Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XX (1986), págs. 39-50

PRINCIPIO INVERSO DEL MAXIMO PARA ECUACIONES PARABOLICAS PERIODICAS

por

Gerhard SCHLEINKOFER

RESUMEN. Sea L un operador parabólico periódico y λ_1 su valor propio principal. Para $\lambda < \lambda_1$, una solución u del problema periódico: $Lu = \lambda u+f$ en $\Omega\times\mathbb{R}$, $f \geqslant 0$, $f \not\equiv 0$, $u = 0$ sobre $\partial\Omega\times\mathbb{R}$, satisface $u > 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$ por el Principio del Máximo. Pero para $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1+\delta$ tenemos $u < 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$.

ABSTRACT. Let L be a parabolic periodic operator with principal eigenvalue λ_1. If $\lambda < \lambda_1$, then any solution u of the periodic problem: $Lu = \lambda u+f$ in $\Omega\times\mathbb{R}$, $f \geqslant 0$, $f \not\equiv 0$, $u = 0$ in $\partial\Omega\times\mathbb{R}$, satisfies $u > 0$ in $\Omega\times\mathbb{R}$, due to the Maximum Principle. However, for $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1+\delta$ we have $u < 0$ in $\Omega\times\mathbb{R}$.

Introducción. Consideremos un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ suficientemente regular y

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}-c(x)u,$$

un operador elíptico de segundo orden con coeficientes suaves en $\bar{\Omega}$. Sea λ_1 el valor propio principal de L y $f:\bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ una función suave, $f \not\equiv 0$, $f > 0$. Entonces es bien conocido que para $\lambda < \lambda_1$ vale el Principio (fuerte) del Máximo para una solución u del problema

$$Lu = \lambda u + f \text{ en } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

es decir, $u > 0$ en Ω y $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$ en $\partial\Omega$, donde n es el vector normal exterior de $\partial\Omega$. Para $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1+\delta$ la solución u del mismo problema tiene el signo opuesto, es decir, $u < 0$ en Ω y $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$ en $\partial\Omega$. Estos resultados fueron demostrados por Clément y Peletier [3] y en forma más general por Hess [4].

El propósito del presente artículo es deducir resultados análogos para ecuaciones diferenciales parabólicas períodicas. Nos referiremos varias veces a las publicaciones de Lazer [6] y de Castro y Lazer [2]. Estos autores aplican métodos de Krasnoselski [5] y Amann [1] para demostrar teoremas muy útiles en el caso parabólico. Nuestras Proposiciones 1 y 2 ya están demostradas en forma semejante en [2, Theorem 1]. Pero nuestra prueba parece más clara y no utiliza resultados profundos de regularidad de Amann [1], sino solamente el Principio del Máximo.

Es muy probable que nuestros teoremas se extiendan a las condiciones laterales de Neumann $\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0$ sobre $\partial\Omega\times\mathbb{R}$ y también a soluciones generalizadas. Esto lo trataremos en otro artículo.

Notaciones y propiedades fundamentales. Sea Ω un subconjunto acotado, abierto, conexo de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. Supongamos adicionalmente que la frontera $\partial\Omega$ es una $C^{2+\alpha}$-variedad de dimensión n-1 (α fijo, $0 < \alpha < 1$) y que Ω está situado localmente en un lado de $\partial\Omega$. Para un intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y para una función $u(\cdot,\cdot):\bar{\Omega}\times[a,b] \to \mathbb{R}$, se define

$$H_\alpha^D(u) := \sup_{\substack{(x,t),(y,s)\in D\\(x,t)\neq(y,s)}} \frac{|u(x,t)-u(y,s)|}{[|x-y|^2+|t-s|]^{\alpha/2}}, \quad D := \bar{\Omega}\times[a,b].$$

Se designa con $C^{\alpha,\alpha/2}(D)$ a la familia de todas las funciones $u(\cdot,\cdot):D \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$\|u\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(D)} := \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)|+H^D(u) < \infty.$$

El conjunto $C^{\alpha,\alpha/2}(D)$ es un espacio de Banach para la norma $\|\cdot\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(D)}$. Para un multi-índice $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\beta_i \in \{0,1,2,\ldots,\}$, $i = 1,\ldots,n$, sea $|\beta| := \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$. Se denotará con $C^{k+\alpha,\ell+\alpha/2}(D)$ $(k = 0,1,2,\ \ell = 0,1)$, al conjunto de todas las funciones $u(\cdot,\cdot):D \to \mathbb{R}$ para las cuales las derivadas parciales

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}u(\cdot,\cdot)$$

existen en D, para $0 \leq j \leq \ell$, $0 \leq |\beta| \leq k$, y pertenecen a $C^{\alpha,\alpha/2}(D)$. El conjunto $C^{k+\alpha,\ell+\alpha/2}(D)$, $D = \bar{\Omega}\times[a,b]$, es un espacio de Banach para la norma

$$\|u\|_{C^{k+\alpha,\ell+\alpha/2}(D)} := \sum_{j=0}^{\ell}\sum_{|\beta|=0}^{j}\left\|\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}u\right\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(D)}.$$

En lo que sigue, $C^{k+\alpha,\ell+\alpha/2}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ significará la familia de todas las funciones $u(\cdot,\cdot):\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que pertenecen a $C^{k+\alpha,\ell+\alpha/2}(\bar{\Omega}\times[a,b])$ para todos los intervalos compactos $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $(k = 0,1,2,\ \ \ell = 0,1)$.

El operador diferencial parabólico L, definido por

$$Lu := u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} - c(x,t)u,$$

satisface las siguientes condiciones:

(A_1) Los coeficientes a_{ij}, b_i, c son periódicos con respecto a t, con período $T > 0$, $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

(A_2) $a_{ij} \in C^{2+\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$b_i \in C^{1+\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $1 \leqslant i \leqslant n$; $c \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$.

(A_3) L es uniformemente parabólico, es decir:

$$\exists m > 0\ \forall (x,t)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant m\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2.$$

En lo que sigue siempre se denotará con d a una constante que cumpla $d-c(x,t) > 1$ para todo $(x,t)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$. Además, introducimos los espacios vectoriales

$$F := \{f \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R});\ f(x,t+T) = f(x,t)\ \forall (x,t)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\}$$

$$E := \{u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R});\ u(x,t+T) = u(x,t)\ \forall (x,t)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R},\ u|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} = 0\}.$$

Para las normas inducidas por $\|\cdot\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}\times[0,T])}$ (resp. $\|\cdot\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}\times[0,T])}$) el espacio F (resp. E) es un espacio de Banach. Obviamente, la imersión $j:E\to F$ es compacta.

PRINCIPIO DEL MAXIMO. [7,p.174]. Sea

$$\mathcal{L}u := u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} \quad \text{sobre } \bar{\Omega}\times\mathbb{R}$$

un operador diferencial, uniformemente parabólico, es decir, que satisface (A_3), donde las funciones a_{ij}, b_i son acotadas y continuas en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$ y $a_{ij} = a_{ji}$. Sea $h:\bar{\Omega}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, acotada, no negativa. Supongamos también que $u \in C^{2,1}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ satisface la desigualdad $\mathcal{L}u + hu \leqslant 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$. Entonces tenemos las siguientes propiedades

(a) Si $u(x_o,t_o) = \max\limits_{\bar{\Omega}\times\mathbb{R}} u \geqslant 0$ para algún $(x_o,t_o) \in \Omega\times\mathbb{R}$, entonces $u(x,t) \equiv \max\limits_{\bar{\Omega}\times\mathbb{R}} u$ en $\bar{\Omega}\times\{t \leqslant t_o\}$.

(b) Si $u(\bar{x},\bar{t}) = \max\limits_{\bar{\Omega}\times\mathbb{R}} u \geqslant 0$ para algún $(\bar{x},\bar{t}) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}$ y $u(x,t) < \max\limits_{\bar{\Omega}\times\mathbb{R}} u$ para todo $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$, entonces $\frac{\partial u}{\partial n}(\bar{x},\bar{t}) > 0$, donde $n = n(\bar{x})$ es el vector normal exterior unitario en el punto $\bar{x} \in \partial\Omega$.

Una consecuencia fácil es el siguiente

COROLARIO. *Sea* $u \in C^{2,1}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $u(x,t+T) = u(x,t)$ *en* $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$, $u_{|\partial\Omega\times\mathbb{R}} = 0$ $f:\bar{\Omega}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuo*, $f \geqslant 0$, $f \not\equiv 0$, $\mathcal{L}u + hu = f$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}$. *Entonces tenemos*

(a) $u > 0$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}$

(b) $\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) < 0$ *para todo* $(x,t) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}$.

Volvamos al operador diferencial L.

PROPOSICION 1. *Consideramos el cono* $\mathcal{K} := \{f \in F;$ $f \geqslant 0$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\}$ *y la aplicación* $Mu := Lu + du$. *Asumimos las hipótesis* (A_1), (A_2), (A_3). *Entonces tenemos*

(i) $M:E \to F$ *es lineal, continua, inyectiva y sobreyectiva.*

(ii) $M^{-1}:F \to E$ *es continua*

(iii) $T := j \circ M^{-1}:F \to F$ *es compacta*

(iv) $T:\mathcal{K} \to \mathcal{K}$

(v) *Si* $f_o \in \mathcal{K}$, $f_o \not\equiv 0$ *y* $u_o = Tf_o$ *entonces* $u_o > 0$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}$ *y* $\dfrac{\partial u_o}{\partial n} < 0$ *en* $\partial\Omega\times\mathbb{R}$.

(vi) *Si* $f \in \mathcal{K}$, $f \not\equiv 0$, $u = Tf$, u_o *como en* (v), *entonces existen constantes positivas* $\alpha(f) > 0$, $\beta(f) > 0$ *tales que* $\alpha(f)u_o < u < \beta(f)u_o$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}$.

Prueba. (i) La linealidad y la continuidad de M son obvias. La inyectividad de M sale del Principio del Máximo. La sobreyectividad se demuestra utilizando un teorema de Kolesov, véase |2,p.1093|.

(ii) Sale de (i) por el teorema de la aplicación abierta.

(iii) $j:E \to F$ es una aplicación compacta.

(v) $$Mu = Lu+du = u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} - cu + du$$

$$= \mathcal{L}u+(d-c(x,t))u = \mathcal{L}u+h(x,t)u$$

con $h(x,t) > 1$ para todo $(x,t) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}$. Para $f_o \in \mathcal{K}$, $f_o \not\equiv 0$, $u_o = Tf_o$ tenemos que $f_o = Mu_o = \mathcal{L}u+hu_o$. Aplicando el corolario del Principio del Máximo nos da la afirmación.

(iv), (vi) son consecuencias inmediatas de (v).

PROPOSICION 2. *Supongamos satisfechas las hipótesis* $(A_1)(A_2)(A_3)$. *Entonces*

(a) *Existe* $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\phi \in E$ *tal que* $L\phi = \lambda_1\phi$, $\phi > 0$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}$ *y* $\dfrac{\partial\phi}{\partial n} < 0$ *en* $\partial\Omega\times\mathbb{R}$. *Más precisamente tenemos que* $\lambda_1 = \dfrac{1}{\mu_o} - d$ *donde* $\mu_o > 0$ *es el mayor valor propio de* T, λ_1 *se llama el valor propio principal de* L.

(b) *Si* $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$, $v \in E$ *son tales que* $Lv = \tilde{\lambda}v$, $v \in \mathcal{K}$ *y* $v \not\equiv 0$, *entonces tenemos que* $\lambda_1 = \tilde{\lambda}$ *y* $v = c\phi$ *con una constante* $c > 0$ *apropiada.*

(c) *Si* $\psi \in C^{2,1}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $\psi|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} = 0$, $\psi(x,t+T) = \psi(x,t)$, $L\psi = \lambda_1\psi$ *y* $\psi \not\equiv 0$, *entonces existe un número real* c *tal que* $\psi = c\phi$.

(d) *Si* $V \in C^{2,1}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $V|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} = 0$, $V(x,t+T) = V(x,t)$, $LV = \lambda V$ *y* $V \not\equiv 0$, *entonces vale* $\lambda \geqslant \lambda_1$.

Prueba. Por las propiedades mencionadas en Proposición 1 (iii)-(iv), el operador $T:F \to F$ es compacto y u_o-positivo. La teoría de estos operadores [5,p.60-95] nos da

($\tilde{a}$) Existe $\mu_o < 0$, $\phi \in \mathcal{K}$, $\phi \not\equiv 0$ tal que $T\phi = \mu_o\phi$

($\tilde{b}$) Si $v \in \mathcal{K}$, $v \not\equiv 0$, $Tv = \tilde{\mu}v$, entonces tenemos que $\tilde{\mu} = \mu_o$ y $v = c\phi$ para una constante $c > 0$.

($\tilde{c}$) Si $\psi \in F$, $T\psi = \mu_o\psi$, entonces existe un $c \in \mathbb{R}$ con $\psi = c\phi$.

($\tilde{d}$) Si $0 \neq \theta \in F$, $T\theta = \gamma\theta$, entonces tenemos que $|\gamma| \leqslant \mu_o$.

(a). Por ($\tilde{a}$) tenemos $\mu_o\phi = T\phi = M^{-1}\phi$, por lo que implica $\phi \in E$, $\phi = \mu_o M\phi$, $\frac{1}{\mu_o}\phi = M\phi + d\phi$, es decir, $L\phi = (\frac{1}{\mu_o} - d)\phi$. Ya que $T\phi = \mu_o\phi$, $\phi \in \mathcal{K}$ y $\phi \not\equiv 0$, tenemos, por la Proposición 1 (v), que $\phi > 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$ y $\frac{\partial\phi}{\partial n} < 0$ en $\partial\Omega\times\mathbb{R}$.

(b). $Lv = \tilde{\lambda}v$ implica $Mv = Lv+dv = (\tilde{\lambda}+d)v$. Por ser $v \not\equiv 0$ y por la Proposición 1 (i), el número real $\tilde{\lambda}+d$ no es cero. Luego $Tv = \frac{1}{\tilde{\lambda}+d}v$, y de la propiedad ($\tilde{b}$) se deduce $\frac{1}{\tilde{\lambda}+d} = \mu_o = \frac{1}{\lambda_1+d}$, es decir, $\tilde{\lambda} = \lambda_1$. Además tenemos $v = c\phi$, $c > 0$.

(c). $M\psi = (\lambda_1+d)\psi$. Definiendo $f := (\lambda_1+d)\psi \in F$ y $\tilde{\psi} := M^{-1}f \in E$, obtenemos $M\tilde{\psi} = f$, es decir, $M(\psi-\tilde{\psi}) = 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$. Ya que $\psi-\tilde{\psi}|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} = 0$ podemos concluir, por el Principio del Máximo, que $\psi-\tilde{\psi} = 0$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$. Pero $\tilde{\psi} = \psi \in E$ implica $M\psi = \frac{1}{\mu_o}\psi$, $T\psi = \mu_o\psi$, y por la propiedad ($\tilde{c}$) nos resulta $\psi = c\phi$, para algún $c \in \mathbb{R}$.

(d). Como en (c) se prueba que $V \in E$. Ahora escogemos $\tilde{d} > 0$ tal que $\tilde{d} - c(x,t) \geq 1$ y $\tilde{d} + \lambda > 0$. Consideramos $\tilde{M}u := Lu + \tilde{d}u$ y $\tilde{T} := j \circ \tilde{M}^{-1} : F \to E \to F$. Aplicando la Proposición 1 y la parte (a) de la Proposición 2 a estos nuevos operadores, obtenemos la existencia de $\tilde{\lambda}_1 \in \mathbb{R}$, $\tilde{\phi} \in E$, tales que $L\tilde{\phi} = \tilde{\lambda}_1 \phi$, $\tilde{\phi} > 0$ en $\Omega \times \mathbb{R}$, $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{\tilde{\mu}_o} - \tilde{d}$, lo que implica $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1$ por la parte (b) de la Proposición 2.

Luego podemos deducir de $LV = \lambda V$ y $V \in E$ que $\tilde{M}V = (\lambda + \tilde{d})V$, lo que significa $\tilde{T}V = \frac{1}{\lambda + \tilde{d}} V$. Pero entonces la propiedad ($\tilde{d}$) nos da $\frac{1}{\lambda + \tilde{d}} \leq \tilde{\mu}_o = \frac{1}{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{d}}$, es decir, $\lambda \geq \tilde{\lambda}_1 = \lambda_1$. ▲

Para completar los aspectos de esta teoría citamos otro teorema [6,p.237,238] aunque no lo necesitaremos.

PROPOSICION 3. *Supongamos satisfechas las hipótesis* $(A_1),(A_2),(A_3)$ *y sea* λ_1 *el valor propio principal de* L, $\lambda < \lambda_1$. *Entonces existe para cada* $f \in F$ *un único* $u \in E$ *tal que* $Lu = \lambda u + f$. *Si adicionalmente,* $f \in K$ *y* $f \not\equiv 0$, *entonces* $u > 0$ *en* $\Omega \times \mathbb{R}$ *y* $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$ *en* $\partial\Omega \times \mathbb{R}$.

El operador L^* adjunto a L tiene la forma siguiente:

$$L^* u := -(u_t + A^* u),$$

donde

$$A^* u := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i^*(x,t) u_{x_i} + c^*(x,t) u,$$

$$b_i^* := -b_i + 2 \sum_{j=1} (a_{ij})_{x_j}$$

$$c^* := c - \sum_{i=1}^{n} (b_i)_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij})_{x_i x_j}.$$

Asumiendo las hipótesis $(A_1),(A_2),(A_3)$ se verifica fácilmente, por el teorema de la divergencia, que L y L^* satisfacen la identidad siguiente $\langle u,Lv\rangle = \langle L^*u,v\rangle$ para todo $u,v \in C^{2,1}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $u|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} = v|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} = 0$ que sean T-periódicos en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$.

Se define $\langle\cdot,\cdot\rangle$ por $\langle f,g\rangle = \int_0^T\int_\Omega f(x,t)g(x,t)\,dx\,dt$. Vale el siguiente teorema [2,p.1095,1096)]

PROPOSICION 4. *Supongamos satisfechas las hipótesis* $(A_1),(A_2),(A_3)$, *y sean* λ_1 *y* ϕ *como en la Proposición 2. entonces*

(a) *existe* $\phi^* \in E$ *tal que* $L^*\phi^* = \lambda_1\phi^*$, $\phi^* > 0$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}$ *y* $\frac{\partial\phi^*}{\partial n} < 0$ *en* $\partial\Omega\times\mathbb{R}$, $\langle\phi,\phi^*\rangle = 1$.

(b) *para* $f \in F$ *existe un* $w \in E$ *tal que* $(L-\lambda_1 I)w = f$ *si, y solo si,* $\langle f,\phi^*\rangle = 0$.

Ahora estamos listos para nuestro resultado principal:

TEOREMA (Principio inverso del Máximo). *Supongamos que el operador parabólico* L *satisface las hipótesis* (A_1), $(A_2),(A_3)$ *y que* λ_1 *es el valor propio principal de* L. *Además, sea* $f \in \mathcal{K}$, $f \not\equiv 0$. *Entonces existe* $\delta > 0$ *tal que para* $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1+\delta$ *y para una solución* $u \in E$ *de* $Lu = \lambda u+f$ *vale* $u < 0$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}$ *y* $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$ *en* $\partial\Omega\times\mathbb{R}$.

Demostración. Sean ϕ,ϕ^* como en la Proposición 4 y $N^* := \{f \in F;\ \langle f,\phi^*\rangle = 0\}$. Gracias a la Proposición 4(b) tenemos $N^* = R(L-\lambda_1 I)$ = imagen de E bajo la aplicación $L-\lambda_1 I: E \to F$. Evidentemente, cualquier $f \in F$ se representa de una manera única como $f = f_1+s\phi$, $s \in \mathbb{R}$, $f_1 \in N^*$. Debemos poner $f_1 = f-\langle f,\phi^*\rangle\phi$, $s = \langle f,\phi^*\rangle$. En el caso $f \in \mathcal{K}$ y

$f \not\equiv 0$ vale $s = \langle f,\phi^*\rangle > 0$. Para una solución $u \in E \subset F$ de $Lu = \lambda u+f$, consideramos también la descomposición $u = u_1+\tilde{s}\phi$, donde $\tilde{s} = \langle u,\phi^*\rangle$, $u_1 = u-\tilde{s}\phi \in N^*$. El elemento u_1 pertenece a $E \cap N^* = E \cap R(L-\lambda_1 I)$. Al aplicar el operador L a $u = u_1+\tilde{s}\phi$ nos resulta que $Lu_1+\tilde{s}L\phi = Lu = \lambda u+f = \lambda u_1+\lambda\tilde{s}\phi+f_1+s\phi$. Escrito de otra forma, $Lu_1-\lambda u_1-f_1 = [\lambda\tilde{s}+s-\lambda_1\tilde{s}]\phi$. Ya que $\langle\phi,\phi^*\rangle = 1$, se verifica que $\lambda\tilde{s}+s-\lambda_1\tilde{s} = \langle Lu_1-\lambda u_1-f_1,\phi^*\rangle = \langle u_1,L^*\phi^*\rangle-\lambda\langle u_1,\phi^*\rangle - \langle f_1,\phi^*\rangle = 0$. Por consiguiente, $s = \dfrac{s}{\lambda_1-\lambda}$ para $\lambda \neq \lambda_1$.

Por lo asertos de la Proposición 4, existe para cada $f_1 \in N^*$ una función $w \in E$ tal que $Lw-\lambda_1 w = f_1$. Aplicando otra vez la descomposición $w = w_1+\langle w,\phi^*\rangle\phi$, con $w_1 \in E \cap N^*$, podemos comprobar por un argumento anterior, que $Lw_1-\lambda_1 w_1 = f_1$. Dicho de otra forma, $L-\lambda_1 I: E \cap N^* \to N^*$ es sobreyectivo.

Sea $\tilde{w}_1 \in E \cap N^*$ otro elemento con $L\tilde{w}_1-\lambda_1\tilde{w}_1 = f_1$. Así tenemos $L(w_1-\tilde{w}_1) = \lambda_1(w_1-\tilde{w}_1)$, $w_1-\tilde{w}_1 \in E \cap N^*$, lo que implica, por la Proposición 2(c) que $w_1-\tilde{w}_1 = c\phi$, y, por tanto, $0 = \langle w_1-\tilde{w}_1,\phi^*\rangle = c\langle\phi,\phi^*\rangle = c$. Así pues $w_1 = \tilde{w}_1$, y hemos demostrado que $L-\lambda_1 I: E \cap N^* \to N^*$ es inyectivo. Obviamente, los conjuntos $E \cap N^*$ y N^* son subespacios lineales, cerrados de E y F. Por consiguiente, $(E \cap N^*, \|\cdot\|_E)$ y $(N^*, \|\cdot\|_F)$ son espacios de Banach. $L-\lambda_1 I: E \to F$ es una aplicación continua. Por las consideraciones previas y el teorema de la aplicación abierta, el operador $L-\lambda_1 I: (E \cap N^*, \|\cdot\|_E) \to (N^*, \|\cdot\|_F)$ es un isomorfismo topológico. Puesto que $L-\lambda I: (E \cap N^*, \|\cdot\|_E) \to (N^*, \|\cdot\|_F)$ es un operador continuo, un teorema bien conocido de análisis funcional nos garantiza la existencia de $\tilde{\delta} > 0$ tal que $L-\lambda I: (E \cap N^*, \|\cdot\|_E) \to (N^*, \|\cdot\|_F)$ es isomorfismo topológico para todo λ con $|\lambda-\lambda_1| < 2\tilde{\delta}$. Volvamos a la función $f \in \mathcal{K}$, $f \not\equiv 0$ de la hipótesis que se representa en la forma $f = f_1 + s\phi$, $s > 0$. Por ser $(L-\lambda I)u_1 = f_1$, resulta que $u_1 = u_1(\lambda) = (L-\lambda I)^{-1} f_1$ para todo $|\lambda-\lambda_1| < 2\tilde{\delta}$, lo que implica la existencia de una constante $m > 0$ tal que $\|u_1\|_E < m$ para $|\lambda-\lambda_1| < \tilde{\delta}$. Puesto que $|\frac{\partial u_1}{\partial n}| \leqslant \|u_1\|_E \leqslant m$, y gracias a las propiedades de ϕ en la Proposición 2(a), se comprueba sin dificultad como en la Proposición 1(vi) que existe una constante $\gamma > 0$ tal que

$$u_1(x,t) = u_1(\lambda)(x,t) \leqslant \gamma \cdot \phi(x,t),$$

para todo $|\lambda-\lambda_1| < \tilde{\delta}$ y todo $(x,t) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}$. De la presentación $u = u_1 + \tilde{s}\phi$ deducimos

$$u \leqslant \gamma\phi + \frac{s}{\lambda_1-\lambda}\,\phi = \left[\gamma + \frac{s}{\lambda_1-\lambda}\right]\phi < 0$$

en $\Omega\times\mathbb{R}$ para $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1+\delta$ con un cierto $\delta > 0$. Para el segundo aserto del teorema observamos que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u_1(\lambda)}{\partial n} + \tilde{s}\frac{\partial \phi}{\partial n} \geqslant -m + \frac{s}{\lambda_1-\lambda}\,\frac{\partial \phi}{\partial n} > 0$$

en $\partial\Omega\times\mathbb{R}$ para $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1+\delta$, $\delta > 0$ suficientemente pequeño.

Notas.

(i) Una modificación obvia de la demostración anterior muestra también que para $0 < |\lambda-\lambda_1| < 2\tilde{\delta}$ existe una única solución $u \in E$ de $(L-\lambda I)u = f$, para cualquier $f \in F$. Pero un tal resultado no sería nada nuevo. En efecto, por el aserto (iii) de la Proposición 1 el espectro del operador T es discreto.

(ii) En general, la constante $\delta > 0$ en nuestro teorema depende de f; véase [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] Amann, H., *Periodic solutions of semilinear parabolic equations.* **Nonlinear Analysis**, a volume in honor of E.H. Rothe, Academica Press (1978), 1-29.

[2] Castro, A., Lazer, A.C., *Results on periodic solutions of parabolic equations suggested by elliptic theory,* Bull. U.M.I. (6) 1-B (1982), 1089-1104.

[3] Clément, PH., Peletier, L.A., *An anti-maximum principle for second order elliptic operators,* J. Diff. Equ. 34 (1979), 218-229.

[4] Hess, P., *An anti-maximum principle for linear elliptic equations with an indefinite weight functions.* J. Diff. Equ. 41 (1981), 369-374.

[5] Krasnoselski, M., *Positive solution of operator equations.* Noordhoff, Groningen, 1964.

[6] Lazer, A.C., *Some remarks on periodic solutions of parabolic differential equations.* **Dynamical Systems II,** Edited by A.R. Bednarek, L. Cesari, Academic Press, New York (1982), 227-246.

[7] Protter, M., Weinberger, H., *Maximum principles in differential equations.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.

Fachbereich Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität
D-6500 Mainz
República federal de Alemania.

(Recibido en Octubre de 1985).