EL PROBLEMA DE LA DUPLICACION DEL CUBO

Por Alberto Rodríguez S. J.

Conocida es la propiedad de que el cuadrado cuyo lado es la diagonal de otro cuadrado tiene un área doble. Llevados de ese impulso de generalización tan característico en los matemáticos, ya los geómetras griegos intentaron encontrar la arista de un cubo de volumen doble al de otro dado.

El origen de este problema, según otros, se relata en una curiosa leyenda. Eco de ella se hizo Eratóstenes, famoso entre los aprendices de Matemáticas por su criba para hallar los números primos, en su libro *De locis ad medietates* publicado en el s. III. a. C.

Padeciendo las ciudades griegas una terrible peste, consultaron al oráculo de Apolo residente en Delos qué debían hacer para aplacar a los dioses. La respuesta ordenaba construir una ara doble de la existente en el templo. Era ésta de forma cúbica, y los ciudadanos pronto erigieron otra duplicando las aristas del cubo primitivo, pero la peste no desaparecía. Consultado de nuevo el oráculo, les descubrió cómo no habían cumplido bien la condición impuesta. Conocido el error fue consultado Platón sobre este problema, cuya solución él y sus discípulos investigaron ardientemente. El recuerdo y motivo de esta leyenda hizo que en el lenguaje matemático sea conocida la duplicación del cubo con el nombre de "problema délico".

Numerosos fueron los esfuerzos realizados para resolverlo. Relativamente pronto, pudieron encontrar su planteamiento adecuado, y numerosos procedimientos gráficos e ingeniosas curvas auxiliares para obtener la solución, *pero fracasaron en sus intentos de encontrarla empleando exclusivamente la regla y el compás.* Durante muchos siglos esta imposibilidad constituyó un enigma. El descubrimiento y progreso del Algebra, de la Geometría Analítica y de la Teoría de Ecuaciones, pusieron en manos de los investigadores poderosos instrumentos con los que de nuevo iniciaron el asalto a este, al parecer, inexpugnable problema.

Puede darnos idea de cuántos trabajos se harían sobre este tema, la resolución tomada en 1775 por la Academia de Ciencias de París de no admitir más memorias para ser examinadas por los miembros de su corporación relativas a este problema. Indudablemente, también influiría la circunstancia de existir muchos ilusos e ignorantes que creían haber resuelto un problema del que múltiples y variadas soluciones se habían ya encontrado desde hacía más de dos mil años. El punto debatido por entonces entre los verdaderos matemáticos era, no el hallar un método más, sino *la construcción con regla y el compás, o bien la demostración de su imposibilidad.*

Fue un francés, P. Wantzel, quien en 1837 encontró las condiciones necesarias y suficientes para resolver una ecuación algebraica de coeficientes racionales por los medios geométricos exigidos: la ecuación a que da lugar la duplicación del cubo no cumple estas condiciones, luego tal construcción es imposible.

La legítima curiosidad de tantos matemáticos, mantenida a través de más de veinte siglos, quedaba de este modo satisfecha, ofreciéndonos también un magnífico ejemplo del premio que alcanza la infatigable y sincera búsqueda de la verdad.

Vamos a exponer ahora la primera solución del problema délico, obtenida por procedimientos puramente geométricos, y luégo esa misma solución utilizando la Geometría Analítica. Esta sencilla comparación nos permitirá apreciar las grandes ventajas de nuestros actuales medios de estudio, por la brevedad y sencillez de sus metódicos cálculos.

Hipócrates de Chios (n. 450 a. C.) observó que la construcción del lado de un cuadrado de área doble a un rectángulo dado se obtenía hallando una media proporcional. Tal hecho le indujo a un ingenioso planteamiento del problema: la intercalación de dos medias proporcionales entre dos longitudes dadas. Sean estas a y b; entonces, si

$$a : x = x : y = y : b;$$

$$x^2 = ay,\ y^2 = bx;\ x^4 = a^2y^2 = a^2\,bx;$$

$$x^3 = a^2b.$$

Haciendo en la última igualdad $b = na$, obtendremos el caso general, es decir, la arista de un cubo de volumen n veces el dado. En particular, para $n = 2$, tendremos la solución que buscamos.

Aunque Hipócrates no supo hallar geométricamente estas medias proporcionales, dió un paso decisivo en la resolución del problema, dejando una sólida base para ulteriores investigaciones.

Fue un discípulo de Platón, Arquitas de Tarento (440 - 380 a. C.) el primero en hallar una solución, bien notable si consideramos que su construcción geométrica no es plana, sino espacial, en la que revela conocimientos no comunes en su tiempo. Basándose en el anterior planteamiento, reduce el problema a la determinación de los puntos comunes a tres cuerpos: un cono, un toro y un cilindro.

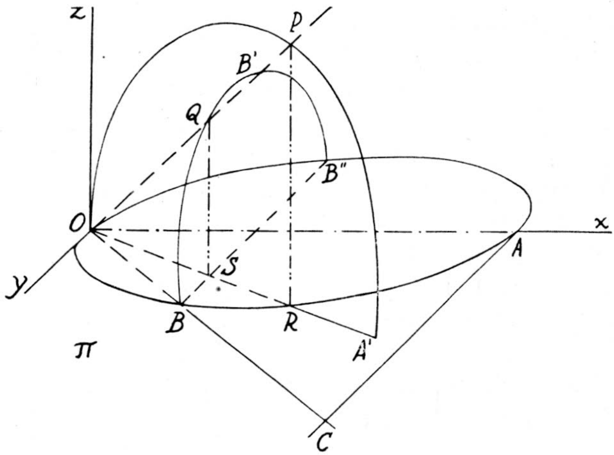

Fig. 1

Consideremos en un plano π (fig. 1.) un círculo de diámetro $OA = a$, y una cuerda $OB = b$, siendo a y b los segmentos entre los que deseamos intercalar las dos medias proporcionales. Prolonguemos la cuerda OB hasta que corte en C a la tangente a la circunferencia en el punto A; haciendo girar el triángulo OAC sobre OA, se engendrará un cono.

En un plano π', perpendicular a π, consideremos ahora el semicírculo de diámetro OA, e imaginemos que gira alrededor de la recta perpendicular en O al plano π. El cuerpo engendrado será un semitoro de radio interior nulo.

Finalmente, consideremos el cilindro recto cuya curva directriz es la circunferencia OBA sobre el plano π. La intersección de las dos últimas superficies es una curva alabeada; el punto buscado será el de encuentro de esta curva con el cono. En efecto: por estar el punto B en la generatriz OC del cono, describirá al girar una semicircunferencia cuyo plano $BB'B''$ y cuyo diámetro BB'' serán respectivamente perpendiculares a π y OA.

Sea $OA'P$ la posición del círculo generador del toro, y R el punto en que OA' corta a la circunferencia OAB. Si desde P (intersección del cono con la curva alabeada), bajamos la perpendicular al plano π, su pie será precisamente el punto R, ya que P pertenece al cilindro cuya base es la circunferencia OAB.

La generatriz OP del cono encuentra a la circunferencia $BB'B''$ en Q, y OA' a su diámetro BB'' en S. Unamos P con A', y Q con R y con S (fig. 2.). QS es perpendicular al plano π ya que es la intersección de dos planos que lo son por construcción, luego QS será perpendicular a cualquier recta de π, en particular a BB''.

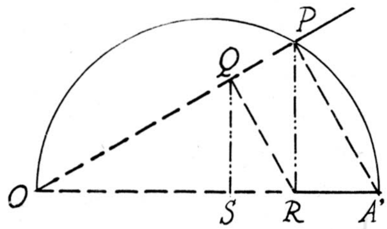

Fig. 2

Entonces, en la semicircunferencia $BB'B''$:

$$QS^2 = BS \, . \, SB''$$

y en la circunferencia OBA:

$$BS \, . \, SB'' = OS \, . \, SR,$$

de donde

$$QS^2 = OS \, . \, SR.$$

Luego el ángulo OQR es recto; también lo es el OPA', por inscrito en la semicircunferencia OPA', luego las rectas QR y PA' son paralelas y, por tanto, semejantes los triángulos OPA', OPR y OQR (fig. 2.).

Podemos, pues, establecer las siguientes proporciones:

$$OA' : OP = OP : OR = OR : OQ,$$

pero

$$OQ = OB = b, OA' = OA = a,$$

luego sustituyendo

$$a : OP = OP : OR = OR : b.$$

Para resolver ahora este problema analíticamente, consideremos las ecuaciones de estos tres cuerpos, cuya sencilla deducción dejamos como ejercicio al lector. ["Hint": ecuaciones de la directriz del cono:

$$y^2 + z^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - b^2), \quad x = \frac{b^2}{a} \; ;$$

ecuaciones del círculo generatriz del toro:

$$x^2 + z^2 - ax = 0, \ y = 0].$$

Tomando OA como eje x, la perpendicular en O a OA en el plano π como eje y, y la perpendicular en O al plano π, como eje z, las ecuaciones de las superficies serán:

(1) cono: $$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2} x^2,$$

(2) cilindro: $$x^2 + y^2 = ax,$$

(3) toro: $$x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Para obtener las soluciones de este sistema, de (1) y (2):

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2}{b^2}$$

y comparando este resultado con la ecuación (3):

$$\frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{b},$$

que es el resultado obtenido anteriormente, ya que

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{y} \quad OR = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Operando con el resultado obtenido, llegamos a la expresión.

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{OR}{b}\right)^3,$$

luego los volúmenes de los cubos de la aristas OR y b, están en la relación a/b. Si hacemos $a = 2b$, OR será entonces la arista del cubo duplo.