Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXI (1987) págs. 31-46

LA EXTENSION DE CARATHEODORY PARA MEDIDAS CON VALORES EN OPERADORES POSITIVOS*

por

Gilberto GONZALEZ y T.V. PANCHAPAGESAN

Resumen: En este trabajo desarrollamos la teoría de medidas exteriores con operadores positivos en espacios de Hilbert como valores y obtenemos una generalización del teorema de la extensión de Carathéodory para estas medidas.

En este artículo presentamos la teoría de la extensión de Carathéodory para medidas con valores en los operadores positivos -abreviadamente escribimos medidas O.P.- sobre un espacio de Hilbert, cuando las medidas son acotadas. Este trabajo ha sido motivado por el artículo de Panchapagesan [3]. Nuestra presentación constituye un método alternativo al dado por Berberian [1], para obtener la extensión de medidas O.P. En la última parte discutimos una condición suficiente para obtener el σ-anillo de los conjuntos $P^*(\cdot)$-medibles como la completación del σ-anillo generado por el anillo de conjuntos R, el dominio de la medida O.P., $P(\cdot)$.

Esta es una generalización para medidas O.P. de lo expuesto en el capítulo III de Halmos [2] y es una extensión

* Este trabajo fué financiado por el C.D.C.H. bajo los proyectos S-80-149,150.

del resultado correspondiente de Panchapagesan y Shivappa Veerapa Palled [4], para medidas con valores en los operadores positivos en espacios de Hilbert, con rango no conmutativo.

§1. Medida exterior con valores en los operadores positivos. Sea H un espacio de Hilbert complejo, fijo y B(H) el espacio de Banach de todos los operadores acotados en H.

DEFINICION 1.1. Sea R un anillo de conjuntos. Una función $P(\cdot):R \to B(H)$ se llama una *medida con valores en los operadores positivos* -abreviadamente, medida O.P.- si $P(E) \geq 0$, para cada $E \in R$, y si $P(\cdot)$ es numerablemente aditiva en R para la topología fuerte de operadores en el sentido siguiente:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)x = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)x, \qquad x \in H,$$

siempre que $\{E_i\}_1^{\infty} \subset R$, con $E_i \cap E_j = \phi$ para $i \neq j$ y $\bigcup_i^{\infty} E_i \in R$. $P(\cdot)$ se dice que es una *medida espectral en* H, si $P(\cdot)$ es una medida O.P. y $P(E)$ es una proyección hermitiana en H para cada $E \in R$.

Se sabe de [1] que una medida O.P. es una medida espectral si, y sólo si

$$P(E)P(F) = P(E \cap F), \quad E,F \in R \ ;$$

es decir, *si* $P(\cdot)$ *es multiplicativa.*

DEFINICION 1.2. Sean $\mathcal{H}$ un σ-anillo hereditario y $P^*(\cdot)$ una función de conjuntos definida sobre $\mathcal{H}$ con valores en los operadores positivos en B(H). $P^*(\cdot)$ se llama una *medida exterior* con valores en los operadores positivos (abreviadamente, *medida exterior* O.P.) si satisface:

(i) $P^*(\phi) = 0$;

(ii) $P^*(A) \leq P^*(B)$, para cada A,B en $\mathcal{H}$ con $A \subseteq B$;

(iii) $P^*(\cdot)$ es numerablemente subaditiva en el sentido siguiente: para cada $x \in H$,

$$<P^*(\bigcup_i^{\infty} A_i)x,\ x> \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} <P^*(A_i)x,\ x>$$

si $A_i \in \mathcal{H}$, $i = 1,2,\ldots$ (Notemos que la serie del lado derecho es convergente con suma finita en $\mathbb{R}^+$ ó infinita).

PROPOSICION 1.3. *Si $P^*(\cdot)$ es una medida exterior O.P. en $\mathcal{H}$, entonces $P^*(\cdot)$ es finitamente subaditiva, en el sentido siguiente:*

$$P^*(\bigcup_1^n A_i) \leqslant \sum_1^n P^*(A_i),$$

para cualquier $A_i \in \mathcal{H}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

DEFINICION 1.4. Si $P^*(\cdot)$ es una medida exterior O.P. definida en el σ-anillo hereditario $\mathcal{H}$, entonces decimos que $E \in \mathcal{H}$ es P^*-*medible* si $P^*(A) = P(A \cap E) + P^*(A \setminus E)$, $A \in \mathcal{H}$.

Nota. A la luz de la Proposición 1.3 se sigue que $E \in \mathcal{H}$ es P^*-medible si, y sólo si,

$$P^*(A) \geqslant P^*(A \setminus E) + P^*(A \cap E), \quad A \in \mathcal{H}.$$

PROPOSICION 1.5. *Si $P^*(\cdot)$ es una medida exterior O.P. definida en el σ-anillo hereditario $\mathcal{H}$, entonces la colección M_{P*} de todos los conjuntos $P^*(\cdot)$-medibles es un σ-anillo y $P^*|_{M_{P*}}$ es una medida O.P.*

Demostración. Por un argumento similar al de la demostración del Teorema A, págs.44-45, de Halmos [2], se sigue que $M_{P*(\,)}$ es un anillo y que

$$P^*(A \cap \bigcup_1^n E_i) = \sum_{i=1}^n P^*(A \cap E_i), \tag{1}$$

si $E_i \in M_{P*(\,)}$, $E_i \cap E_j = \phi$, para $i \neq j$, $i = 1,2,\ldots,n$ y $A \in \mathcal{H}$. Como $\bigcup_1^n E_i \in M_{P*(\,)}$, de (1) se sigue que

$$P^*(A) = P^*(A \cap \bigcup_1^n E_i) + P^*(A \setminus \bigcup_1^n E_i)$$
$$\geq \sum_{i=1}^n P^*(A \cap E_i) + P^*(A \setminus \bigcup_1^\infty E_i)$$

para todo n. Ahora bien,

$$\{\sum_{i=1}^n P^*(A \cap E_i)\}_{n=1}^\infty$$

es una sucesión no decreciente de operadores positivos en B(H) que está acotada superiormente por el operador $P^*(A) - P^*(A/\bigcup_1^\infty E_i)$. Por lo tanto, de la Proposición 1 de Berberian [1], se sigue que el $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n P^*(A \cap E_i)$ existe en la topología fuerte de operadores en B(H) y, además, este límite es menor o igual a $P^*(A) - P^*(A \setminus \bigcup_1^\infty E_i)$. Es decir, para $x \in H$

$$\langle P^*(A)x,x\rangle \geq \sum_1^\infty \langle P^*(A\cap E_i)x,x\rangle + \langle P^*(A\setminus \bigcup_1^\infty E_i)x,x\rangle \geq \langle P^*(A\cap \bigcup_1^\infty E_i)x,x\rangle$$
$$+ \langle P^*(A\setminus \bigcup_1^\infty E_i)x,x\rangle ,$$

donde la última desigualdad es cierta por la condición (iii) de la Definición 1.2. Por lo tanto, del comentario que aparece después de la Definición 1.4, tenemos que $\bigcup_1^\infty E_i \in M_{P^*(\cdot)}$ y

$$\begin{aligned} P^*(A) &= P^*(A \cap \bigcup_{i=1}^\infty E_i) + P^*(A \setminus \bigcup_{i=1}^\infty E_i) \\ &= \sum_{i=1}^\infty P^*(A \cap E_i) + P^*(A \setminus \bigcup_{i=1}^\infty E_i), \end{aligned} \tag{2}$$

donde la serie es convergente en la topología fuerte de operadores. Por un argumento general se sigue que $M_{P^*(\ )}$ es un σ-anillo y $P^*(\ )$ es numerablemente aditiva en $M_{P^*(\cdot)}$. ▲

DEFINICION 1.6. Una medida O.P., $P(\cdot)$ sobre un anillo de conjuntos R se llama *completa* si la condición $E \in R$, $F \subset E$ y $P(E) = 0$ implica que $F \in R$.

PROPOSICION 1.7. *Si* $P^*(\cdot)$, *y* $M_{P^*(\ )}$ *son como en la*

Proposición 1.5, entonces $P^*(\cdot)|_{M_{P^*}(\ )}$ *es una medida O.P. completa.*

§2. Medida interior O.P. Para un anillo R de subconjuntos de X, donde $X \neq \phi$, R_σ denotará al conjunto $\{E \subset X : E = \bigcup_1^\infty E_i,\ E_i \in R,\ i = 1,2,\ldots\}$. En esta sección introducimos la noción de medida interior con valores en los operadores positivos inducida por una medida O.P., $P(\cdot)$, que es acotada, denotándola por $P_*(\cdot)$; y estudiando además sus propiedades las cuales usaremos en la próxima sección.

LEMA 2.1. *Sea* $P(\cdot)$ *una medida O.P. sobre un anillo de conjuntos* R. *Si* $\{E_i\}_1^\infty$ *es una sucesión no-decreciente (no creciente) de conjuntos en* R, *con* $\bigcup_1^\infty E_i \in R$ $(\bigcap_{i=1}^\infty E_i \in R)$, *entonces para todo* $x \in H$:

$$P(\bigcup_1^\infty E_i)x = \lim_n P(E_n)x, \quad (P(\bigcap_1^\infty E_i)x = \lim_n P(E_n)x).$$

Demostración. Por ser $P(\cdot)$ monótona, y usando la Proposición 1 o su dual en Berberian [1], tenemos que $\lim_n P(E_n)x$ existe para todo $x \in H$. El resto del lema sigue por un argumento similar al del caso numérico. Ver por ejemplo, pág.38, de Halmos [2]. ▲

DEFINICION 2.2. Sea $P(\cdot)$ una función de conjuntos sobre un anillo de conjuntos R y con valores en los operadores positivos en B(H). Diremos que $P(\cdot)$ es *acotada* si existe un operador positivo T en B(H), con $P(E) \leq T$, para todo $E \in R$. En este caso se dice que T es una *cota superior de* $P(\cdot)$.

LEMA 2.3. *Si* $P(\cdot)$ *es una medida O.P. acotada en el* σ-*anillo de conjuntos* R, *y si* $A \in R_\sigma$, *con* $A = \bigcup_1^\infty E_i = \bigcup_1^\infty F_i$, *donde* $\{E_i\}$ *y* $\{F_i\}$ *son sucesiones no decrecientes de miembros de* R, *entonces*

$$\lim_n P(E_n)x = \lim_n P(F_n)x, \qquad x \in H.$$

Demostración. Sea $A_{m,n} = E_m \cap F_n$. Como R es un anillo de conjuntos, $A_{m,n} \in R$, $m,n = 1,2,\ldots$. Además, $\{A_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{A_{m,n}\}_{m=1}^{\infty}$ son sucesiones no decrecientes con $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n} = E_m$ y $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,n} = F_n$. Luego, por el Lema 2.1,

$$P(E_m)x = \lim_n P(A_{m,n})x, \quad x \in H,$$

y

$$P(F_n)x = \lim_m P(A_{m,n})x, \quad x \in H.$$

Por hipótesis, existe un $T \in B(H)$, con $T \geqslant 0$ tal que $P(E) \leqslant T$ para todo $E \in R$. Por la Proposición 1 de Berberian [1] y por la monotonía de $P(\cdot)$, tenemos que existen operadores S_1 y S_1 en $B(H)$ positivos, tales que $\lim_m P(E_m)x = S_1 x$ y $\lim_n P(F_n)x = S_2 x$, $x \in H$. De nuevo por la Proposición 1 de Berberian [1], $S_1 \geqslant P(E_m)$ para todo m y $P(E_m) \geqslant P(A_{m,n})$ para todo n. Es decir, $S_1 \geqslant P(A_{m,n})$ para cada m,n. Similarmente, $S_2 \geqslant P(A_{m,n})$ para cada m,n. Afirmamos que $S_1 = S_2 = \sup_{m,n} P(A_{m,n})$. En efecto se tiene que $\{P(A_{m,n})\}_{(m,n)\in N\times N}$ es una red no decreciente acotada superiormente por T; por tanto, el $\sup_{m,n} P(A_{m,n})$ existe como un operador positivo nuevamente por la Proposición 1 de Berberian [1]. Ahora, si S es una cota superior de $\{P(A_{m,n})\}_{(m,n)\in N\times N}$, para todo $x \in H$, se tiene $\langle Sx,x\rangle \geqslant \langle P(A_{m,n})x,x\rangle$ para m,n. Luego

$$\begin{aligned}\langle Sx,x\rangle &\geqslant \sup_m \sup_n \langle P(A_{m,n})x,x\rangle = \sup_m \langle P(E_m)x,x\rangle \\ &= \langle S_1 x,x\rangle, \quad x \in H,\end{aligned}$$

por tanto $S \geqslant S_1$. Similarmente, $S \geqslant S_2$. Luego, se sigue que $S_1 \geqslant S_2$ y $S_2 \geqslant S_1$, ya que S_1 y S_2 son cotas superiores de $\{P(A_{m,n})\}_{(m,n)\in N\times N}$. Es decir, $S_1 = S_2 = \sup_{m,n} P(A_{m,n})$. ▲

NOTA. En estas demostraciones no se necesita que el rango de $P(\cdot)$ sea conmutativo.

A la luz del lema anterior, podemos dar la definición siguiente:

DEFINICION 2.4. Si $P(\cdot)$ es una medida O.P. acotada en un anillo de conjuntos R, la *medida interior* $P_*(\cdot)$ es una función de conjuntos, definida en R_σ, como sigue

$$P_*(A) = \lim_n P(E_n), \quad A \in R_\sigma,$$

según la topología fuerte de operadores, donde $\{E_n\}$ es una sucesión no decreciente de miembros de R, con $\bigcup_1^\infty E_n = A$. Llamaremos a $P_*(\cdot)$ la *medida interior O.P. inducida por* $P(\cdot)$.

Es claro que $P_*(\cdot)$ está bien definida en R_σ, toma valores en los operadores positivos en $B(H)$ y $P_*(\cdot)|R = P(\cdot)$.

LEMA 2.5. *$P_*(\cdot)$ definida en 2.4 es monótona y finitamente aditiva en R_σ. Si T es una cota superior de $P(\cdot)$, entonces T es también una cota superior de $P_*(\cdot)$.*

Demostración. $P_*(\cdot)$ es monótona por la Definición 2.4 y la misma propiedad de monotonía de $P(\cdot)$. Para probar que $P_*(\cdot)$ es finitamente aditiva, basta probar que $P_*(A \cup B) = P_*(A) + P_*(B)$ para $A,B \in R_\sigma$, con $A \cap B = \phi$. Sin perder la generalidad asumiremos que $A = \bigcup_1^\infty E_i$, $B = \bigcup_1^\infty F_i$, donde $\{E_i\}$ y $\{F_i\}$ son sucesiones no decrecientes de miembros de R. Ya que $\{E_i \cup F_i\}$ es una sucesión no decreciente de elementos de R, con $\bigcup_1^\infty (E_i \cup F_i) = A \cup B$, de la Definición 2.4 tenemos que, para $x \in H$,

$$\begin{aligned} P_*(A \cup B)x &= \lim_n P(E_n \cup F_n)x \\ &= \lim_n \left[P(E_n) + P(F_n)\right]x \\ &= \lim_n P(E_n)x + \lim_n P(F_n)x \\ &= P_*(A)x + P_*(B)x, \end{aligned}$$

ya que $P(\cdot)$ es aditiva en R. La última parte es clara de las Definiciones 2.2 y 2.4.

LEMA 2.6. *Sea $P_*(\cdot)$ la medida interior O.P. inducida en R_σ por la medida $P(\cdot)$, O.P. acotada en R. Si $\{A_n\}$ es una* *sucesión de miembros de* R_σ, *con* $A = \bigcup_1^\infty A_n$, *entonces* $A \in R_\sigma$ *y* $P_*(A)x = \lim_n P_*(A_n)x, \quad x \in H$.

Demostración. Para cada A_n, existe una sucesión no decreciente $\{E_{n,j}\}_{j=1}^\infty$ de miembros de R con $A_n = \bigcup_{j=1}^\infty E_{n,j}$. Sea $B_n = \bigcup_{i,j=1}^n E_{i,j}$. Es claro que $B_n \in R$, $B_n \subset A_n$ y $\{B_n\}$ es una sucesión no decreciente con $\bigcup_1^\infty B_n = A$. De allí, $A \in R_\sigma$ y

$$P_*(A)x = \lim_n P\,(B_n)x, \quad x \in H.$$

Como $B_n \subset A_n$, resulta que $P(B_n) = P_*(B_n) \leq P_*(A_n)$, por la proposición anterior. Por otra parte, $\{P_*(A_n)\}$ es una sucesión no decreciente de operadores positivos en B(H) que es acotada. Por el lema 2.5 y por la Proposición 1 de Berberian [1] tenemos que para $x \in H$,

$$\begin{aligned} <P_*(A)x,x> &= \lim_n <P(B_n)x,x> \leq \lim_n <P_*(A_n)x,x> \\ &\leq <P_*(A)x,x> \end{aligned}$$

de allí que $P_*(A)x = \lim_n P_*(A_n)x, \quad x \in H$. ▲

Por el último probaremos otra propiedad importante de la medida interior O.P. inducida por una medida O.P.

LEMA 2.7. *La medida interior* $P_*(\cdot)$ *del Lema 2.6. es numerablemente subaditiva, en el sentido de que si* $A = \bigcup_1^\infty A_i$, $A_i \in R_\sigma$ $i = 1,2,\ldots$ *entonces*, $<P_*(A)x,x> \leq \sum_1^\infty <P_*(A_i)x,x>$; $x \in H$.

Demostración. Sean $A_n = \bigcup_{j=1}^\infty E_{n,j}$ y $\{E_{n,j}\}_{j=1}^\infty$ una sucesión no decreciente de miembros de R. Sea $B_n = \bigcup_{i,j=1}^n E_{i,j}$. Luego $\{B_n\} \subset R$ y es no decreciente con $\bigcup_1^\infty B_n = \bigcup_1^\infty A_n = A$; de donde $A \in R_\sigma$. Por los Lemas 2.5, 2.6 y 2.7, tenemos que

$$P(B_n) = P\Big(\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^n E_{i,j}\Big) \leq \sum_{i=1}^n P_*\Big(\bigcup_{j=1}^n E_{i,j}\Big) \leq \sum_{i=1}^n P_*(A_i),$$

por lo que

$$\langle P_*(A)x, x\rangle = \lim \langle P(B_n)x,x\rangle \leqslant \overline{\lim} \sum_{i=1}^{n} \langle P_*(A_i)x,x\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \langle P_*(A_i)x,x\rangle, \quad x \in H. \quad \blacktriangle$$

§3. La extensión de Carathéodory para medidas O.P. En esta sección probaremos el teorema de extensión de Carathéodory para medidas O.P. acotadas. R es un anillo de subconjuntos de X, S(R) el σ-anillo generado por R y $H(R)$ el σ-anillo hereditario generado por R.

LEMA 3.1. *Sea* $A \in H(R)$. *Entonces,* $S_A = \{F : F \in R_\sigma, F \supseteq A\}$ *es un conjunto no vacío, dirigido por la relación* $F < G$ *si* $F \supseteq G$. *Si* $P(\cdot)$ *es una medida O.P. acotada en* R *y* $P_*(\cdot)$ *es la medida interior O.P. inducida por* $P(\cdot)$, *entonces* $P_A = \{P_*(F) : F \in S_A\}$ *es una red no creciente, dirigida por* S_A, *que es acotada inferiormente y* $\{P_*(F)\}_{F \in S_A}$ *es convergente a un operador positivo en* B(H) , *en la topología fuerte de operadores.*

Demostración. De la definición de $H(R)$ y de la propiedad de que R_σ es cerrado para las intersecciones finitas se sigue la afirmación hecha sobre S_A. La segunda parte es una consecuencia de la monotonía de $P_*(\cdot)$ y del resultado dual de la Proposición 1 de Berberian [1]. ▲

El lema anterior justifica la definición siguiente:

DEFINICION 3.2. Si $P(\cdot)$ es una medida O.P. acotada en R y $P_*(\cdot)$ es la medida interior O.P. inducida por $P(\cdot)$, entonces definimos la función de conjuntos $P^*(\cdot)$ de $H(R)$ en B(H) por

$$P^*(A) = \lim \{P_*(F) : A \subseteq F \in R\}\ , \quad A \in H(R),$$

según la topología fuerte de operadores.

LEMA 3.3. *Sean* $P(\cdot)$, $P_*(\cdot)$ *y* $P^*(\cdot)$ *como en la Defini-*

ción 3.2. Entonces tenemos:

(i) $P^*(\cdot)$ *es una función de conjuntos en* $\boldsymbol{H}(R)$ *con valores en los operadores positivos en* $B(H)$.

(ii) $P^*(\cdot)|R_\sigma = P_*(\cdot)$.

(iii) *Si* T *es una cota superior de* $P(\cdot)$ *en* R, *(es decir,* $P(E) \leqslant T$, $E \in R$*) entonces* $P^*(A) \leqslant T$, $A \in \boldsymbol{H}(R)$.

(iv) $P^*(\cdot)$ *es monótona.*

(v) $P^*(\cdot)$ *es numerablemente subaditiva en el sentido de (iii) en la Definición 1.2.*

(vi) $P^*(\cdot)$ *es una medida exterior O.P. en* $\boldsymbol{H}(R)$, *que extiende a* $P(\cdot)$.

(vii) $P^*(\cdot)$ *tiene valores en las proyecciones si, y sólo si, los tiene* $P(\cdot)$.

Demostración. Las demostraciones de (i)-(iv) son fáciles y, por consiguiente, se omiten. Para probar (v), sea $\{A_i\}_1^\infty \subseteq \boldsymbol{H}(R)$ con $A = \bigcup_1^\infty A_i$. Dado $x \in H$, por la desigualdad de Schwarz en H,

$$|\langle (P^*(A_i)x - P_*(F))x,x\rangle| \leqslant \|(P^*(A_i) - P_*(F))x\|\,\|x\|$$

que tiende a cero cuando $F \to A_i$ según S_{A_i}, y, por lo tanto,

$$\lim_{F\in S_{A_i}} \langle P_*(F)x,x\rangle = \langle P^*(A_i)x,x\rangle.$$

Como $\{\langle P_*(F)x,x\rangle\}_{F\in S_{A_i}}$ es una red no creciente de números no negativos, su límite es su ínfimo. Por consiguiente, dados $\varepsilon > 0$ y $x \in H$, existen $F_i \in S_{A_i}$ tales que

$$\langle P^*(A_i)x,x\rangle + \frac{\varepsilon}{2^i} \geqslant \langle P_*(F_i)x,x\rangle, \qquad i = 1,2,\ldots$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^\infty \langle P^*(A_i)x,x\rangle + \varepsilon \geqslant \sum_{i=1}^\infty \langle P_*(F_i)x,x\rangle \geqslant \langle P_*(\bigcup_{i=1}^\infty F_i)x,x\rangle .$$

por el lema 2.8. Como $\bigcup_{i=1}^\infty F_i \in S_A$, se tiene que

$$P^*(A) \leqslant P_*(\bigcup_1^\infty F_i),$$

de donde,

$$<P^*(A)x,x> \leqslant <P_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)x,x> \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} <P^*(A_i)x,x> + \varepsilon .$$

Por la arbitrariedad de ε, se sigue que $P^*(\cdot)$ cumple (iii) de la Definición 1.2.

(vi) Se sigue de la Definición 1.2 y la parte anterior del lema. (vii) Basta probar que el rango de $P^*(\cdot)$ esta formado por proyecciones si $P(\cdot)$ es una medida espectral. Esto se sigue de la Proposición 1 de Berberian [1] y su resultado dual. ▲

DEFINICION 3.4. La medida exterior $P^*(\cdot)$ de la Definición 3.2 se llama la *medida exterior O.P. inducida por* $P(\cdot)$.

LEMA 3.5. *Si* $P(\cdot)$ *es una medida O.P. acotada en el anillo* R *de conjuntos y* $P^*(\cdot)$ *es la medida exterior O.P. inducida por* $P(\cdot)$, *entonces* M_{P*} *es un* σ*-anillo que contiene a* S(R).

Demostración. A la luz del Lema 3.3 y de la Proposición 1.5, basta probar que $R \subset M_{P*}$. Tomemos $E \in R$ y $A \in H(R)$. Para $x \in H$,

$$P^*(A)x = \lim_{F\in S_A} P_*(F)x = \lim_{F\in S_A} P_*(F\cap E)x + \lim_{F\in S_A} P_*(F\setminus E)x, \tag{1}$$

por el Lema 2.5. Ya que $F \in R_\sigma$ y $E \in R$, es claro que $F\cap E$ y $F\setminus E$ están en R_σ. Por lo tanto,

$$S_{A\cap E} = \{F : A\cap E \subseteq F \in R_\sigma\} \supseteq \{F\cap E : A \subseteq F \in R_\sigma\},$$

y

$$S_{A\setminus E} = \{G : A\setminus E \subseteq G \in R_\sigma\} \supseteq \{G\setminus E : A \subseteq G \in R_\sigma\}.$$

Luego,

$$P^*(A\cap E) \leqslant \lim \{P_*(F\cap E) : F \in S_A\} \tag{2}$$

y

$$P^*(A\setminus E) \leqslant \lim \{P_*(G\setminus E) : G \in S_A\}, \tag{3}$$

donde los límites son según la topología fuerte de operadores. Usando (1), (2) y (3) tenemos que

$$P^*(A) \geq P^*(A \cap E) + P^*(A \setminus E).$$

Luego $E \in M_{P^*}$. ▲

LEMA 3.6. *Si* $P(\cdot)$ *es una medida O.P. acotada en* R *entonces* $P^*(\cdot)|M_{P^*}$ *es una medida O.P. completa que extiende a* $P(\cdot)$. *Si* $\bar{P}(\cdot) = P^*(\cdot)|S(R)$, *entonces* $\bar{P}(\cdot)$ *es la única extensión de* $P(\cdot)$ *a* $S(R)$ *como una medida O.P. Si* $P(\cdot)$ *es espectral,* $\bar{P}(\cdot)$ *también lo es.*

Demostración. Por los Lemas 3.3 y 3.4 y la Proposición 1.5, basta probar la unicidad de $\bar{P}(\cdot)$ en $S(R)$. Esta sigue por un argumento similar al caso numérico (Ver pág. 54, Halmos [2]) y del Lema 2.1. ▲

En los resultados anteriores hemos probado el teorema siguiente:

TEOREMA 3.7. (*Extensión de Carathéodory*). *Sean* $P(\cdot)$ *una medida O.P. acotada en un anillo de conjuntos* R *y* $P^*(\cdot)$ *la medida exterior O.P. inducida por* $P(\cdot)$. *Entonces*

(i) M_{P^*} *es un* σ-*anillo de conjuntos que contiene a* $S(R)$.

(ii) $P^*(\cdot)$ *es una medida O.P. acotada y completa en* $M_{P^*}(\cdot)$ *que extiende a* $P(\cdot)$.

(iii) $\bar{P}(\cdot) = P^*(\cdot)|S(R)$ *es una medida O.P. acotada que extiende a* $P(\cdot)$ *a* $S(R)$ *en forma única como una medida O.P.*

(iv) $P^*(\cdot)|M_{P^*}$ *es una medida espectral si, y sólo si,* $P(\cdot)$ *lo es.*

§4. Completación de medidas O.P. acotadas. Sean $\mathbf{A}$ un σ-anillo de subconjuntos de X y $P(\cdot)$ una medida O.P. sobre $\mathbf{A}$. Hacemos $\tilde{\mathbf{A}} = \{E \cup N : E \in \mathbf{A}$ y N un subconjunto de un conjunto $F \in \mathbf{A}$ con $P(F) = 0\}$. Es claro que $\tilde{\mathbf{A}}$ es un σ-anillo que contiene a $\mathbf{A}$. Si definimos $\tilde{P}(E \cup N) = P(E)$, donde $N \subset F \in \mathbf{A}$

con $P(F) = 0$, entonces se deduce que $P(\cdot)$ es una medida O. P. completa, por un argumento similar al caso numérico. $\tilde{P}(\cdot)$ se llama la completación de $P(\cdot)$ y $\tilde{\mathbf{A}}$ es llamada la completación de $\mathbf{A}$. Estudiaremos en esta última sección las condiciones suficientes para que M_{P^*} sea la completación de $S(R)$, donde $P(\cdot)$ es una medida O.P. acotada en un anillo de conjuntos R.

DEFINICION 4.1. Sean $P(\cdot)$ una medida O.P. acotada en un anillo de conjuntos R y $P^*(\cdot)$ la medida exterior O.P. inducida por $P(\cdot)$. Entonces $P(\cdot)$ se dice *regular exterior*, si para cada $E \in H(R)$, existe un $F \in S(R)$ tal que:

(i) $E \subseteq F$ y si $G \in S(R)$ con $G \subset F \setminus E$, entonces $\bar{P}(G) = 0$, y

(ii) $P^*(E) = \bar{P}(F)$ donde $\bar{P}(\cdot) = P^*(\cdot)|S(R)$.

El conjunto $F \in S(R)$ que cumple (i), se llama un *cubrimiento medible de* E.

TEOREMA 4.2. *Si* $P(\cdot)$ *es una medida O.P. acotada en un anillo de conjuntos* R *y es además regular exterior, entonces* M_{P^*} *es la completación de* $S(R)$ *con respecto a la medida O.P.* $\bar{P}(\cdot) = P^*(\cdot)|S(R)$.

Demostración. Por un argumento usual, tenemos que $\tilde{\bar{P}}(\cdot) = P^*(\cdot)|S(R)$ y que $\tilde{S}(R) \subseteq M_{P^*}$, ya que $P^*(\cdot)$ es completa en M_{P^*}. Recíprocamente, si $E \in M_{P^*}$, por ser $P(\cdot)$ regular exterior existe un cubrimiento F medible para E. Si G es un cubrimiento medible de $F \setminus E$, entonces $E = (F \setminus G) \cup (E \cap G)$, $F \setminus G \in S(R)$ y $E \cap G \subset G \in S(R)$, con $\bar{P}(G) = P^*(F \setminus E) = P^*(F) - P^*(E) = 0$, ya que $P^*(\cdot)$ es sustractiva en M_{P^*}, por ser una medida O.P. Es decir, $E \in \tilde{S}(R)$. ▲

Ahora daremos una propiedad sobre el espacio de Hilbert H de modo que la medida $P(\cdot)$ O.P. sea regular exterior.

TEOREMA 4.3. *Si* H *es un espacio de Hilbert separable y* $P(\cdot)$ *una medida O.P. acotada en el anillo de conjuntos* R, *entonces* $P(\cdot)$ *es una medida O.P. regular exterior. Consecuentemente,* M_{P^*} *es la completación de* $S(R)$ *con respecto a*

$\bar{P}(\cdot) = P^*(\cdot)|S(R)$.

Demostración. Siendo H separable, $B(H)_1 = \{T:T \in B(H), \|T\| \leqslant 1\}$ es metrizable con la topología fuerte de operadores y así existe una base de entornos numerables de 0, que denotamos por $\{V_n\}$. Sin perder la generalidad supondremos que $P^*(H(R)) \subseteq B(H)_{Y_2}$.

Sea $A \in \mathcal{H}(R)$. Entonces existe un $D \in R_\sigma$ tal que $A \subset D = \bigcup_1^\infty E_n$, $E_n \in R$, $n = 1,2,\ldots$ Es claro que

$$P^*(A)x = \lim_{F \in S_A} P_*(F)x = \lim_{\substack{F \in S_A \\ F \subset D}} P_*(F)x, \qquad x \in H.$$

$\{P_*(F): A \subset F \subset D,\ F \in R_\sigma\}$ converge fuertemente a $P^*(A) = T \in B(H)_{Y_2}$ y $P^*(A) \geqslant 0$. Sea $S_A^D = \{F: A \subset F \subset D,\ F \in R_\sigma\}$. Dado V_1, existe F_1 tal que $P_*(F) \in T + V_1$, $F \geqslant F_1$ y $F \in S_A^D$. Dado V_2, existe $F(2) \in S_A^D$ tal que $P_*(F) \in T + V_2$, $F \geqslant F(2)$ y $F \in S_A^D$. Tome $F_2 = F_1 \cap F(2)$ y continue así sucesivamente. Se obtiene de esta manera una sucesión $T_{\alpha_1} = P_*(F_1)$, $T_{\alpha_2} = P_*(F_2), \ldots$, $T_{\alpha_n} = P_*(F_n), \ldots$ donde $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset A$, $F_i \subset S_A^D$, $i = 1,2,\ldots$ Dada una vecindad U de 0 en la topología fuerte de operadores en B(H), existe una vecindad V_{n_0} tal que $V_{n_0} \subset U$ y $P_*(F) \in T + U$ para todo $F \geqslant F_{n_0}$, $F \in S_A^D$. Es decir, $P_*(F_n)x \to Tx = P^*(A)x$, $x \in H$. Para cada n, $P^*(A) \leqslant P_*(F_n) \leqslant P_*(D)$. Sea ahora $B = \bigcap_1^\infty F_n$. Entonces $B \in S(R)$ y $B \supseteq A$. Como $P^*(\cdot)$ es monótona en S(R), por el Lema 2.1 tenemos que:

$$P^*(A) \leqslant P^*(B) = \bar{P}(B) = \lim_n \bar{P}(F_n) = \lim_n P^*(F_n) = P^*(A),$$

donde los límites existen para la topología fuerte de operadores. Luego, $P^*(A) = \bar{P}(B)$, $A \subset B \in S(R)$. Sea $G \in S(R)$ con $G \subset B \setminus A$. Entonces, como $A \setminus G \in S(R)$, $\bar{P}(B) = P^*(A) \leqslant P^*(B \setminus G) = \bar{P}(B \setminus G) = \bar{P}(B) - \bar{P}(G)$ de allí $\bar{P}(G) = 0$. Por lo tanto $P(\cdot)$ es regular exterior. La última parte se sigue del teorema anterior.

NOTA. Este teorema extiende al resultado correspondiente dado en [4] a medidas O.P. es espacios de Hilbert con rangos no necesariamente conmutativos. La conmutatividad del rango de la medida O.P. es una hipótesis esencial para la validez de los argumentos en [4].

REFERENCIAS

[1] Berberian, S.K., *Notes on spectral theory*. Van Nostrand Math. Studies. New York, 1966.

[2] Halmos, P.R., *Measure Theory*, New York, 1950.

[3] Panchapagesan, T.V., *Extension of spectral Measures*. Illinois J. Math. **16** (1972), 130-142.

[4] Panchapagesan, T.V. and Shivappa Veerappa Palled., *On vector Latticevalued measures I*. Math. Slovaca **33** (1983), 269-292.

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática
Mérida, Venezuela.

(Recibido en julio de 1986).