Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXI (1987) págs. 65-72

ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE MEDIDAS ESPECTRALES EXTENDIBLES

por

T.V. PANCHAPAGESAN*

Resumen. Si $E(\cdot)$ es una medida espectral en un espacio de Banach X, definida en un anillo R de conjuntos, daremos algunas caracterizaciones para que $E(\cdot)$ admita una extensión, en forma única, al σ-anillo generado por R, como una medida espectral en X.

Introducción. En [5], se obtiene que cada medida espectral, $E(\cdot)$, definida en un anillo de conjuntos R, con su rango contenido en un álgebra de Boole de proyecciones $\mathbb{P}$ en un espacio de Banach (complejo) X admite unívocamente una extensión a una medida espectral $\bar{E}(\cdot)$ en S(R), el σ-anillo generado por R, cuando $\mathbb{P}$ es σ-completo en el sentido de Bade [1]. En este caso, el rango de $\bar{E}(\cdot)$ esta contenido en $\mathbb{P}^{-s}$ en B(X), con respecto a la topología fuerte de operadores. El mismo resultado fue obtenido en [4], cuando R es un álgebra de conjuntos El objetivo de este artículo es dar algunas caracterizaciones de tales medidas espectrales extendibles.

* Auspiciado por los proyectos C-80-149,150 del C.D.C.H. de la Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.

§1. Preliminares. A través de este trabajo, X denotará a un espacio de Banach complejo y B(X) al álgebra de Banach de todos los operadores acotados en X con la norma usual. *Un álgebra de Boole de proyecciones* $\mathbb{P}$ en X es un subconjunto conmutativo de B(X) que cumple las condiciones siguientes:

(i) $P^2 = P, \quad P \in \mathbb{P}$;

(ii) $0 \in \mathbb{P}$;

(iii) Si $P \in \mathbb{P}$, entonces $I-P \in \mathbb{P}$;

(iv) Para P, Q en $\mathbb{P}$, $P \vee Q = P+Q-PQ \in \mathbb{P}$, $P \wedge Q = PQ \in \mathbb{P}$.

Un álgebra de Boole $\mathbb{P}$ de proyecciones en X se llamará σ-completa o completo cuando $\mathbb{P}$ es σ-completo o completo, respectivamente, en el sentido de Bade [1].

LEMA 1.1. *Un álgebra de Boole* $\mathbb{P}$ *de proyecciones en* X *está contenida en un álgebra de Boole de proyecciones σ-completa en* X, *si para todo* $x \in X$

$$N(x) = \{Ex : E \in \mathbb{P}\}$$

es relativamente débilmente compacto en X. (ver Panchapagesan [4, Lema 5]).

DEFINICION 1.2. Un espacio de Banach X tiene la propiedad B-P, si cada serie de elementos de X es convergente en la topología de X, siempre que la serie es débilmente no-condicionalmente convergente.

LEMA 1.3. *Un espacio de Banach* X *tiene la propiedad* B-P, *si y sólo si,* X *no contiene a ninguna copia isomorfa, de* c_0. (ver Bessaga y Pelczyñiski [2]).

§2. Teoremas principales.

DEFINICION 2.1. Sea $E(\cdot):R \to B(X)$, donde R un anillo de conjuntos. $E(\cdot)$ se llamará una *medida espectral* en X, si $E(\cdot)$ cumple las condiciones siguientes:

(i) $E(\phi) = 0$;

(ii) $E(\sigma \cap \delta) = E(\sigma)E(\delta)$, $\sigma, \delta \in R$;

(iii) $E(\bigcup_1^\infty \sigma_i)x = \lim_n \sum_1^n E(\sigma_i)$, $x \in X$

siempre que

$$\{\sigma_i\}_1^\infty \in R, \quad \sigma_i \cap \sigma_j = \phi, \quad i \neq j \quad y \quad \bigcup_1^\infty \sigma_i \in R.$$

Notemos que si $E(\cdot)$ es una medida espectral en X, definida en el anillo R, entonces el rango de $E(\cdot)$ es conmutativo y está contenido en el álgebra de Boole de proyecciones siguiente:

$$B_o = \{E(\sigma): \sigma \in R\} \cup \{I - E(\sigma): \sigma \in R\}.$$

En lo que sigue R denotará a un anillo de conjuntos y S(R) al σ-anillo generado por R.

TEOREMA 2.2. *La medida espectral* $E(\cdot): R \to B(X)$ *se puede extender a una medida espectral* $\bar{E}(\cdot)$ *en* S(R), *si, y sólo si, para* $x \in X$, $E(R)x$ *es relativamente débilmente compacto en* X, *donde*

$$E(R)x = \{E(\sigma)x: \sigma \in R\}.$$

Cuando la extensión $\bar{E}(\cdot)$ *existe como una medida espectral en* S(R), *entonces* $\bar{E}(\cdot)$ *es única.*

Demostración. $E(R) \in B_o$, donde $B_o = \{E(\sigma): \sigma \in R\} \cup \{I - E(\sigma): \sigma \in R\}$ es un álgebra de Boole de proyecciones en X. Si $E(R)x$ es relativamente débilmente compacto para todo $x \in X$, entonces

$$N(x) = \{Px: P \in B_o\} = E(R)x \cup \{x - E(R)x\}$$

es también relativamente débilmente compacto. Por lo tanto, por el Lema 1.1, B_o está contenido en un álgebra de Boole σ-completa de proyecciones en X, lo cual implica que el rango E(R) está contenido en un álgebra de Boole σ-completa de proyecciones en X. Ahora, usando el Teorema 6.5 de Panchapagesan y Shivappa Veerappa Palled [5], tenemos que $E(\cdot)$ es extendible, en forma única, a una medida espectral $\bar{E}(\cdot)$ en $S(R)$. Recíprocamente, si $E(\cdot)$ es extendible a una medida es-espectral $\bar{E}(\cdot)$ en $S(R)$, entonces para todo $x \in X$, $\bar{E}(\cdot)x$ es una medida vectorial acotada en $S(R)$, que es una extensión de medida vectorial $E(\cdot)x$ en R. Por lo tanto, del teorema de extensión de Kluvanek [3,p.178] resulta que el rango $E(R)x$ es relativamente débilmente compacto en X.

TEOREMA 2.3. *La medida espectral* $E(\cdot):R \to B(X)$ *admite una extensión* $\bar{E}(\cdot)$ *en* $S(R)$, *como una medida espectral en* $S(R)$, *en forma única, si, y sólo si, el rango de* $E(\cdot)$ *está contenido en un álgebra de Boole* σ*-completa de proyecciones en* X.

Demostración. A la luz del Teorema 6.5 de [5], basta probar que la condición es necesaria. Del Teorema 2.2 se sigue que $E(R)x$ es relativamente débilmente compacto para $x \in X$ y el mismo argumento en la primera parte de la demostración del Teorema 2.2 prueba la necesidad de la condición. La unicidad de la extensión es una consecuencia del Teorema 2.2.

TEOREMA 2.4. *La medida espectral* $E(\cdot):R \to B(X)$ *se puede extender a una medida espectral* $\bar{E}(\cdot)$ *en* $S(R)$, *en forma única, si, y sólo si, para todo* $x \in X$, $E(R)x \subset Y_x$, *donde* Y_x *es débilmente secuencialmente completo en* X *y*

$$\sup_{\sigma \in R} \|E(\sigma)\| < \infty$$

Demostración. Del teorema de extensión en Kluvanek , [3,p.178], se sigue que cuando $\sup_{\sigma\in R}\|E(\cdot)\| < \infty$, $E(R)x$ es relativamente débilmente compacto si, y sólo si, $E(R)x \subset Y_x$, Y_x débilmente secuencialmente completo en X. Ahora, el teorema es una consecuencia de los Teoremas 2.2 y 2.3 y el hecho que un álgebra de Boole σ-completa de proyecciones es acotada. (Ver Bade [1]).

TEOREMA 2.5. *Sea* $E(\cdot)R \to B(X)$ *que satisface las con-*

diciones (i) *y* (ii) *de la Definición 2.1. y, además, la condición* (iii) *siguiente: para* $x \in X$, $x^* \in X^*$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^* E(\sigma_i)x = x^* E(\bigcup_1^{\infty} \sigma_i)x ,$$

siempre que

$$\{\sigma_i\}_i^{\infty} \subset R, \quad \sigma_i \cap \sigma_j = \phi, \quad i \neq j \quad y \quad \bigcup_1^{\infty} \sigma_i \in R.$$

Entonces $E(\cdot)$ *es una medida espectral en* R. $E(\cdot)$ *se puede extender como una medida espectral en* $S(R)$ *si, y sólo si, para todo* $x \in X$, *existe* $y_x \in X$ *tal que*

$$\sum x^* E(\sigma_i)x = x^* y_x , \tag{*}$$

siempre que

$$\{\sigma_i\}_1^{\infty} \subset R, \quad \sigma_i \cap \sigma_j = \phi, \quad i \neq j.$$

Demostración. Del teorema de Orlicz-Pettis, $E(\cdot)$ es numerablemente aditiva en la topología fuerte de operadores y así $E(\cdot)$ es una medida espectral en R. La condición (*), es equivalente a la aserción de que $E(R)x$ es relativamente débilmente compacto (por la equivalencia de (vi) y (iii) del teorema de extensión en Kluvanek [3,pp.178-179]). La conclusión sigue entonces del Teorema 2.2.

Usando el resultado de Uhl[6], obtenemos otra caracterización.

TEOREMA 2.6. *Sea* $E(\cdot):R \to B(X)$ *una medida espectral.* $E(\cdot)$ *admite una extensión* $\bar{E}(\cdot)$ *en* $S(R)$, *en forma única, como una medida espectral, si y sólo si, para todo* $x \in X$ *existe* μ_x *no negativa, finitamente aditiva y acotada en* R *tal que* $\mu_x(\sigma) \to 0$, $\sigma \in R$, *implica que* $E(\sigma)x \to 0$.

Demostración. Por la equivalencia de (i), (ii) y (xii) del teorema de extensión en Kluvanek [3], ó por Uhl [6], tenemos que la condición es equivalente a la aserción de que $E(R)x$ es relativamente débilmente compacto, para todo $x \in X$. La conclusión sigue ahora del Teorema 2.2.

TEOREMA 2.7. *Sea* $E(\cdot):R \to B(X)$ *una medida espectral.* $E(\cdot)$ *admite una extensión a la medida espectral* $\bar{E}(\cdot)$ *en* $S(R)$ *si, y sólo si,* $E(\cdot)$ *cumple las condiciones siguientes:*

(i) $\sup_{\sigma\in R}\|E(\sigma)\| < \infty$

(ii) *Si* $\mu_x^*:H(R) \to R^+$, $H(R)$ *el* σ*-anillo hereditario generado por* R, *donde* μ_x^* *se define por*

$$\mu_x^*(\sigma) = \inf\{ \sum_{k=1}^{\infty} \|E(\sigma_k)x\|, \quad \bigcup_i^{\infty}\sigma_k \supset \sigma, \quad \sigma_k \in R. \quad k = 1,2,\ldots\}$$

para $x \in X$, *entonces* $\mu_x^*(\sigma) < \infty$ *para todo* $\sigma \in S(R)$ *y para todo* $x \in X$.

(iii) R *es* $r^*(E(\cdot)x)$*-denso en* $S(R)$, *para todo* $x \in X$, *en el sentido que dados* $\sigma \in S(R)$ *y* $\varepsilon > 0$, *existe un* $\delta_x \in R$ *tal que*

$$\mu_x^*(\sigma \,\Delta\, \delta_x) < \varepsilon.$$

Demostración. La condición es suficiente, a la luz del Teorema 2.2 y de la equivalencia de las condiciones (ii) y (xi) del teorema de extensión en Kluvanek [3]. La condición es necesaria. En efecto, del Teorema 2.3 el tango de $E(\cdot)$ está contenido en un álgebra de Boole σ-completa de proyecciones en X, lo cual implica que (i) es cierta. Como $E(\cdot)x$ admite extensión a $\bar{E}(\cdot)x$ en $S(R)$, por la equivalencia de (i) y (xi) del teorema de extensión en Kluvanek [3], las condiciones (ii) y (iii) son ciertas.

Vamos a dar el último teorema de caracterización.

TEOREMA 2.8. *Sea* X *un espacio de Banach que no contiene a ningún subespacio isomorfo a* c_0 *y sea* $E(\cdot):R \to X$ *una medida espectral. Entonces, existe una medida espectral* $\bar{E}(\cdot)$ *en* $S(R)$, *que extiende a* $E(\cdot)$ *en forma única, si y sólo si,*

$$\sup_{\sigma\in R}\|E(\sigma)\| < \infty \qquad (**)$$

o, equivalentemente, el rango de E *en* R *está contenido en un álgebra de Boole acotada de proyecciones.*

Demostración. Primero, observamos que la condición (**) es equivalente a la siguiente:

$$\sup\{\|E(\sigma)\| : \sigma \in B_0\} < \infty,$$

donde

$$B_0 = \{R(\sigma): \sigma \in R\} \cup \{I-E(\sigma): \sigma \in R\}$$

es un álgebra de Boole de proyecciones que contiene a E(R). Si X es un espacio de Banach que cumple la hipótesis del teorema, entonces por el Lema 1.3, X tiene la propiedad de B-P. Si

$$\sup_{\sigma\in R}\|E(\sigma)\| < \infty,$$

se tiene que para cada $x \in X$, la medida vectorial $E(\cdot)x$ es acotada y $E(R)x \subset X$, donde X tiene la propiedad de B-P. Por lo tanto, de la equivalencia de (ii) y (iv) del teorema de extensión en Kluvanek [3] y del Teorema 2.2, sigue la suficiencia de la condición. La necesidad de la condición es una consecuencia del Teorema 2.3 y del hecho que un álgebra de Boole σ-completa de proyecciones es acotada en B(X).

COROLARIO 2.9. *Una medida espectral* $E(\cdot)$ *en* R *en un espacio de Banach débilmente secuencialmente completo* X *se puede extender a una medida espectral* $\bar{E}(\cdot)$ *en* S(R) *si, y sólo si,* E(R) *es acotado en* B(X).

Demostración. Sigue del Teorema 2.8, por el hecho que X no contiene a ningún subespacio isomorfo a c_0, ó del Teorema 2.4, donde tomamos $Y_x = X$, para todo $x \in X$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bade, W.G., *On Boolean algebras of projections and algebras of operators*. Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 345-360.

[2] Bessaga, C. y Pelczynski, A., *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*. Studia Math. **17** (1958) 151-164.

[3] Kluvánek, I., *Extension and closure of vector measure. Vector and operator valued measures and applications.* Snowbird Resort, Academic Press (1973) 175-190.

[4] Panchapagesan, T.V., *Extension of spectral measures.* Illinois J. Math. **16** (1972), 130-142.

[5] Panchapagesan, T.V. y Shivappa Veerappa Palled, *On vector lattice-valued measures I.*, Math. Slovaca 33, (1983) 269-292.

[6] Uhl, J.J., *Extensiones and decompositions of vector measure.* J. London Math. Soc. (2) **3** (1971) 672-676.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de los Andes
Merida, VENEZUELA.

(Recibido en julio de 1986).