*Revista Colombiana de Matemáticas*
*Vol. XX (1986), págs. 1-26*

# EL RETICULO DE LAS LOGICAS DE PRIMER ORDEN CON CUANTIFICADORES CARDINALES*

por

Luis Jaime CORREDOR

**ABSTRACT.** Associate to every class S of cardinals a quantifier $Q^S$ so that $Q^S x\phi(x)$ holds just in case the number of individuals satisfying $\phi(x)$ is a cardinal belonging to S. This includes the well know cardinal quantifiers $Q_\alpha$. We give a simple combinatorial condition on the classes S and S' necessary and sufficient to have

$$L_{\omega\omega}(Q^S) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{S'}).$$

A similar result is shown for logics generated by families of such quantifiers. Some applications follow; for example, it is shown that if $n\omega$ denotes the set of multiples of the natural number n, then $L_{\omega\omega}(Q^{n\omega}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{m\omega})$ if and only if n divides m. Also, we construct infinite descending chains of logics.

---

* Este trabajo se basa en la tesis de Magister del autor, Universidad de los Andes, Bogotá, 1983, realizada bajo la dirección del Profesor X. Caicedo.

**INTRODUCCION.** Parte del trabajo desarrollado en lógica en los últimos años ha estado orientado al estudio de extensiones de la lógica de predicados de primer orden, $L_{\omega\omega}$. Existen dos tipos principales de extensiones que son: las infinitísticas las cuales se obtienen de $L_{\omega\omega}$ permitiendo conjunciones y disyunciones infinitas, y las lógicas que se obtienen al adjuntar a $L_{\omega\omega}$ nuevos cuantificadores, introducidos por primera vez por Mostowski en [M] y Lindström en [L1].

La familia de lógicas que consideraremos en el presente trabajo serán las extensiones de $L_{\omega\omega}$ que resultan al adjuntar a ésta un cierto tipo de cuantificadores monádicos (ésto es, que ligan sólamente una variable) los cuales denotaremos por $Q^S$, donde S es una subclase cualquiera de la clase de los cardinales. La semántica para $Q^S$ será la siguiente: Si $\mathfrak{A}$ es una estructura,

$$\mathfrak{A} \models Q^S x\phi(x) \text{ si y sólo si } \mathrm{Card}(\{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \phi[a]\}) \in S.$$

En la sección 1 precisamos las nociones fundamentales y hacemos algunas observaciones sobre las lógicas en consideración. En la sección 2 damos una condición puramente conjuntista y aritmética entre las clases S, que nos permite determinar cómo se relacionan las lógicas correspondientes, $L_{\omega\omega}(Q^S)$, con respecto a su poder expresivo. Finalmente en la sección 3 damos algunas aplicaciones concretas de esta caracterización. Probamos, por ejemplo, que si $n\omega$ denota el conjunto de los múltiplos de n, entonces para n y m naturales, $m \neq 0$, se tiene $L_{\omega\omega}(Q^{n\omega}) \leq L_{\omega\omega}(Q^{m\omega})$ si y sólo si n divide a m. Mostramos además la existencia de cadenas descendentes infinitas de lógicas, con respecto a su poder expresivo.

Agradecemos al Profesor Xavier Caicedo por sus valiosas sugerencias y ayuda durante la preparación y revisión de este trabajo.

## §1. NOCIONES PRELIMINARES.

**1.1. Definiciones.** Una lógica L consta esencialmente de una sintaxis y una semántica. La sintaxis es una familia de sentencias $L_\tau$, para cada tipo $\tau$ y la semántica, que usualmente se denota por $\models$, es una relación entre estructuras y sentencias del mismo tipo, la cual intuitivamente define la verdad. Ver la definición completa en [B1] o [F1]. Para cada tipo de estructura $\tau$ sea $Est_\tau$ la clase de las estructuras de tipo $\tau$.

DEFINICION 1.1.1. a) Si L es una lógica y $\phi \in L_\tau$ sea $Mod_{\tau,L}(\phi) := \{\mathfrak{A} \in Est_\tau | \mathfrak{A} \models \phi\}$.

b) Si L y L' son lógicas dadas, $\phi \in L_\tau$ y $\phi' \in L'_\tau$, decimos que $\phi$ .eq. $\phi'$ si $Mod_{\tau,L}(\phi) = Mod_{\tau,L'}(\phi')$.

c) L es una *sublógica* de L', o L' *extiende* a L, en símbolos $L \leqslant L'$, si para cada $\phi \in L_\tau$ existe $\phi' \in L'_\tau$ tal que $\phi$ .eq.$\phi'$. $L < L'$ si $L \leqslant L'$ pero $L' \nleqslant L$.

d) L es *equivalente* a L', en símbolos $L \equiv L'$, si $L \leqslant L'$ y $L' \leqslant L$.

e) Una clase de estructuras de tipo $\tau$, H, es *elemental* en L, si existe $\phi \in L_\tau$ tal que $H = Mod_{\tau,L}(\phi)$.

DEFINICION 1.1.2. Denotaremos por K la clase de los cardinales(1). Para cada subclase R de K×K, definimos $L_{\omega\omega}(Q^R)$ como la extensión de $L_{\omega\omega}$ que se obtiene al adjuntar a ésta el nuevo símbolo de cuantificador $Q^R$, el cual sintácticamente se trata como $\forall$ ó $\exists$, y cuyo significado es el

(1) Utilizaremos muy superficialmente una teoría de clases de clases.

siguiente: Para una estructura $\mathfrak{A}$, una fórmula $\phi(x,y_1,\ldots y_n)$ y elementos $a_1,\ldots,a_n$ de A:

$$\mathfrak{A} \models Q^R x\phi(x)[a_1,\ldots,a_n] \text{ si y sólo si } (\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) \in R,$$

donde

$$\boldsymbol{m} = \mathrm{Card}(\{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \phi[a,a_1,\ldots,a_n]\})$$

$$\boldsymbol{n} = \mathrm{Card}(\{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \neg\phi[a,a_1,\ldots,a_n]\}).$$

Decimos que $Q^R$ es el *cuantificador asociado* a R. Estos son, esencialmente, los cuantificadores generalizados definidos por Mostowski en [M]. Los cuantificadores $\exists$ y $\forall$, por ejemplo, son los asociados a las clases $(K-\{0\})\times K$ y $K\times\{0\}$, respectivamente, y los $Q_\alpha$, ampliamente estudiados (ver el capítulo 13 de [BS]), corresponden a los cuantificadores asociados a las clases $\{k \in K \mid k \geqslant \omega_\alpha\}\times K$, donde $\alpha$ es un ordinal.

1.2. **Las lógicas $L_{\omega\omega}(Q^S)$**. Los cuantificadores que consideraremos serán los asociados a las clases de la forma $S\times K$, donde S es una clase de cardinales. Los denotaremos simplemente por $Q^S$. Es claro que para una estructura $\mathfrak{A}$:
$\mathfrak{A} \models Q^S x\phi(x)$ si y sólo si el *conjunto de verdad* de $\phi(x)$ en $\mathfrak{A}$, $\{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \phi[a]\}$, tiene por cardinal un elemento de S. Por tal razón la llamaremos *cuantificadores cardinales*. Estos incluyen al cuantificador $\exists$ y a los $Q_\alpha$.

Denotaremos por $L_{\omega\omega}(Q^{S_i})_{i\in I}$ a la lógica que resulta de adjuntar a $L_{\omega\omega}$, la familia de cuantificadores $\{Q^{S_i} \mid i \in I\}$, donde los $S_i$ son subclases de K. La sintáxis y la semántica de $L_{\omega\omega}(Q^{S_i})_{i\in I}$ se definen de la manera obvia.

Para mostrar que $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{S})$, es suficiente encontrar para cada fórmula de la forma $Q^{S'}x\phi(x)$ de $L_{\omega\omega}(Q^{S'})_{\tau}$ una fórmula equivalente $\theta(\ldots,\phi,\ldots)$ en $L_{\omega\omega}(Q^{S},Q^{S'})_{\tau}$, en la cual $Q^{S'}$ ocurra sólo en la subfórmula $\phi$. Pues es claro que podemos suponer, por inducción en fórmulas, que $\phi$ eq. $\hat{\phi} \in L_{\omega\omega}(Q^{S})$, y así $Q^{S'}x\,\phi$ .eq. $\theta(\ldots\hat{\phi}\ldots) \in L_{\omega\omega}(Q^{S})$.

OBSERVACIONES. a) *Si* S *consta de finitos números naturales, esto es* $S = \{n_1,\ldots,n_k\} \subseteq \omega$, *entonces* $L_{\omega\omega} \equiv L_{\omega\omega}(Q^{S})$. En efecto, la fórmula $Q^{S}x\phi(x)$ de $L_{\omega\omega}(Q^{S})$, es definible en $L_{\omega\omega}$ por la fórmula $\exists^{=n_1}x\phi(x)\vee\ldots\vee\exists^{=n_k}x\phi(x)$, donde $\exists^{=n}x\phi(x)$ abrevia:

$$\exists x_1\ldots\exists x_n(\bigwedge_{i<j}(x_i \neq x_j)\wedge\bigwedge_{i=1}^{n}\phi(x_i)\wedge\forall x(\phi(x)\rightarrow\bigvee_{i=1}^{n}(x = x_i))).$$

b) *Si* S *es un subconjunto infinito del conjunto de números naturales* $\omega$, $L_{\omega\omega}(Q^{S})$ *es una extensión propia de* $L_{\omega\omega}$. En efecto, sea $\tau = \langle R\rangle$ el tipo que consiste de una única relación binaria R. Consideremos la clase de estructuras de tipo $\tau$, $H = \{(A,R) \mid (A,R) \cong (\omega,<)\}$, donde $\omega$ denota el conjunto de los naturales y $<$ el orden usual. Es bien conocido que, por compacidad, H no es elemental en $L_{\omega\omega}$; para ver que sí lo es en $L_{\omega\omega}(Q^{S})$ tomemos la conjunción $\phi$ de la sentencia de $L_{\omega\omega}$ que expresa que R es un orden total estricto con primero y sin último elemento, y la sentencia $\forall x\,\exists y\,(xRy \wedge Q^{S}z(zRy))$, que implica que todo segmento inicial de R es finito. Es claro que $H = \mathrm{Mod}_{\tau}(\phi)$ y por tanto H es elemental en $L_{\omega\omega}(Q^{S})$.

Como consecuencia de lo anterior también se obtiene que en este caso $L_{\omega\omega}(Q^{S})$ no satisface compacidad.

c) *Sean* S *y* S' *subclases arbitrarias de* K. *Si la diferencia simétrica* $S \Delta S'$ *es un conjunto finito de cardinales finitos, entonces* $L_{\omega\omega}(Q^S) \equiv L_{\omega\omega}(Q^{S'})$. En efecto, sea $S \setminus S' = \{n_1,\dots,n_k\}$ y $S' \setminus S = \{m_1,\dots,m_\ell\}$. Para ver que $L_{\omega\omega}(Q^S) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{S'})$ basta con notar que:

$$Q^S x\phi(x) \text{ .eq. } Q^{S'} x\phi(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{\ell} \neg \exists^{=m_i} x\, \phi(x) \wedge \bigvee_{i=1}^{k} \exists^{=n_i} x\, \phi(x).$$

La otra inclusión es semejante.

La condición anterior, sin embargo, no es necesaria. Denotemos por $2\omega$ y $2\omega+1$ los conjuntos de los pares y los impares, respectivamente. $2\omega \Delta 2\omega+1 = \omega$ es infinito pero $L_{\omega\omega}(Q^{2\omega}) \equiv L_{\omega\omega}(Q^{2\omega+1})$, pues

$$Q^{2\omega+1} x\phi(x) \text{ .eq. } \exists x(\phi(x) \wedge Q^{2\omega} y(\phi(y) \wedge y \neq x))$$

y

$$Q^{2\omega} x\phi(x) \text{ .eq. } \neg \exists x\phi(x) \vee \exists x(\phi(x) \wedge Q^{2\omega+1} y(\phi(y) \wedge y \neq x)) .$$

## §2. CARACTERIZACION DE LA RELACION $\leqslant$.

**2.1. <u>El caso de un solo cuantificador</u>.** En esta sección damos una condición puramente aritmética para S y S' que determina cuándo $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^S)$.

NOTACION 2.1.1. Si S es una subclase de K y $r \in \omega$, sea $S+r = \{a+r \mid a \in S\}$, donde si a es un cardinal infinito $a + r := a$. Si n es un número natural, denotamos con $\bar{n}$ el conjunto $\{r \in \omega \mid 0 \leqslant r < n\}$. $S^c$ denota el complemento de S con respecto a la clase de todos los cardinales K, y la diferencia entre clases la denotamos por $\setminus$.

DEFINICION 2.1.2. a) Para $r \in \omega$ definimos la relación $F_r^S$ en $K \setminus \bar{r}$ de la forma siguiente: si $a,b \in K \setminus \bar{r}$,

$$aF_r^S b \text{ si y sólo si: } (a-r) \in S \Leftrightarrow (b-r) \in S.$$

b) Para $n \in \omega$ definimos la relación $\bar{F}_n^S$ en $K \setminus \bar{n}$ por

$$a\bar{F}_n^S b \text{ si y sólo si: } \forall r\ (0 \leqslant r \leqslant n \rightarrow aF_r^S b).$$

Es claro que $F_r^S$ es una relación de equivalencia y sólo tiene dos clases de equivalencia en $K \setminus \bar{r}$ que son $S+r$ y $S^c+r$. Así mismo, $\bar{F}_n^S$ es también una relación de equivalencia; más aún, $\bar{F}_n^S = \bigcap_{r \leqslant n} F_r^S$ y por tanto el número de clases de equivalencia de esta relación en $K \setminus \bar{n}$ es a lo sumo $2^{n+1}$. Además, cada clase es de la forma $S_o^{f(o)} \cap \ldots \cap S_n^{f(n)}$, donde f es una función de $\overline{n+1}$ en $\{0,1\}$ y para $j = 0,\ldots,n$,

$$S_j^{f(j)} = \begin{cases} S+j & \text{si } f(j) = 1 \\ S^c+j & \text{si } f(j) = 0. \end{cases}$$

A continuación probamos que la condición de que $S' \setminus \bar{n}$ sea la unión de algunas de las clases de equivalencia de la relación $\bar{F}_n^S$ para algún n es necesaria y suficiente para que $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^S)$.

TEOREMA 2.1.1 (Suficiencia). *Si existe* $n \in \omega$ *tal que* $S' \setminus \bar{n}$ *es la unión de algunas de las clases de equivalencia de la relación* $\bar{F}_n^S$, *entonces* $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^S)$.

*Demostración.* Denotemos con $\dot{\cup}$ la unión disyunta y supongamos que $S'\smallsetminus\bar{n} = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_k$ donde cada $A_i$ para $1 \leq i \leq k$, es una clase de equivalencia de la relación $\bar{F}_n^S$. Entonces $A_i = S_o^{f_i(0)} \cap \cdots \cap S_n^{f_i(n)}$ donde $f_i$ es una función de $\overline{n+1}$ en $\{0,1\}$ y

$$S_j^{f_i(j)} = \begin{cases} S+j & \text{si } f_i(j) = 1 \\ S^c+j & \text{si } f_i(j) = 0. \end{cases}$$

Sea $\phi(x)$ una fórmula arbitraria en $L_{\omega\omega}(Q^{S'})$, de tipo $\tau$, entonces es fácil ver que $Q^{A_i}x\phi(x)$ es equivalente a:

$$[Q^S y\,\phi(y)]^{f_i(0)} \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} [\exists x_1,\ldots,x_j(\bigwedge_{p\neq m}(x_p \neq x_m) \wedge \bigwedge_{p=1}^{j}\phi(x_p) \wedge Q^S y(\phi(y)$$
$$\wedge \bigwedge_{p=1}^{j}(y \neq x_p))]^{f_i(j)} \wedge \bigwedge_{p=o}^{n-1} \neg \exists_x^{=p}\phi(x) \qquad (1)$$

donde para una fórmula $\psi$, $[\psi]^1 = \psi$ y $[\psi]^o = \neg\psi$. Pero $S' = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_k \dot{\cup} F$ donde $F = S' \cap \bar{n}$, entonces

$$Q^{S'}x\phi(x) \text{ .eq. } \bigvee_{i=1}^{k} Q^{A_i}x\phi(x) \vee \bigvee_{a\in F} \exists_x^{=a}\phi(x)$$

y por (1), esta última es equivalente a una fórmula en $L_{\omega\omega}(Q^S,Q^{S'})$, en la cual $Q^{S'}$ ocurre sólo en la subfórmula . Entonces $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leq L_{\omega\omega}(Q^S)$. Q.E.D.

Antes de mostrar que la condición es necesaria damos una definición y un par de lemas.

DEFINICION 2.1.3 Definimos en las fórmulas de $L_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J}$ una función qr, por inducción en su complejidad:

$qr(\phi) = 0$ si $\phi$ es atómica

$qr(\neg\phi) = qr(\phi)$

$qr(\phi \wedge \psi) = \max(qr(\phi), qr(\psi))$

$qr(\exists x\phi(x)) = qr(\forall x\phi(x)) = qr(Q^{S_i}x\phi(x)) = qr(\phi)+1$ .

$qr(\phi) \in \omega$, y se llama el *rango cuantificador* de $\phi$. Si $n \in \omega$, denotamos por $L^n_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J}$ las fórmulas de rango cuantificador menor que n.

Dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *elementalmente equivalentes hasta rango* n en $L_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J}$, en símbolos

$$\mathfrak{A} \underset{L_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J}}{\overset{n}{\equiv}} \mathfrak{B}$$

si satisfacen las mismas sentencias en $L^n_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J}$.

LEMA 2.1.2 *Sean* $n \in \mathbb{N}^+$, $\alpha$ *y* $\beta$ *cardinales mayores que* n *y* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *estructuras de tipo* $\tau$ *con universos* A *y* B *de cardinalidad* $\alpha$ *y* $\beta$, *respectivamente, en donde todas las relaciones se interpretan como* $\emptyset$, *entonces*

$$\alpha \overline{F}^S_n \beta \iff \mathfrak{A} \underset{L_{\omega\omega}(Q^S)}{\overset{n+2}{\equiv}} \mathfrak{B} .$$

*Demostración.* "$\Longrightarrow$" Probaremos por inducción en r, $0 \leq r \leq n+1$, que si $\phi(x_1,\ldots,x_k) \in L^{r+1}_{\omega\omega}(Q^S)$ con $0 \leq k \leq n+1-r$ y $\sigma$ y $\rho$ son k-tuplas en $A^k$ y $B^k$ respectivamente tales que $\sigma \sim \rho$ [i.e. la asignación $\sigma(i) \leadsto \rho(i)$ constituye una biyección], entonces

$$\mathfrak{A} \models \phi[\sigma] \iff \mathfrak{B} \models \phi[\rho] .$$

Tomando $r = n+1$, $k = 0$ y $\sigma$ y $\rho$ como la tupla $\emptyset$, se desprende de la afirmación

$$\mathfrak{A} \overset{n+2}{\underset{L_{\omega\omega}(Q^S)}{\equiv\equiv}} \mathfrak{B} .$$

Para $r = 0$, $0 \leqslant k \leqslant n+1$, y $\phi(x_1,\dots,x_k) \in L^{r+1}_{\omega\omega}(Q^S)$, $\varphi$ es una fórmula atómica y la afirmación es consecuencia trivial de $\sigma \sim \rho$. Supongamos la afirmación cierta para $r \leqslant n+1$, usamos inducción en fórmulas para probarla para $r+1$. Sea pues $\psi(x_1,\dots,x_k) \in L^{r+2}_{\omega\omega}(Q^S)$ con $0 \leqslant k \leqslant n+1-(r+1) = n-r$, $\sigma$ y $\rho$ k-tuplas en $A^k$ y $B^k$, respectivamente, tales que $\sigma \sim \rho$. Si $\psi$ es atómica la afirmación resulta trivialmente, lo mismo que si es de la forma $\neg\phi$ ó $\phi \wedge \phi'$ y la afirmación se supone para $\phi$ y $\phi'$. Los únicos casos interesantes son los siguientes:

**Caso I**. $\psi \equiv \exists x_{k+1}\, \phi(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})$.

Entonces $\phi \in L^{r+1}_{\omega\omega}(Q^S)$ y $0 \leqslant k+1 \leqslant n+1-r$. Si $\mathfrak{A} \models \psi[\sigma]$, debe existir $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi[\sigma,a]$. Pero $\beta \geqslant n+1 \geqslant n+1-r > k$, luego existe $b' \in B \setminus \bar{\rho}$, donde $\bar{\rho} := \{\rho(i) \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Sea:

$$b := \begin{cases} b' & \text{si } a \neq \sigma(i) \ \forall i = 1,\dots,k \\ \rho(j) & \text{si } a = \sigma(j) \end{cases}$$

entonces $\sigma a \sim \rho b$ y por hipótesis de inducción $\mathfrak{B} \models \phi[\rho,b]$, por tanto $\mathfrak{B} \models \psi[\rho]$. El converso se prueba en forma semejante.

**Caso II**. $\psi \equiv Q^S_{x_{k+1}}\phi(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})$.

Note de nuevo que $\phi \in L^{r+1}_{\omega\omega}(Q^S)$ y $0 \leqslant k+1 \leqslant n+1-r$. Para probar que $\mathfrak{A} \models \psi[\sigma] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[\rho]$ usaremos los siguientes tres hechos:

(A) *Si* $a,a' \in A \setminus \bar{\sigma}$ *entonces* $\mathfrak{A} \models \phi[\sigma,a] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[\sigma,a']$.

Para ver ésto, escoja $b \in B\setminus\bar{\rho}$, entonces $\sigma a \sim \rho b \sim \sigma a'$. Usando dos veces la hipótesis de inducción se obtiene la equivalencia deseada. Igualmente si $b, b' \in B\setminus\rho$, entonces: $\mathfrak{B} \models \phi[\rho,b] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[\rho,b']$.

(B) Existe $a \in A\setminus\bar{\sigma}$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi[\sigma,a]$ si y sólo si existe $b \in B\setminus\bar{\rho}$ tal que $\mathfrak{B} \models \phi[\rho,b]$.

(C) $\forall j = 1,\ldots,k.\quad \mathfrak{A} \models \phi[\sigma,\sigma(j)] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[\rho,\rho(j)]$.

Las dos últimas afirmaciones salen de la prueba del caso 1. Por (C) tenemos

$$|\{a \in \bar{\sigma} \mid \mathfrak{A} \models \phi[\sigma,a]\}| = |\{b \in \bar{\rho} \mid \mathfrak{B} \models \phi[\rho,b]\}|. \qquad (*)$$

Llamemos a este cardinal t. Si no existe $a \in A\setminus\bar{\sigma}$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi[\sigma,a]$, por (B) tampoco existe $b \in B\setminus\bar{\rho}$ tal que $\mathfrak{B} \models \phi[\rho,b]$ y estaríamos listos pues (*) implicaría que $\mathfrak{A} \models \psi[\sigma] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[\rho]$. Supongamos ahora que existe $a \in A\setminus\bar{\rho}$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi[\sigma,a]$, por (B) existe $b \in B\setminus\bar{\rho}$ tal que $\mathfrak{B} \models \phi[\rho,b]$ y por (A) tendríamos que

$$|\{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \phi[\sigma,a]\}| = (\alpha-k)+t = \alpha-(k-t),$$

$$|\{b \in B \mid \mathfrak{L} \models \phi[\rho,b]\}| = (\beta-k)+t = \beta-(k-t)$$

donde $k-t \leq k \leq n-r \leq n$. Pero $\alpha \bar{F}^S_n \beta$, luego $\alpha-(h-t) \in S \Leftrightarrow \beta-(k-t) \in S$ y por tanto $\mathfrak{A} \models \psi[\sigma] \Leftrightarrow \mathfrak{L} \models \psi[\rho]$

"$\Leftarrow$" Es fácil ver que las sentencias $\phi_o \equiv Q^S_x(x=x)$, $\phi_1 \equiv \exists x(Q^S_y(y \neq x)$ y $\phi_r \equiv \exists x_1,\ldots,x_r(\bigwedge_{i\neq j} x_i \neq x_j \wedge Q^S_y(\bigwedge_{i=1}^{r} y \neq x_i))$ $2 \leq r \leq n$ son de rango cuantificacional menor que $n+2$. Entonces $\forall r = 0,\ldots,n \quad \alpha \models \phi_r \Leftrightarrow \beta \models \phi_r$. Pero. $\gamma \models \phi_r \Leftrightarrow \gamma-r \in S$. Entonces $\forall r = 0,\ldots,n\ (\alpha-r \in S \Leftrightarrow \beta-r \in S)$, ésto es $\alpha \bar{F}^S_n \beta$. Q.E.D.

Modificando ligeramente la demostración anterior, obtenemos una para el siguiente lema.

LEMA 2.1.3. *Sean* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha$ *y* $\beta$ *cardinales mayores que* $n$, $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *estructuras como en el lema anterior, y* $\{S_j \mid j \in J\}$ *una familia de clases de cardinales, entonces:*

$$\forall j \in J(\alpha \bar{F}_n^{S_j} \beta) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \underset{L_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J}}{\overset{n+2}{\equiv}} \mathfrak{B}.$$

Otra manera de demostrar el Lema 2.1.2, consiste en probar que si $\alpha \bar{F}_n \beta$ entonces

$$(\mathfrak{A}, Q_A^S) \overset{<\bar{n},<>}{\frown} (\mathfrak{B}, Q_A^S)$$

en el sentido de [C2], es decir, existe entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ un sistema de "back-and-forth" con respecto al cuantificador $Q^S$, con parametros $<\bar{n},<>$. De los resultados de [C2] se desprende de inmediatamente que $\mathfrak{A} \underset{L_{\omega\omega}(Q^S)}{\overset{n}{\equiv}} \mathfrak{B}$. Consideraciones análogas valen para el Lema 2.1.3.

TEOREMA 2.1.4 (Necesidad). *Si* $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^S)$ *entonces existe* $n \in \omega$ *tal que* $S' \setminus \bar{n}$ *es unión de clases de equivalencia de la relación* $\bar{F}_n^S$.

*Demostración*. Demostramos la contrarrecíproca, ésto es, si

$$\forall n \in \omega\, \exists \alpha,\beta(\alpha,\beta \geqslant n \wedge \alpha \in S' \wedge \beta \notin S' \wedge \alpha \bar{F}_n^S \beta)$$

entonces $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \nleqslant L_{\omega\omega}(Q^S)$. Esto lo hacemos mostrando que la clase $H = \mathrm{Mod}_\tau(Q^{S'} x(x = x)) = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in \mathrm{Est}_\tau \text{ y } |A| \in S'\}$ no es elemental en $L_{\omega\omega}(Q^S)$, cualquiera que sea el tipo $\tau$. Sea $n \in \omega$ arbitrario, entonces por hipótesis existen $\alpha,\beta$

cardinales tales que $\alpha,\beta \geqslant n$, $\alpha \in S'$, $\beta \notin S'$ y $\alpha \bar{F}_n^S \beta$. Sean $\mathcal{A}_n$ y $\mathcal{B}_n$ estructuras de tipo $\tau$ con $A_n$ y $B_n$ de cardinal $\alpha$ y $\beta$, respectivamente, en donde todas las relaciones se interpretan como $\emptyset$, entonces por el Lema 2.1.2

$$\mathcal{A}_n \equiv_{L^{n+2}_{\omega\omega}(Q^S)} \mathcal{B}_n$$

o sea $\mathcal{A}_n$ y $\mathcal{B}_n$ satisfacen las mismas sentencias de $L_{\omega\omega}(Q^S)_\tau$ de rango cuantificacional menor que n+2. Pero $\mathcal{A}_n \in H$ y $\mathcal{B}_n \notin H$, por tanto ninguna sentencia con rango cuantificacional menor que n+2 caracteriza a H. Como n se tomó arbitrario en $\omega$, H no es elemental en $L_{\omega\omega}(Q^S)_\tau$ y por tanto $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \nleqslant L_{\omega\omega}(Q^S)$. Q.E.D.

COROLARIO 2.1.5. $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^S)$ *si y solamente si, existe* $n \in \omega$ *tal que* $S' \setminus \bar{n}$ *es la unión de algunas clases de equivalencia de la relación* $\bar{F}_n^S$.

**2.2. Caracterización booleana de la relación $\leqslant$, el caso de varios cuantificadores.** Veamos como el resultado principal (Corolario 2.1.5) se puede expresar de manera muy sencilla y útil en términos de álgebras booleanas. Para ésto exponemos antes, brevemente, algunas ideas básicas de la teoría de álgebras booleanas que necesitaremos en lo subsiguiente.

Sea $\mathcal{B} = \langle B,\vee,\wedge,c,0,1\rangle$ un álgebra booleana y $A \subseteq B$, denotamos por $\langle A\rangle_{\mathcal{B}}$ la subálgebra booleana de $\mathcal{B}$ generada por A. Si es claro del contexto a que $\mathcal{B}$ nos referimos, abreviaremos $\langle A\rangle_{\mathcal{B}}$ con $\langle A\rangle$. Los hechos siguientes son bien conocidos:

LEMA 2.2.1. *Sea* $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, {}^c, 0, 1\rangle$ *un álgebra booleana y* $A \subseteq B$, *entonces*

$$\langle A\rangle = \{ \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} a_{ij} \mid n,m \in \omega \text{ y } (a_{ij} \in A \text{ ó } a_{ij}{}^{c} \in A)\}$$

Sea $\sim$ una relación de congruencia en $\mathcal{B}$. Si $x \in B$, denotamos la clase de equivalencia de x por $[x]$. Sea $\mathcal{B}/\sim$ el álgebra booleana cociente. Más generalmente si $A \subseteq B$, sea $A/\sim = \{[x] \mid x \in A\}$.

LEMA 2.2.2. *Sea* $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, {}^c, 0, 1\rangle$ *un álgebra booleana y* $A \subseteq B$. *Sea* $\sim$ *una relación de congruencia en* $\mathcal{B}$, *entonces* $\langle A\rangle_{\mathcal{B}/\sim_1} \simeq \langle A/\sim\rangle_{\mathcal{B}/\sim}$, *donde* $\sim_1$ *es la restricción de la relación* $\sim$ *a* $\langle A\rangle_{\mathcal{B}}$.

En lo que sigue identificaremos estas dos álgebras.

Sea K la clase de los cardinales y $\mathcal{P}(K)$ el álgebra booleana de las subclases de K. Definamos $\sim$ una relación en $\mathcal{P}(K)$ de la forma siguiente: si A y B son subclases de K,

$$A \sim B \text{ si y sólo si } A \,\Delta\, B \subseteq \omega \text{ y es finito.}$$

Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia. Para ver que $\sim$ es una congruencia, basta con notar que tanto $(A \cup C) \,\Delta\, (B \cup D)$ como $(A \cap C) \,\Delta\, (B \cap D)$ son subclases de $(A \,\Delta\, B) \cup (C \,\Delta\, D)$ y que $A^c \,\Delta\, B^c = A \,\Delta\, B$.

Para $n \in \omega$ y $S \subseteq K$, definamos $Tr(S) := \{S+n \mid n \in \omega\}$.

TEOREMA 2.2.3. $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{S})$ *si y solamente si* $[S'] \in \langle Tr(S)\rangle/\sim$.

*Demostración.* " $\Longrightarrow$ " Por el Teorema 2.1.4, existe $n \in w$ tal que $S'\setminus\bar{n} = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ donde las $A_i$ son clases de equivalencia de la relación $\bar{F}_n^S$ y por tanto, para cada i: $A_i = \bigcap_{j=o}^{n} S_j^i$, donde cada $S_j^i$ es de la forma $S+j$ o $S^c+j$. Como $S+j \in \langle Tr(S)\rangle$ y $S^c+j = (S+j)^c\setminus\bar{j} \sim (S+j)^c \in \langle Tr(S)\rangle$, es claro que $[S_j^i] \in \langle Tr(S)\rangle/\sim$, y así

$$[S'] = [S'\setminus\bar{n}] = [\bigcup_{i=1}^{k}\bigcap_{j=o}^{n} S_j^i] = \bigvee_{i=1}^{k}\bigwedge_{j=1}^{h}[S_j^i] \in \langle Tr(S)\rangle/\sim.$$

" $\Longleftarrow$ " Supongamos que $[S'] \in \langle Tr(S)\rangle/\sim$, entonces $S' \sim A$ donde A es combinación booleana de $S+j_1,\ldots,S+j_m$. Sea $n \geqslant j_1,\ldots,j_m$ tal que $S' \,\Delta\, A \subseteq \bar{n}$, entonces A se puede expresar como una forma normal disyuntiva: $A = \bigcup_{i=1}^{k}\bigcap_{j=o}^{n} S_j^i$ donde cada $S_j^i$ es $S+j$ ó $(S+j)^c$. Sea

$$\bar{S}_j^i = \begin{cases} S_j^i & \text{si } S_j^i = S+j \\ S^c+j & \text{si } S_j^i = (S+j)^c \end{cases}$$

y $\bar{A} = \bigcup_{i=1}^{k}\bigcap_{j=o}^{n} \bar{S}_j^i$. Como $S_j^i \,\Delta\, \bar{S}_j^i \subseteq \bar{j} \subseteq \bar{n}$, tenemos que $A \,\Delta\, \bar{A} \subseteq \bar{n}$ y por tanto $S' \,\Delta\, \bar{A} \subseteq \bar{n}$. Entonces

$$S'\setminus\bar{n} = \bar{A}\setminus\bar{n} = \bigcup_{i=1}^{k}(\bigcap_{j=o}^{n} \bar{S}_j^i\setminus\bar{n}) = \bigcup_{i=1}^{k}(\bigcap_{j=o}^{n-1}\bar{S}_j^i \cap (\bar{S}_n^i\setminus\bar{n})).$$

Pero $\bar{S}_n^i\setminus\bar{n} = \bar{S}_n^i$, luego $S'\setminus\bar{n} = \bigcup_{i=1}^{k}\bigcap_{j=o}^{n}\bar{S}_j^i$ y por el Corolario 2.1.5 tenemos que $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^S)$. Q.E.D.

COROLARIO 2.2.4. $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^S)$ *si y solamente si* $\langle Tr(S')\rangle/\sim \subseteq \langle Tr(S)\rangle/\sim$.

*Demostración.* " $\Longrightarrow$ " Supongamos $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^S)$ y sea $[A] \in \langle Tr(S')\rangle/\sim$ entonces por el Teorema 2.2.3 ,

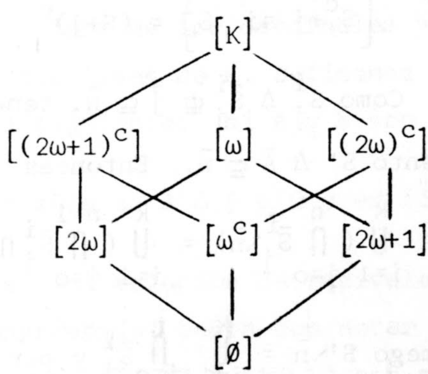
$L_{\omega\omega}(Q^A) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{S'})$ y por tanto $L_{\omega\omega}(Q^A) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^S)$. Otra vez por el teorema tenemos $[A] \in \langle Tr(S)\rangle/\sim$ y así $\langle Tr(S')\rangle/\sim \subseteq \langle Tr(S)\rangle/\sim$.

"$\Leftarrow$" Como $[S'] \in \langle Tr(S')\rangle/\sim \subseteq \langle Tr(S)\rangle/\sim$, usando el teorema tenemos $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^S)$. Q.E.D.

COROLARIO 2.2.5. $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \equiv L_{\omega\omega}(Q^S)$ *si y sólamente si* $\langle Tr(S')\rangle/\sim = \langle Tr(S)\rangle/\sim$.

Resumiendo, si $S \subseteq K$, los $S'$ tales que $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^S)$ son precisamente los elementos de $\bigcup\langle Tr(S)/\sim\rangle$ y los $S'$ tales que $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \equiv L_{\omega\omega}(Q^S)$ son los elementos de este conjunto para los cuales $\langle Tr(S')\rangle/\sim = \langle Tr(S)\rangle/\sim$.

EJEMPLO 2.2.6. Sea $S = 2\omega$ entonces $S+2 \sim S$ y por tanto $\langle Tr(2\omega)\rangle/\sim = \langle [S], [S+1]\rangle$, es decir la siguiente álgebra booleana:




$2\omega+1$, $(2\omega+1)^c$ y $(2\omega)^c$ dan lógicas equivalentes a $L_{\omega\omega}(Q^{2\omega})$, y $\emptyset$, $K$, $\omega$ y $\omega^c$ dan sublógicas estrictas: $L_{\omega\omega}(Q^{\emptyset}) \equiv L_{\omega\omega}(Q^K) \equiv L_{\omega\omega}$ y $L_{\omega\omega}(Q^{\omega}) \equiv L_{\omega\omega}(Q^{\omega^c}) = L_{\omega\omega}(Q_o)$.

El Teorema 2.2.3 se puede generalizar en la forma siguiente:

TEOREMA 2.2.7. *Sean* $\{S_i'\}_{i\in I}$ *y* $\{S_j\}_{j\in J}$ *familias de subclases de la clase* K. *Entonces* $L_{\omega\omega}(Q^{S_i'})_{i\in I} \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J}$ *si y sólamente si* $\forall i \in I\ [S_i'] \in <\bigcup_{j\in J} Tr(S_j)>/\sim$.

*Demostración.* "$\Longleftarrow$" Debemos mostrar que cada $Q^{S_i'}$, $i \in I$, es expresable en $L_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J}$. Fijemos $i \in I$, entonces $[S_i'] \in <\bigcup_{j\in J} Tr(S_j)>/\sim$ y por tanto $S_i' \sim \bar{S}_i = \bigcup_{u=1}^{k} \bigcap_{v=1}^{m} A_{uv}$ donde $k,m \in \omega$ y cada $A_{uv}$ es de la forma $S_{j_{uv}}+a_{uv}$ ó $(S_{j_{uv}}+a_{uv})^c$ con $j_{uv} \in J$ y $a_{uv} \in \omega$. En forma semejante a la demostración del Teorema 2.1.1 se puede interpretar cada $Q^{A_{uv}}$ por medio del cuantificador $Q^{S_{j_{uv}}}$ y por tanto $Q^{\bar{S}_i}$ por medio de los cuantificadores $Q^{S_j}$ $(j \in J)$. Pero $S_i' \sim \bar{S}_i$, entonces $Q^{S_i'}$ es expresable en $L_{\omega\omega}(Q^{\bar{S}_i}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J}$.

"$\Longrightarrow$" Mostramos la contrarrecíproca. Supongamos que $[S_i'] \notin <\bigcup_{j\in J} Tr(S_j)>/\sim$ para algún $i \in I$. Sea $\tau$ un tipo puramente relacional y sea $H = Mod\ (Q^{S_i'}x(x = x)) = \{\mathfrak{A} \in Est_\tau \mid |A| \in S_i'\}$. Veamos que H no es elemental en $L_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J}$. Sea n natural, J' un subconjunto *finito* de J $\bar{F}_n = \bigcap_{j\in J'} \bar{F}_n^{S_j}$.

**Afirmación.** Existen $\alpha,\beta$ cardinales mayores o iguales que n tales que $\alpha \in S_i'$, $\beta \notin S_i'$ y $\alpha\bar{F}_n\beta$.

Por contradicción supongamos que:

$$\forall\alpha,\beta \quad (\alpha,\beta \geqslant n \wedge \alpha \in S_i' \wedge \alpha\bar{F}_n\beta \ \rightarrow \ \beta \in S_i'),$$

entonces $S_i' \setminus \bar{n}$ es unión finita de clases de equivalencia de la relación $\bar{F}_n$. Estas clases de equivalencia son de la forma $C^u = \bigcap_{j\in J'} A_j^u$ donde los $A_j^u$ son clases de equivalencia de $\bar{F}_n^{S_j}$ y por lo tanto $A_j^u = \bigcap_{t=o}^{n} S_t^j$, donde $S_t^j$ es de la forma

$S_j+t$ ó $S_j^c+t = (S_j+t)^c \setminus \bar{t}$. Por lo tanto $[A_j^u] \in \langle Tr(S_j)\rangle/\sim$ y así $[C^u] = \bigcap_{j\in J'} [A_j^u] \in \langle \bigcup_{j\in J'} Tr(S_j)\rangle/\sim$. Por ser $S_i' \sim \bigcup_u C^u$, tenemos $[S_i'] \in \langle \bigcup_{j\in J'} Tr(S_j)\rangle/\sim$, lo cual está en contradicción con nuestra hipótesis. Esto prueba la afirmación.

Sean ahora $\mathfrak{A}_n$ y $\mathfrak{B}_n$ estructuras de tipo $\tau$ con $A_n$ y $B_n$ de cardinal $\alpha$ y $\beta$ respectivamente, en donde todas las relaciones de $\tau$ se interpretan por $\emptyset$, entonces por la afirmación y el Lema 2.1.3,

$$\mathfrak{A}_n \overset{n+2}{\underset{L_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J'}}{\equiv}} \mathfrak{B}_n .$$

Pero $\mathfrak{A}_n \in H$ y $\mathfrak{B}_n \notin H$, por lo tanto ninguna sentencia de $L_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J'}$ con rango cuantificacional menor que n+2 caracteriza a H. Como n y J' se tomaron arbitrarios, H no es elemental de $L_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J}$ y por tanto $L_{\omega\omega}(Q^{S_i'})_{i\in I} \not\leq L_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J}$ Q.E.D.

COROLARIO 2.2.8. $L_{\omega\omega}(Q^{S_i'})_{i\in I} \leq L_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J}$ *si y solo si* $\langle \bigcup_{i\in I} Tr(S_i')\rangle/\sim \subseteq \langle \bigcup_{j\in J} Tr(S_j)\rangle/\sim$.

COROLARIO 2.2.9. $L_{\omega\omega}(Q^{S_i'})_{i\in I} \equiv L_{\omega\omega}(Q^{S_j})_{j\in J}$ *si y sólo si* $\langle \bigcup_{i\in I} Tr(S_i')\rangle/\sim = \langle \bigcup_{j\in J} Tr(S_j)\rangle/\sim$.

## §3. APLICACIONES.

Analizamos en esta sección algunos casos particulares, por ejemplo para $S \subset \omega$, cuando S es el conjunto $n\omega$ de múltiplos de un natural fijo n, o el conjunto P+n de trasladados de los primos por n.

DEFINICION 3.1. Sea $S \subseteq \omega$, $S$ se llama *regular* si $S = F \cup (\bigcup_{i=1}^{m} A_i)$ donde $m \in \omega$, $F$ es un subconjunto finito de $\omega$ y para cada $i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $A_i = \{a_o^i + kn_i \mid k \in \omega\}$ es una serie aritmética con $a_o^i$ y $n_i$ naturales; $n_i$ se llama el *periodo* de $A_i$.

LEMA 3.1. *Sea* $S \subseteq \omega$ *regular y* $S' = S+t$, $t \in \omega$, *entonces* $L_{\omega\omega}(Q^S) \equiv L_{\omega\omega}(Q^{S'})$.

*Demostración.* Supongamos que $S = F \cup (\bigcup_{i=1}^{m} A_i)$ donde

$$F = \{r_1, \dots, r_n\} \text{ y } A_i = \{a_o^i + kn_i \mid k \in \omega\}, \quad a_o^i, n_i \in \omega.$$

Obviamente $Q^{S'}$ es expresable con ayuda de $Q^S$; pues $S' \in \langle Tr(S) \rangle$. Por la regularidad de $S$ tenemos que $S$ es, salvo finitos elementos, una unión de trasladados de los conjuntos $A_i+t$, los cuales cubren casi todo $S'$ (excepto por un conjunto finito). Para cada $i$ la constante de traslación de $A_i+t$ es $n_i - r_i$, donde $r_i$ es el residuo de la división de $t$ por $n_i$. Sea $c_i$ el cociente entero de esta división, entonces es fácil comprobar que:

$$Q^S x\phi(x) \text{ .eq. } \bigvee_{i=1}^{n} (\exists^{=r_i} x\phi(x)) \vee \bigvee_{i=1}^{m} ( \bigvee_{j=o}^{c_i} (\exists^{=a_o^i + jn_i} x\phi(x))) \vee$$

$$\vee \bigvee_{i=1}^{m} (\exists x_1, \dots, x_{n_i - r_i} ( \bigwedge_{i<j} (x_i \neq x_j) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n_i - r_i} \phi(x_j) \wedge Q^{S'} y(\phi(y)$$

$$\wedge \bigwedge_{j=1}^{n_i - r_i} (y \neq x_j)))). \qquad \text{Q.E.D.}$$

Nótese que en la primera parte no se usó la regularidad de $S$, luego vale que si $S \subset \omega$ es arbitrario y $S' = S+t$, $t \in \omega$, entonces $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^S)$.

PROPOSICION 3.2. *Sean* $S = \{a_o+kn \mid k \in \omega\}$ *y* $S' = \{b_o+kn' \mid k \in \omega\}$ *donde* $a_o, b_o, n, n'$ *son números naturales y* $n' \neq 0$, *entonces si* $n$ *divide a* $n'$, $L_{\omega\omega}(Q^S) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{S'})$.

*Demostración.* Supongamos que $n' = cn$ con $c \in \omega$, $c \neq 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $b_o = a_o$, ya que, si por ejemplo $b_o > a_o$, por el lema anterior $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \equiv L_{\omega\omega}(Q^{\hat{S}'})$ donde $\hat{S}' = \hat{S}'+t$ para $t = b_o - a_o$, esto es, $\hat{S}' = \{a_o+kn' \mid k \in \omega\}$. Entonces es fácil ver que $S = \bigcup_{i=o}^{c-1} (S'+in)$. Por el lema anterior tenemos que para toda $i = 0,\ldots,c-1$, $L_{\omega\omega}(Q^{S'+i}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{S'})$. Pero $Q^S x\phi(x)$ .eq. $\bigvee_{i=o}^{c-1} Q^{S'+in} x\phi(x)$, luego $L_{\omega\omega}(Q^S) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{S'})$. Q.E.D.

COROLARIO 3.3. *Si* $S$ *y* $S'$ *son como en la proposición y* $n = n'$, *entonces* $L_{\omega\omega}(Q^S) \equiv L_{\omega\omega}(Q^{S'})$.

COROLARIO 3.4. *Si* $n$ *y* $m$ *son naturales,* $m > 0$ *y* $n\omega$ *denota el conjunto de los múltiplos de* $n$, *entonces si* $n|m$ (*n divide a* m), $L_{\omega\omega}(Q^{n\omega}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{m\omega})$.

PROPOSICION 3.5. *Sean* $n$ *y* $m$ *naturales mayores que cero entonces* $L_{\omega\omega}(Q^{n\omega}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{m\omega})$ *si y sólo si* $n|m$.

*Demostración.* El corolario 3.4 nos da la suficiencia de la condición. Para mostrar que la condición es necesaria, suponemos que $n\nmid m$ y mostramos que $L_{\omega\omega}(Q^{n\omega}) \not\leqslant L_{\omega\omega}(Q^{m\omega})$, para lo cual, según el Teorema 2.1.4 basta con mostrar:

$$\forall k \in \omega \exists \alpha,\beta\left[\alpha,\beta \geqslant k \wedge n|\alpha \wedge n\nmid\beta \wedge \forall r(0 \leqslant r \leqslant k \rightarrow (m|(\alpha-r) \leftrightarrow m|(\beta-r)))\right].$$

Sea $k \in \omega$, tome $\alpha := \min\{x \in \omega \mid x \geqslant k \text{ y } n|x\}$ y $\beta := \alpha+m$, entonces $\alpha,\beta \geqslant k$, $n|\alpha$ y $n\nmid\beta$. Además si $r$ es tal que $0 \leqslant r \leqslant k$, entonces $m|\alpha-r \leftrightarrow m|(\alpha-r)+m \leftrightarrow m|\beta-r$.   Q.E.D.

Tenemos entonces que

$$<\{L_{\omega\omega}(Q^{n\omega}) \mid n \in \omega^+ , \leqslant >$$

es isomorfo al retículo $<\omega^+, | >$, donde $\omega^+$ denota el conjunto de naturales sin el cero.

Para finalizar veamos algunos otros casos particulares donde se aplica los resultados probados atrás.

EJEMPLO 3.6. *Sean* $m \in \omega^+$ *y* $P$ *el conjunto de los primos, entonces* $L_{\omega\omega}(Q^{m\omega})$ *y* $L_{\omega\omega}(Q^P)$ *no son comparables.*

En efecto, para ver que $L_{\omega\omega}(Q^{m\omega}) \not\leqslant L_{\omega\omega}(Q^P)$ basta mostrar que

$$\forall n \in \omega\, \exists \alpha,\beta(\alpha,\beta \geqslant n \wedge m|\alpha \wedge m\nmid\beta \wedge \forall r((0 \leqslant r \leqslant n) \rightarrow (\alpha-r \in P \leftrightarrow \beta-r \in P))).$$

Sea $n \in \omega$ y sean $p$ y $p'$ dos primos consecutivos tales que $p'-p \geqslant n+m+2$. Sea $\alpha \in \omega$ tal que $p+n < \alpha < p'$ y $m|\alpha$, tal $\alpha$ existe ya que $p'-(p+n) \geqslant m+2$. Sea $\beta = \omega_o$. Entonces si $r$ es tal que $0 \leqslant r \leqslant n$, $p < \alpha-r < p'$ y $\beta-r = \omega_o$; luego ni $\alpha-r$ ni $\beta-r$ son primos y esto implica que $(\alpha-r) \in P \leftrightarrow (\beta-r) \in P$. Para ver que $L_{\omega\omega}(Q^P) \not\leqslant L_{\omega\omega}(Q^{m\omega})$ mostramos que

$$\forall n \in \omega \exists \alpha,\beta(\alpha,\beta \geqslant n \wedge \alpha \in P \wedge \beta \notin P \wedge \forall r((0 \leqslant r \leqslant n) \rightarrow (m|\alpha-r \leftrightarrow m|\beta-r))).$$

Sea $n \in \omega$ y sean $p$ y $p'$ dos primos consecutivos tales que $p \geqslant n$ y $p'-p \geqslant m+1$. Sean $\alpha := p'$ y $\beta := \alpha-m$, entonces $\alpha,\beta \geqslant n$, $\alpha \in P$, $\beta \notin P$ y $\alpha \equiv \beta \pmod m$ por tanto

$$\forall r((0 \leqslant r \leqslant n) \rightarrow (m|(\alpha-r) \leftrightarrow m|(\beta-r))).$$

EJEMPLO 3.7. $L_{\omega\omega}(Q^{2\omega}) < L_{\omega\omega}(Q^{2\omega\cup 3\omega})$.

En efecto, si hacemos $S' = 2\omega$ y $S = 2\omega\cup 3\omega$, es fácil ver que $S'\setminus\bar{2}$ es unión de clases de equivalencia de la relación $\bar{F}_2^S$, pues

$$S'\setminus\bar{2} = (S\cap S+1\cap S+2)\cup(S\cap S^c+1\cap S+2).$$

Para ver que la inclusión es estricta notemos simplemente que con un argumento semejante al anterior se puede probar que $L_{\omega\omega}(Q^{3\omega}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{2\omega\cup 3\omega})$, y por tanto si tuvieramos $L_{\omega\omega}(Q^{2\omega\cup 3\omega}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{2\omega})$, por transitividad tendríamos $L_{\omega\omega}(Q^{3\omega}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{2\omega})$, lo cual contradice la Proposición 3.5.

EJEMPLO 3.8. Sea $S = 3\omega\cup(3\omega+1)$ y $S' = (3\omega+1)\cup(3\omega+2)$ entonces el Lema 3.1 se aplica y tenemos que $L_{\omega\omega}(Q^S) \equiv L_{\omega\omega}(Q^{S'})$.

EJEMPLO 3.9. *La relación < tiene cadenas descendentes infinitas.*

Sea P el conjunto de los primos, mostramos que $L_{\omega\omega}(Q^{P+1}) < L_{\omega\omega}(Q^P)$. Por el Corolario 2.1.5, tenemos que $L_{\omega\omega}(Q^{P+1}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^P)$. Para mostrar que $L_{\omega\omega}(Q^P) \not\leqslant L_{\omega\omega}(Q^{P+1})$ usamos el mismo corolario. Sea $n\in\omega$ y escoja p y p', primos consecutivos mayores que n tales que $p'-p > n+1$. Tome $\alpha = p'$ y $\beta = p'-1$, entonces $\alpha,\beta \geqslant n$, $\alpha\in P$, $\beta\notin P$ y es claro de la escogencia que $\alpha\bar{F}_n^{P+1}\beta$. Entonces $L_{\omega\omega}(Q^P) \not\leqslant L_{\omega\omega}(Q^{P+1})$. El argumento se repite en forma semejante para mostrar que $L_{\omega\omega}(Q^{P+k+1}) < L_{\omega\omega}(Q^{P+k})$. Luego $\{L_{\omega\omega}(Q^{P+k}) \mid k\in\omega\}$ constituye una cadena infinita descendente.

Es fácil ver que en el caso en que S sea una subclase de K tal que al menos uno de los conjuntos $S \cap \omega$ ó $S^c \cap \omega$ sea infinito y tenga huecos arbitrariamente arriba y arbitrariamente grandes, como es el caso de P, se puede probar en forma semejante a lo anterior que $\{L_{\omega\omega}(Q^{S+k}) \mid k \in \omega\}$ constituye una cadena infinita descendente, para el orden $<$.

EJEMPLO 3.10. *Si* S *y* S' *consisten sólo de cardinales infinitos y* $S' \neq \emptyset$ *entonces* $L_{\omega\omega}(Q^{S'}) \leqslant L_{\omega\omega}(Q^{S})$ *si y sólo si* $S = S'$.

Esto es consecuencia del Teorema 2.2.3, pues en este caso $Tr(S) = \{S\}$ y por tanto el álgebra booleana $\langle Tr(S)\rangle/\sim$ es la siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & {[K]} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
{[S]} \arrow[dr, dash] & & {[S^c]} \arrow[dl, dash] \\
 & {[\emptyset]} &
\end{tikzcd}$$

y dada la forma de S', $S' \in [S]$. Pero ni S ni S' tienen cardinales finitos luego $S' = S$. Como consecuencia se tiene que las lógicas $L_{\omega\omega}(Q_\alpha)$ no son comparables entre sí. Usando el Teorema 2.2.7, se puede probar algo más general, ésto es que para $\alpha$ ordinal, $L_{\omega\omega}(Q_\alpha) \nleqslant L_{\omega\omega}(Q_\beta)_{\beta \in On \setminus \{\alpha\}}$, donde On denota la clase de los ordinales.

Obviamente las lógicas de la forma $L_{\omega\omega}(Q^{S_i}/i \in I)$ forman un retículo y sus átomos son de la forma $L_{\omega\omega}(Q^S)$. Damos en seguida una caracterización de dichos átomos.

PROPOSICION 3.11. $L_{\omega\omega}(Q^S)$ *es un átomo si y solamente si* S (*o* $S^c$) *tiene cardinales infinitos y a lo sumo finitos cardinales finitos.*

*Demostración.* La conclusión de la proposición se puede expresar como $S \sim S'$ o $S^c \sim S'$ donde $S' \neq \emptyset$ y solo tiene cardinales infinitos. Bajo esta hipótesis, $L_{\omega\omega}(Q^S) \equiv L_{\omega\omega}(Q^{S'})$ y $\langle Tr(S')\rangle/\sim \; = \langle [S'] \rangle$ es el álgebra boleana de cuatro elementos, pues $S' \not\sim \emptyset$, K por tener, y sólo tener, cardinales infinitos, por lo tanto la única sublógica propia de $L_{\omega\omega}(Q^{S'})$ es $L_{\omega\omega}(Q^K) \equiv L_{\omega\omega}(Q^{\emptyset}) = L_{\omega\omega}$. Supongamos ahora que $S \not\sim S'$ y $S^c \not\sim S'$ para todo $S' \neq \emptyset$ que solo contenga cardinales infinitos y además $L_{\omega\omega}(Q^S) > L_{\omega\omega}$, entonces $S \cap \omega$ y $S^c \cap \omega$ deben ser infinitos. Si, por ejemplo, $S \cap \omega$ fuera finito, entonces $S \sim S - \omega$ y por hipótesis tendríamos $S - \omega = \emptyset$, es decir $S \subseteq \omega$ y así $S \sim \emptyset$, lo que dá $L_{\omega\omega}(Q^S) = L_{\omega\omega}$. Lo mismo sucederá si $S^c \cap \omega$ fuera finito. Ahora consideramos dos casos:

**Caso 1.** $S \cap \omega$ y $S^c \cap \omega$ no tienen huecos arbitrariamente grandes. Entonces $[\omega] \in \langle Tr(S)\rangle/\sim$, pues en este caso $\omega$ puede cubrirse con un número finito de trasladados de S, pero $[S] \notin \langle Tr(\omega)\rangle/\sim$ pues $S \not\sim \omega$, $K-\omega$, $\emptyset$, K, por ser $S \cap \omega$ y $S^c \cap \omega$ infinitos; por tanto:

$$L_{\omega\omega} < L_{\omega\omega}(Q^{\omega}) < L_{\omega\omega}(Q^S).$$

**Caso 2.** $S \cap \omega$ ó $S^c \cap \omega$ tienen huecos arbitrariamente grandes. Entonces como en el ejemplo 9,

$$L_{\omega\omega}(Q^S) > L_{\omega\omega}(Q^{S+1}) > L_{\omega\omega}(Q^{S+2}) > \ldots$$

ó

$$L_{\omega\omega}(Q^S) \equiv L_{\omega\omega}(Q^{S^c}) > L_{\omega\omega}(Q^{S^c+1}) > \ldots$$

En cualquier caso $L_{\omega\omega}(Q^S)$ no es minimal. Q.E.D.

## BIBLIOGRAFIA


[B1] Barwise, J., *Axioms for Abstract Model Theory*, Ann. of Math. Log. 7 (1974).

[BS] Bell, J.L. y Slomon, A., *Models and Ultraproducts*, North Holland (1969).

[C1] Caicedo, X., *Maximality and Interpolation in Abstract Logics*, Ph.D. Dissertation, University of Maryland, 1978.

[C2] Caicedo, X., *Back-and-forth Systems for arbitrary quantifiers*, Proceedings of the IV Latin American Symposium on Math. Logic, North Holland (1980) pág. 83-102.

[F1] Flum, J., *First order Logic and its extensions*, Logic Conference, Kiel, Lect. Notes in Math. 499 (1975) págs. 205-223.

[F2] Flum, J., *Characterizing Logics*, (1982) Preprint.

[Fa] Fajardo, S., *Compacidad y decidibilidad de lógicas monádicas con cuantificadores cardinales*, Revista Colombiana de Matemáticas, Vol.XIV (1980) págs. 173-196.

[L1] Lindström, P., *First order predicate logic with generalized quantifiers*, Theoria 32 (1966), 186-195.

[L2] Lindström, P., *On Extensions of Elementary Logic*, Theoria 35 (1969), 1-11.

[ M ] Mostowski, A., *On a generalization of quantifiers*, Fund. Math. 44 (1957).



*Seminar fur Logik und*
*Grundlagenforschung der Mathematik*
*Beringstr. 6*
*5300 Bonn 1*
ALEMANIA FEDERAL



(Recibido en noviembre de 1984).