueness of solutions it is supposed the existence of a constant K such that: (Lipschitz condition) for all $t \in [t_o,T]$, $x,y \in \mathbb{R}^d$,

$$|f(t,x)-f(t,y)| + |G(t,x)-G(t,y)| \leq K|x-y|.$$

And for all $t \in |t_o,T|$ and $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|f(t,x)|^2+|G(t,x)|^2 \leq K^2(1+|x|^2).$$

In this article we prove an existence theorem under weaker hypothesis: we require only that f and G be continuous in the second variable and the existence of a function $m \in L^2[t_o,T]$ such that

$$|f(t,x)|+|G(t,x)| \leq m(t)$$

for all $t \in [t_o,T]$ and $x \in \mathbb{R}^d$.

**Introducción**. Clásicamente cuando se tiene una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dX_t = f(t,X_t)dt + G(t,X_t)dW_t, \quad X_{t_o} = \xi, \; t_o \leqslant t \leqslant T < \infty,$$

donde $W_t$ es un proceso de Wiener y $\xi$ una variable aleatoria independiente de $W_t - W_{t_o}$ para $t \geqslant t_o$, en orden a demostrar la existencia y unicidad de soluciones se supone la existencia de una constante K tal que: a) (Condición de Lipschitz) para toda $t \in [t_o,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$,

$$|f(t,x)-f(t,y)| + |G(t,x)-G(t,y)| \leqslant K|x-y|.$$

b) Para toda $t \in [t_o,T]$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x)|^2 + |G(t,x)|^2 \leqslant K^2(1+|x|^2).$$

Véase, por ejemplo Arnold [1]. En este artículo probamos un teorema de existencia debilitando las hipótesis: sólo necesitamos que f y G sean continuas en la segunda variable y exista una función $m \in L^2[t_o,T]$ tal que

$$|f(t,x)| + |G(t,x)| \leqslant m(t), \quad \forall t \in [t_o,T], \; \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Aunque estas hipótesis son más débiles en el sentido de que no se pone límite al crecimiento de f y G respecto a la variable t, son más fuertes en el sentido de que limitan el crecimiento de las funciones respecto a la variable x, excluyendo por ejemplo las funciones lineales en x.

En la literatura existen teoremas similares, por ejemplo Teorema 5.2 en [H.J. Keisler, *An infinitesimal approach to stochastic analysis*, Memoirs of the A.M.S., 1984], demostrado por métodos no estándar para un espacio $\underline{\Omega} = (\Omega,P,A_t)_{t \in [0,1]}$, en donde $\Omega$ es un espacio de muestreo hiperfinito, P es la probabilidad de Loeb y $A_t$ una filtración arbitraria.

La existencia de solución en nuestro artículo, en cambio, depende fuertemente de la filtración específica que se toma en el teorema, es decir la generada por el proceso de Wiener con respecto al cual se integra.

Aparentemente, de los resultados de Barlow en [*One diemsional stochastic differential equations with no strong solution*, Proc. London Math. Society, 1981], si se toma una filtración arbitraria, puede fallar el teorema de existencia.

El esquema de aproximación que usaremos en la demostración del teorema principal es distinto del esquema usual de aproximaciones sucesivas, en el que $X_t^{(n+1)}$ se define en términos de $X_t^{(n)}$, debido a que no se tiene la condición de Lipschitz sino la continuidad, y es posible que estas aproximaciones no converjan a una solución. Además, en el teorema principal sólo se obtiene la existencia, pero no la unicidad, nuevamente porque no se supone una condición de Lipschitz. Como las ecuaciones diferenciales ordinarias son un caso particular de las estocásticas, podemos considerar el siguiente ejemplo, en el cual no se tiene unicidad:

$$dx = f(t,x)dt = x^{1/3}dt, \quad x(0) = 0.$$

Considerando las aproximaciones como en nuestro teorema, obtenemos que $x^{(j)}(t) = 0$ para cualquier $j = 1,2,\ldots$, o sea que obtenemos una solución $x(t) = 0$, pero existe otra solución, $x(t) = (2t/3)^{3/2}$.

**§1. <u>Notación y conceptos básicos</u>.** Tomaremos las definiciones de los conceptos básicos y la nomenclatura del libro de Arnold [1].

Por $(\Omega,\mathcal{U},P)$ denotaremos un espacio de probabilidad. Se dice que una proposición D se cumple con *probabilidad 1*, si $D(w)$ se cumple para toda $w\in\Omega$ excepto en un conjunto de probabilidad cero. D se cumple *estocásticamente* si para todo $\varepsilon>0$ existe $A\in\mathcal{U}$ tal que $P(A)<\varepsilon$ y $D(w)$ se cumple para todo $w\in\Omega$ tal que $w\notin A$. A lo largo de este trabajo, las letras mayúsculas $X$, $X_n$, $Y$ denotarán variables aleatorias. $X_A$ denotará la función característica de A. $L^p(\Omega,\mathcal{U},P)=L^p(P)$ al espacio vectorial normado formado por las clases de equivalencia de variables aleatorias X que coinciden con probabilidad 1 y tales que $E|X|^p<\infty$, $p\geqslant 1$. $L^2[t_o,T]$ será la colección de todas las funciones medibles f tales que $\int_{t_o}^{T}|f(s,x)|^2 ds<\infty$. Las letras manuscritas, $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{W}$ denotarán σ-álgebras. $\mathcal{U}(X)$ denotará a la σ-álgebra generada por X. $\mathcal{U}(X_u;t_o\leqslant u\leqslant t)$ será la σ-álgebra generada por las variables aleatorias $X_u$, con $t_o\leqslant u\leqslant t$. $\{X_t\}_{t\in[t_o,T]}$, o en ocasiones simplemente $X_t$, denotará un proceso estocástico definido en $(\Omega,\mathcal{U},P)$ con valores en $\mathbb{R}^d$ $(d\geqslant 1)$ y $\{X_t,\mathcal{F}_t\}_{t\in[t_o,T]}$ denotará a una martingala. $\{W_t\}_{t\in[t_o,T]}$, o simplemente $W_t$, denotará a un proceso de Wiener. $\text{ac-}\lim_{n\to\infty} X_n=X$ denotará a la convergencia con probabilidad 1 de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hacia X. $\text{st-}\lim_{n\to\infty} X_n=X$ denotará a la convergencia estocástica o en probabilidad $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hacia X.

**§2. Integral estocástica.** Para simplificar la lectura del trabajo daremos la definición detallada de integral estocástica, siguiendo Arnold [1], y citaremos algunos resultados de [1], y de Doob [4], para posterior uso.

Se considera un proceso de Wiener m-dimensional $W_t$, definido en $(\Omega,\mathcal{U},P)$. Sean $t_o$ un real fijo y no negativo, $\mathcal{W}_t = \mathcal{U}(W_u;t_o \leq u \leq t)$ y $\mathcal{W}_t^+ = \mathcal{U}(W_s-W_t,\ t \leq s < \infty)$. Como $W_t$ tiene incrementos $W_s-W_t$ independientes, entonces $\mathcal{W}_t$ y $\mathcal{W}_t^+$ son independientes.

**DEFINICION 2.1.** (Arnold, Def.4.3.2, pág.63). Sea $t_o$ no negativo y fijo; una familia $\{\mathcal{F}_t\}_{t>t_o}$ de subsigma-álgebras de $\mathcal{U}$ se dice *no anticipante* respecto del proceso de Wiener m-dimensional $W_t$ si:

a) $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ $(t_o \leq s \leq t)$

b) $\mathcal{F}_t \supseteq \mathcal{W}_t$ $(t \geq t_o)$

c) $\mathcal{F}_t$ es independiente de $\mathcal{W}_t^+$ $(t \geq t_o)$.

**DEFINICION 2.2.** (Arnold, Def.4.3.4, pág.63). Una función $G(s,w)$ definida en $[t_o,T]\times\Omega$, con valores matriciales (dxm), medible en ambas variables, se dice *no anticipante* (respecto de la familia no anticipante $\{\mathcal{F}_s\}$) si para todo s fijo, $s \in [t_o,T]$, $G(s,w)$ es $\mathcal{F}_s$ medible. Si además las trayectorias $G(s,w) \in L^2[t_o,T]$, w fijo, con probabilidad 1, entonces a este tipo de funciones no anticipantes las agrupamos en el conjunto denotado con $M_2[t_o,T]$.

Para facilitar la escritura, cuando no haya lugar a confusiones, en algunos casos se omitirá la segunda variable, ya que los conceptos que se estudiarán ahora sólo dependerán de la primera variable.

**DEFINICION 2.3.** (Arnold 4.4, pág.64). Una función $G \in M_2[t_o,T]$ se dice *escalonada*, si existe una partición $t_o < t_1 < t_2 <\ldots< t_n = T$ del intervalo $[t_o,T]$ tal que $G(s) = G(t_{i-1})$, para todo $s \in [t_{i-1},t_i)$.

DEFINICION 2.4. (Arnold 4.4, pág.64). La *integral estocástica* para funciones escalonadas G respecto al proceso de Wiener $W_t$ la definimos como

$$\int_{t_o}^{t} GdW = \int_{t_o}^{t} G(s)dWs = \sum_{i=1}^{n} G(t_{i-1})(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}).$$

Para definir la integral estocástica de cualquier función en $M_2[t_o,T]$ se utilizará el hecho de que el conjunto de todas las funciones escalonadas en $M_2[t_o,t]$ es denso en $M_2[t_o,t]$ en el siguiente sentido: si $G \in M_2[t_o,t]$, existe una sucesión de funciones escalonadas $G_n \in M_2[t_o,t]$ tal que

$$\text{ac-lím}_{n\to\infty} \int_{t_o}^{t} |G(s)-G_n(s)|^2 ds = 0 .$$

Como la convergencia con probabilidad 1 implica la convergencia estocástica, se tiene, en resumen, que si $G \in M_2[t_o,t]$, existe entonces una sucesión de funciones escalonadas $G_n \in [t_o,t]$ tal que

$$\text{st-lím}_{n\to\infty} \int_{t_o}^{t} |G(s)-G_n(s)|^2 ds = 0.$$

Como ya se ha definido la integral para funciones escalonadas, se tiene $\int_{t_o}^{t} G_n(s)dW_s$ para todo n = 1,2,....

Además, es posible ver que el límite

$$\text{st-lím}_{n\to\infty} \int_{t_o}^{t} G_n(s)dW_s$$

existe y define una variable aleatoria, llamémosla I(G), la cual no depende de la escogencia de la sucesión $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de manera que la integral estocástica de G se define como

$$\int_{t_o}^{t} G(s)dW_s = \text{st-}\lim_{n\to\infty} \int_{t_o}^{t} G_n(s)dW_s,$$

donde $G_n$ es una sucesión de funciones en $M_2[t_o,t]$ tal que

$$\text{st-}\lim_{n} \int_{t_o}^{t} |G(s)-G_n(s)|^2 ds = 0 .$$

TEOREMA 2.5. (Arnold, Theorem 4.4.14, pág.73). *Sean* $G, G_1, G_2, G_n$, $n = 1,2,\ldots$ *funciones con valores matriciales* $(d\times m)$ *en* $M_2[t_o,t]$. *Si* $W_t$ *denota a un proceso de Wiener* m-*dimensional, entonces si*

$$\text{st-}\lim_{n\to\infty} \int_{t_o}^{t} |G(s)-G_n(s)|^2 ds = 0,$$

*para una sucesión* $\{G_n\}$ *de funciones no necesariamente escalonadas se tiene que*

$$\text{st-}\lim_{n\to\infty} \int_{t_o}^{t} G_n dW = \int_{t_o}^{t} GdW.$$

COROLARIO 2.6. (Arnold, Corollary 4.5.5, pág.77). *Si* $\int_{t_o}^{t} E|G(s)|^2 ds < \infty$, *donde* $G \in M_2[t_o,t]$, *entonces para todo* $c > 0$

$$P\left[\left|\int_{t_o}^{t} GdW\right| > c\right] \leqslant \int_{t_o}^{t} E|G(s)|^2 ds/c^2.$$

Si $G \in M_2[t_o,T]$ y $A \in \mathcal{B}$ ($\sigma$-álgebra generada por los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$), entonces $A \subseteq [t_o,T]$ y $G\chi_A \in M[t_o,T]$. Si se ha definido $\int_{t_o}^{T} GdW$, entonces $\int_A GdW = \int_{t_o}^{T} G\chi_A dW$. Si

$t \in [t_o,T]$, se define

$$X_t(w) = \int_{t_o}^{t} G(s,w)dW_s(w) = \int_{t_o}^{T} G(s)\chi_{[0,t]}dWs.$$

$\{X_t\}_{t \in [t_o,T]}$ es un proceso estocástico con valores en $\mathbb{R}^d$, definido en forma única, salvo equivalencia estocástica

$X_{t_o} = 0$ con probabilidad 1

$$X_t - X_s = \int_{s}^{t} G(u)dW_u, \quad t_o \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

TEOREMA 2.7. *Si* $X_t$ *y* $Y_t$ *son martingalas respecto a la misma familia de subsigma-álgebras, entonces* $AX_t + BY_t$ *(donde* A *y* B *son matrices fijas,* pxd, $p \geqslant 1$*) es una martingala. En particular,* $X_t - X_a$ *es una martingala si* a *es un real fijo,* $t \geqslant a$.

TEOREMA 2.8. (Doob [4]). *Si* $X_t$ *es una martingala y* $X_t \in L^p(P)$, *entonces* $|X_t|^p$ *es una submartingala y se cumplen las siguientes desigualdades:*

a) $P[\sup_{t\in[a,b]} |X_t| \geqslant c] \leqslant E|X_b|^p/c^p, \ \forall c > 0, \ p \geqslant 1$ (2.2.3)

b) $E[\sup_{t\in[a,b]} |X_t|^p] \leqslant (p/(p-1))^p E|X_b|^p, \quad p > 1.$ (2.2.4)

TEOREMA 2.9. (Arnold, Theorem 5.11 (a)-(c),pag.81) *Sean* $G \in M_2[t_o,T]$ *y* $\{F_t\}_{t\in[t_o,T]}$, *una familia no anticipante de subsigma-álgebras. Si*

$$X_t = \int_{t_o}^{t} G(s)dW_s, \quad t_o \leqslant t \leqslant T$$

*entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a) $X_t$ *es* $F_t$*-medible, o sea, no anticipante.*

b) *Si* $\int_{t_o}^{t} E|G(s)|^2 ds < \infty$, $\forall t \leqslant T$, *entonces* $\{X_t, F_t\}_{[t_o,T]}$ *es una martingala con valores en* $\mathbb{R}^d$; *además para* $t,s \in [t_o,T]$ *se tiene:*

i) $EX_t = 0$

ii) $EX_t X_s' = \int_{t_o}^{\min(t,s)} EG(u)G(u)' du$;

*en particular,*

$$E|X_t|^2 = \int_{t_o}^{t} E|G(u)|^2 du \tag{2.2.6}$$

iii) $\forall c > 0$, $t_o \leqslant a \leqslant b \leqslant T$,

$$P\left[\sup_{a \leqslant t \leqslant b} |X_t - X_a| \geqslant c\right] \leqslant \int_a^b E|G(s)|^2 ds / c^2 \tag{2.2.7}$$

c) $X_t$ *tiene trayectorias continuas con probabilidad 1.*

## §3. Ecuación diferencial estocástica y existencia de soluciones

**de soluciones**. Se consideran dos funciones, f con valores en $\mathbb{R}^d$ y G con valores matriciales (dxm), ambas definidas en $[t_o,T]\times\mathbb{R}^d$; $f(t,x)$ y $G(t,x)$ son independientes de $w \in \Omega$, este valor aparece solo cuando se considera $f(t,X_t(w))$ y $G(t,X_t(w))$; ambas funciones se suponen medibles en las dos variables. Sea $W_t$ un proceso de Wiener m-dimensional. Consideramos una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dW_t = f(t,X_t)dt + G(t,X_t)dW_t, \quad X_{t_o} = \xi, \quad t_o \leqslant t \leqslant T < \infty \tag{3.1}$$

o su forma integral

$$W_t = \xi + \int_{t_o}^{t} f(s,X_s)ds + \int_{t_o}^{t} G(s,X_s)dW_s, \quad t_o \leqslant t \leqslant T < \infty \tag{3.2}$$

Sabemos por el Teorema 2.9 (a) que, en caso de existir, $X_t$ es un proceso estocástico $\mathcal{F}_t$-medible; $X_{t_o} = \xi$ es una variable aleatoria que debe ser independiente de los procesos $W_t - W_{t_o}$, $t \geq t_o$; por tanto, a partir de este momento se toma $\mathcal{F}_t = \mathcal{U}(\xi, W_s, s \leq t)$ que debe ser independiente de $\mathcal{W}_t^+ = \mathcal{U}(W_s - W_t, s \geq t)$.

DEFINICION 3.3. (Arnold, Def.6.1.3,pág.101). Una ecuación de la forma (3.1) se llama *Ecuación Diferencial Estocástica* (de Ito). La variable aleatoria $\xi$ se llama el *valor inicial* en el momento $t_o$. El proceso estocástico $X_t$ se llama una *solución de la ecuación* (3.1) o (3.2) en el intervalo $[t_o, T]$ si satisface las propiedades siguientes:

a) $X_t$ es $\mathcal{F}_t$-medible o sea no anticipante para $t \in [t_o, T]$.

b) Las funciones $\bar{f}(t,w) = f(t, X_t(w))$ y $\bar{G}(t,w) = G(t, X_t(w))$ (no anticipantes) cumplen con probabilidad 1:

$$\int_{t_o}^{T} |\bar{f}(s,w)|ds < \infty \quad y \quad \int_{t_o}^{T} |\bar{G}(s,w)|^2 ds < \infty$$

c) La ecuación (3.2) se cumple para todo $t \in [t_o, T]$ con probabilidad 1.

Si G = 0 la influencia estocástica de la ecuación está dada por $\xi$.

TEOREMA 3.4. *Dada la ecuación diferencial estocástica*

$$dW_t = f(t, X_t) + G(t, X_t)dW_t, \quad X_{t_o} = \xi, \quad t_o \leq t \leq T < \infty,$$

*donde* $W_t$ *es un proceso de Wiener m-dimensional y* $\xi$ *una variable aleatoria independiente de* $W_t - W_{t_o}$ *para* $t \geq t_o$, *si las funciones* f, *con valores en* $\mathbb{R}^d$, *y* G *con valores matriciales* $(d\times m)$, *ambas definidas y medibles en* $[t_o,T]\times\mathbb{R}^d$ *son tales que* $f(t,\cdot)$ *y* $G(t,\cdot)$ *son continuas para cada* $t\in[t_o,T]$, *y satisfacen:*

$$|f(t,x)|+|G(t,x)| \leq m(t),\ \forall t\in[t_o,T],\ \forall x\in\mathbb{R}^d,\ m\in L^2[t_o,T] \tag{4.1.1}$$

*entonces la ecuación tiene en* $[t_o,T]$ *una solución* $X_t$, *con valores en* $\mathbb{R}^d$ *y definida en* $\Omega$, *continua para* $t\in[t_o,T]$ *con probabilidad 1, que satisface la condición inicial* $X_{t_o} = \xi$.

*Demostración.* La demostración se hará en dos etapas (c.f. Arnold [1]). Supongamos primero que $E|\xi|^2 < K_1 < \infty$. Como $m\in L^2[t_o,T]$, definimos una función auxiliar $M(t)$ así:

$$M(t) = 0,\ \text{si } t = t_o .$$

$$M(t) = \int_{t_o}^{t} m^2(s)ds,\quad t_o < t \leq T.$$

Por su definición, M es una función continua, no decreciente y $M(t_o) = 0$. Definimos ahora las aproximaciones $X_t^{(j)}$ de $X_t$, $j = 1,2,\ldots$; para facilitar la escritura, escribimos $h = T-t_o$ y para cada $w\in\Omega$ definimos:

$$X_t^{(j)}(w) = \xi(w),\ \text{si } t_o \leq t < t_o+h/j$$

$$X_t^{(j)}(w) = \xi(w)+\int_{t_o}^{t-h/j} f(s,X_s^{(j)}(w))ds + \int_{t_o}^{t-h/j} G(s,X_s^{(j)}(w))dW_s(w)\ \text{si } t\in[t_o+h/j,T]$$

Es claro que $X_t^{(j)}$ está bien definida, pues si $t_o+h/j \leqslant t \leqslant t_o+2h/j$ entonces

$$X_t^{(j)} = \xi + \int_{t_o}^{t-h/j} f(s,\xi)ds + \int_{t_o}^{t-h/j} G(s,\xi)dW_s ,$$

en segundo lugar, si $t_o+2h/j \leqslant t \leqslant t_o+3h/j$, al considerar las integrales, en $f(s,\cdot)$ y $G(s,\cdot)$ sólo se substituyen valores ya definidos de $X_s^{(j)}$, para s en el intervalo $[t_o,t_o+2h/j]$; ésta consideración se puede hacer j veces hasta que t recorra todo el intervalo $[t_o,T]$. Como

$$|f(s,x)| + |G(s,x)| \leqslant m(s) \quad y \quad \int_{t_o}^{T} m^2(s)ds < \infty,$$

entonces

$$\int_{t_o}^{t} |f(s,w)|ds \leqslant \left[(T-t_o)(\int_{t_o}^{t} |f(s,w)|^2 ds)\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

y

$$\int_{t_o}^{t} |G(s,w)|^2 ds \leqslant \int_{t_o}^{t} m^2(s)ds < \infty$$

De modo que $f \in L^1[t_o,T]$ y $G \in M_2[t_o,T]$ y por el Teorema 2.9 (c) los $X_t^{(j)}$ son procesos estocásticos con trayectorias continuas con probabilidad 1, para $j = 1,2,\ldots$ y $t \in [t_o,T]$. Por la parte (a) del mismo teorema los $X_t^{(j)}$ son además no anticipantes y por la parte (b) son martingalas respecto de la familia $\{F_t\}_{t\in[t_o,T]}$, $F_t = \mathcal{U}(\xi,W_s,s \leqslant t)$. Además en $[t_o,T]$ se obtienen las siguientes acotaciones:

$$E|X_t^{(j)}|^2 = E|\xi|^2 < K_1 < \infty, \quad si \ t_o \leqslant t < t_o+h/j$$

Si $t_o+h/j \leqslant t \leqslant T$, como $|x+y+z|^2 \leqslant 3|x|^2 + 3|y|^2 + 3|z|^2$, entonces

$$E|X_t^{(j)}|^2 = E|\xi + \int_{t_o}^{t-h/j} f(s,X_s^{(j)})ds + \int_{t_o}^{t-h/j} G(s,X_s^{(j)})dW_s|^2$$

$$\leqslant 3E|\xi|^2 + 3E|\int_{t_o}^{t-h/j} f(s,X_s^{(j)})ds|^2 + 3E|\int_{t_o}^{t-h/j} G(s,X_s^{(j)})dW_s|^2$$

$$\leqslant 3K_1 + 3(t-h/j-t_o)\int_{t_o}^{t-h/j} E|f(s,X_s^{(j)})|^2 ds + 3\int_{t_o}^{t-h/j} E|G(s,X_s^{(j)})|^2 ds$$

$$\leqslant 3K_1 + 3(T-t_o)\int_{t_o}^{t-h/j} Em^2(s)ds + 3\int_{t_o}^{t-h/j} Em^2(s)ds$$

$$= 3(K_1+(T-t_o+1)M(t-h/j)),$$

usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el Teorema 2.9 (b,ii). Como M es una función continua en $[t_o,T]$, es uniformemente continua y acotada; luego existe una constante $K_2 > 0$ tal que $M(s) \leqslant K_2$ para todo $s \in [t_o,T]$. Sea $K_3 = 3(K_1+(T-t_o+1)K_2)$, entonces

$$E|X_t^{(j)}|^2 \leqslant K_3, \quad j=1,2,\ldots, \quad t \in [t_o,T] \qquad (3.4.1)$$

Por el Teorema 2.8, para $p = 2$ se tiene la desigualdad

$$E\Big[\sup_{t\in[t_o,T]} |X_t^{(j)}|^2\Big] \leqslant 4E|X_T^{(j)}|^2 \leqslant 4K_3, \quad j=1,2,\ldots \qquad (3.4.2)$$

Sea ahora $Z_j = \sup_{t\in[t_o,T]} |X_t^{(j)}|^2$, la cual es una variable aleatoria con esperanza finita acotada por $4K_3$, $j=1,2,\ldots,$ y consideramos la variable aleatoria $U_n = \max_{j\leqslant n} Z_j$, entonces $E(U_n) \leqslant 4K_3$, $n=1,2,\ldots$; además $E(U_n)$ es una sucesión creciente y acotada de números reales, por lo tanto es convergente. Observamos que $U_n$ es a su vez una sucesión creciente de variables aleatorias que converge a $\sup_j Z_j$; por tanto,

$$E(\sup_j Z_j) = E(\lim_{n\to\infty} U_n) = \lim_{n\to\infty} E(U_n) \leqslant 4K_3,$$

y por la desigualdad de Chebyshev, para todo $c > 0$ obtenemos

$$P[\sup_j Z_j \geqslant c] \leqslant E(\sup_j Z_j)/c \leqslant 4K_3/c;$$

en resumen,

$$P[\sup_j \sup_{t\in[t_o,T]} |X_t^{(j)}|^2 \geqslant c] \leqslant 4K_3/c.$$

Sea

$$A_n = \{w : \sup_j \sup_{t\in[t_o,T]} |X_t^{(j)}|^2(w) \geqslant n^2\},$$

entonces $P(A_n) \leqslant 4K_3/n^2$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, tenemos $P(\lim\sup A_n) = 0$ por el lema de Borel-Cantelli. Sea $A = \lim\sup_n A_n$. Si $w \notin A$, entonces $w \in A_n$ para un número finito de valores de n solamente digamos $n_1, n_2, \ldots, n_k$, sea $K(w) = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} + 1$, de modo que $w \notin A_n$ para todo $n \geqslant K(w)$: entonces para este w

$$\sup_j \sup_{t\in[t_o,T]} |X_t^{(j)}|^2(w) \leqslant K(w)^2,$$

es decir,

$$|X_t^{(j)}(w)| \leqslant K(w), \quad j = 1,2,\ldots, \quad t \in [t_o,T]; \qquad (3.4.3)$$

por consiguiente, para todo $w \notin A$, $\{X_t^{(j)}(w)\}$ es uniformemente acotada.

Ahora demostraremos que el proceso $\{X_t^{(j)}\}_j$ es equicontinuo, con probabilidad 1; esto es, existe un conjunto B con $P(B) = 0$ tal que si $w \notin B$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que depende de $\varepsilon$ y de w, tal que si $|t_1 - t_2| < \delta$, $t_1, t_2 \in [t_o, T]$, entonces

$$|X_{t_1}^{(j)}(w) - X_{t_2}^{(j)}(w)| < \varepsilon, \quad j = 1,2,\ldots$$

Consideraremos tres casos:

a) Si $t_1, t_2 \in [t_o, t_o + h/j)$, entonces $|X_{t_1}^{(j)}(w) - X_{t_2}^{(j)}(w)| = 0$, $j = 1,2,\ldots$

b) Si $t_1, t_2 \in [t_o + h/j, T]$ entonces, suponiendo $t_1 < t_2$ se tiene

$$E|X_{t_1}^{(j)} - X_{t_2}^{(j)}|^2 = E\left|\int_{t_1-h/j}^{t_2-h/j} f(s, X_s^{(j)})ds + \int_{t_1-h/j}^{t_2-h/j} G(s, X_s^{(j)})dW_s\right|^2$$

$$\leqslant 2(t_2 - t_1)\int_{t_1-h/j}^{t_2-h/j} E|f(s, X^{(j)})|^2 ds + 2\int_{t_1-h/j}^{t_2-h/j} E|G(s, X_s^{(j)})|^2 ds$$

$$\leqslant 2(T - t_o)\int_{t_1-h/j}^{t_2-h/j} Em^2(s)ds + 2\int_{t_1-h/j}^{t_2-h/j} Em^2(s)ds$$

$$= 2(T - t_o + 1)(M(t_2 - h/j) - M(t_1 - h/j)).$$

c) Si $t_1 \in [t_o, t_o + h/j)$ y $t_2 \in [t_o + h/j, T]$, se reduce simplemente al caso (b) ya que la función $X_t^{(j)}$ es constante respecto a t en $[t_o, t_o + h/j]$, o sea que $X_{t_1}^{(j)}$ se comporta como $X_{t_o+h/j}^{(j)}$.

Como M es uniformemente continua, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, que depende sólo de $\varepsilon$, tal que si $[t_1 - t_2] < \varepsilon$ con $t_1, t_2 \in [t_o, T]$:

$$|M(t_2-h/j) - M(t_1-h/j)| < \varepsilon, \quad j = 1,2,\ldots$$

Así que resumiento los tres casos, se tiene:

$\forall\varepsilon > 0$ existe $\delta$, que depende de $\varepsilon$, tal que si $t_1,t_2 \in [t_o,T]$ y $[t_1-t_2] \leqslant \delta$ entonces

$$E|X_{t_1}^{(j)}-X_{t_2}^{(j)}|^2 \leqslant 2(T-t_o+1)(M(t_2-h/j)-M(t_1-h/j))$$

$$< 2(T-t_o+1)\varepsilon \tag{3.4.4}$$

y esto para todo $j = 1,2,\ldots$

Sea $t \in [t_o,T]$ fijo, sea $\delta > 0$ y $t \in [t_o,T-\delta]$; por el Teorema 2.7, $\{X_{t+u}^{(j)} - X_t^{(j)}, F_{t+u}\}_{u\in[0,\delta]}$ es una martingala y por el teorema 2.8 (b), para $p = 2$ se tiene entonces:

$$E|\sup_{0\leqslant u\leqslant\delta} |X_{t+u}^{(j)} - X_t^{(j)}|^2 \leqslant 4E|X_{t+\delta}^{(j)} - X_t^{(j)}|^2$$

$$< 8(T-t_o+1)\varepsilon \tag{3.4.5}$$

cuando $\delta$ es el de (3.4.4). Sea

$$Y_t^{(j)} = \sup_{0\leqslant u\leqslant\delta} |X_{t+u}^{(j)}-X_t^{(j)}|^2, \quad t \in [t_o,T-\delta], \quad j=1,2,\ldots$$

Como los racionales de $[t_o,T-\delta]$ son densos en $[t_o,T-\delta]$, por el Teorema 2.2, capítulo II, en [4], para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una partición de $[t_o,T-\delta]$, de números racionales $t_o \leqslant s_o^{(n)} \leqslant s_1^{(n)} \leqslant\ldots\leqslant s_{a_n}^{(n)} \leqslant T-\delta$, tal que

$$\sup_{t_o\leqslant t\leqslant T-\delta} T_t^{(j)} \leqslant \liminf_n \max_{k\leqslant a_n} Y_{s_k^{(n)}}^{(j)}, \quad j = 1,2,\ldots.$$

Por (3.4.5)

$$\lim_n \inf E(\max_{k\leqslant a_n} Y^{(j)}_{s_k^{(n)}}) < 8(T-t_o+1)\varepsilon, \quad j = 1,2,\ldots$$

Entonces

$$E(\sup_{t_o\leqslant t\leqslant T-\delta} Y_t^{(j)}) < E(\lim_n \inf \max_{k\leqslant a_n} Y^{(j)}_{s_k^{(n)}})$$

$$\leqslant \lim_n \inf E(\max_{k\leqslant a_n} Y^{(j)}_{s_k^{(n)}}) < 8(T-t_o+1)\varepsilon, \quad j=1,2,\ldots \qquad (3.4.6)$$

Sea ahora $Z_j = \sup_{t_o\leqslant t\leqslant T-\delta} Y_t^{(j)}$, $j = 1,2,\ldots$ Definimos $U_n = \max_{j\leqslant n} Z_j$; como hemos visto, ésta es una sucesión creciente de variables aleatorias que converge a $\sup_j Z_j$, además $E(\sup_j Z_j) < 8(T-t_o+1)$. Nuevamente por la desigualdad de Chebyshev, tenemos para todo $c > 0$:

$$P[\sup_j Z_j \geqslant c] \leqslant E(\sup_j Z_j)/c < 8(T-t_o+1)/c,$$

obteniendo para todo $\varepsilon > 0$ y $c > 0$:

$$P[\sup_j \sup_{t_o\leqslant t\leqslant T-\delta} \sup_{0\leqslant u\leqslant\delta} |X_{t+u}^{(j)}-X_t^{(j)}|^2 \geqslant c] < 8(T-t_o+1)\varepsilon/c, \quad (3.4.7)$$

con $\delta$ dependiente de $\varepsilon$ como en (3.4.4). Escogemos ahora valores $\varepsilon_n = 1/n^4$ y $c_n = 1/n^2$ para $\varepsilon$ y $c$ respectivamente, y consideramos los conjuntos:

$$B_n = \{w:\sup_j \sup_{t_o\leqslant t\leqslant T-\delta} \sup_{0\leqslant u\leqslant\delta} |X_{t+u}^{(j)}-X_t^{(j)}|^2(w) \geqslant 1/n^2\},$$

en donde $P(B_n) < 8(T-t_o+1)1/n^2$ por (3.4.7); aplicando nuevamente el lema de Borel-Cantelli, si $B = \lim_n \sup B_n$, vemos que $P(B) = 0$. Así mismo si $w \notin B$, entonces $w \in B_n$ para un número finito de valores de n solamente, digamos $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Si $N = \text{máx}\{n_1, n_2, \ldots, n_r\}+1$, entonces $w \notin B_n$, $n \geq N$; como $\varepsilon_n = 1/n^4$, existe un $\delta_n$, el cual depende de $\varepsilon_n$ y de w, pero no de j ni de t, tal que se cumple:

$$\sup_j \sup_{t_o \leq t \leq T-\delta_n} \sup_{0 \leq u \leq \delta_n} |X_{t+u}^{(j)} - X_t^{(j)}|^2 < 1/n^2$$

o, lo que el lo mismo, si $|t_1 - t_2| \leq \delta_n$ con $t_1, t_2 \in [t_o, T]$ entonces

$$|X_{t_2}^{(j)}(w) - X_{t_1}^{(j)}(w)| < 1/n, \quad j = 1,2,\ldots$$

De manera que para cada $w \notin B$, $\{X_t^{(j)}(w)\}_j$, es equicontinua en $[t_o, T]$. Considerando el conjunto $C = A \cup B$, para cada $w \notin C$, $\{X_t^{(j)}(w)\}_j$ es una familia de funciones de t uniformemente acotada (3.4.3) y equicontinua. Por el teorema de Arzèla-Ascoli existe una subsusecíon $\{X_t^{(j_k)}(w)\}$ que converge uniformemente en $[t_o, T]$ hacia una función $X_t(w)$, obteniendose así un proceso estocástico $\{X_t\}$, que es el límite uniforme de una subsucesión $\{X_t^{(j_k)}\}_k$ con probabilidad 1; por consiguiente, $X_t$ es no anticipante y de trayectoria continua con probabilidad 1, ya que los $X_t^{(j_k)}$ lo son.

Para que $X_t$ sea solución de la ecuación diferencial estocástica falta ver únicamente que $X_t$ cumple la propiedad (c) de la Definición 3.3. Como f y G son continuas respecto a la segunda variable $t \in [t_o, T]$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} f(t, X_t^{(j_k)}) = f(t, X_t) \quad y \quad \lim_{k\to\infty} G(t, X_t^{(j_k)}) = G(t, X_t)$$

con probabilidad 1. Como $|f(s,x)| < m(s)$ y $m \in L^2[t_o, T]$, f es integrable y por el teorema de la convergencia acotada se tiene:

$$\text{ac-lím}_{n\to\infty} \int_{t_o}^{t} f(s,X_s^{(j_k)})ds = \int_{t_o}^{t} f(s,X_s)ds.$$

Debido a que $G \in X_2[t_o,T]$, se tiene $G \in L^2[t_o,T]$ y como la convergencia de $X_t^{(j_k)}$ hacia $X_t$ es uniforme, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$; $\forall s \in [t_o,T]$ se tiene que $|G(s,X_s^{(j_n)}) - G(s,X_s)|^2 < \varepsilon$ con probabilidad 1; por consiguiente $\int_{t_o}^{t} |G(s,X_s^{(j_n)}) - G(s,X_s)|ds < (T-t_o)\varepsilon$ con probabilidad 1; es decir,

$$\text{ac-lím}_{n\to\infty} \int_{t_o}^{t} |G(s,X_s^{(j_n)}) - G(s,X_s)|^2 ds = 0,$$

y, por consiguiente,

$$\text{st-lím}_{n\to\infty} \int_{t_o}^{t} |G(s,X_s^{(j_n)}) - G(s,X_s)|^2 ds = 0;$$

finalmente, por el Teorema 2.5,

$$\text{st-lím}_{n\to\infty} \int_{t_o}^{t} G(s,X_s^{(j_n)})dW_s = \int_{t_o}^{t} G(s,X_s)dW_s,$$

obteniéndose así que $X_t$ es una solución de la ecuación diferencial estocástica planteada en el teorema.

Se demostrará ahora el caso general; es decir, el caso en que $\xi$ es una variable aleatoria cualquiera. Definimos

$$\xi_n = \begin{cases} \xi, \text{ si } |\xi| \leq n \\ 0 \text{ en todo lo demás.} \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe entonces una solución $X_t^{(n)}$ a la ecuación

$$X_t = \xi_n + \int_{t_o}^{t} f(s,X_s)ds + \int_{t_o}^{t} G(s,X_s)dW_s, \quad t_o \leq t \leq T,$$

fuera de un conjunto $C_n$ tal que $P(C_n) = 0$. Además como $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$, se tiene:

$$P[|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \neq 0] = P[|\xi_n - \xi_m| \neq 0] \to 0$$

cuando $m,n \to \infty$, sin depender de $t$. Existe entonces un proceso estocástico $X_t$, tal que $X_t^{(n)} \to X_t$ $(n \to \infty)$ uniformemente con probabilidad 1, ya que $P(\bigcup_n C_n) = 0$.

Resulta, pues, que $X_t$ es una solución de la ecuación diferencial estocástica, completando así la demostración del teorema.

## BIBLIOGRAFIA


[1] Arnold, L., *Stochastic Differential Equations. Theory and Applications*. John Wiley, 1974.

[2] Ash, R., *Real Analysis and Probability*. Academic Press, 1972.

[3] Coddington and Levison, *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, 1955.

[4] Doob, J.L., *Stochastic Processes*. Wiley, 1953.

[5] Loeve, *Probability Theory*. Van Nostrand, 1954.



*Departamento de Matemáticas y Estadística*
*Universidad Nacional de Colombia*
*Bogotá, D.E. Colombia*



(Recibido en marzo de 1985).