SOLUCION DE PROBLEMAS

2. Demostrar que si el número entero a es un cubo perfecto, $(a - 1)\, a\, (a + 1)$ es divisible por 504.

Solución. Como $504 = 7 \times 8 \times 9$, hay que demostrar que $(a - 1)\, a\, (a + 1)$ es divisible por 7, por 8 y por 9.

Si a es par, entonces es divisible por 8. Si a es impar, entonces uno de los dos números $a - 1$ o $a + 1$ es divisible por 4 y el otro por 2. Total: $(a - 1)\, a\, (a + 1)$ es siempre divisible por 8.

Si a es el cubo de un número b divisible por 3, entonces a es divisible por 27 y por lo tanto por 9. Si $a = b^3$ y $b = 3k + 1$, entonces $a = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1$, es decir $a - 1$ es divisible por 9. Si $b = 3k - 1$, $a = 27k^3 - 27k^2 + 9k - 1$, es decir $a + 1$ es divisible por 9.

Finalmente si $a = b^3$ y b es divisible por 7, a lo es también. Si b es de la forma $7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 4$, entonces $a - 1$ es divisible por 7, si b es de la forma $7k + 3$, $7k + 5$, $7k + 6$, entonces $a + 1$ es divisible por 7.

Juan Gómez Mora (Medellín).

5. Demostrar que en la sucesión $2^1 + 1$, $2^2 + 1$, $2^4 + 1$, $2^8 + 1, \ldots, 2^{2^n}+1, \ldots$ dos términos son siempre primos entre ellos.

La solución siguiente es debida al Profesor Jorge Pólya de Stanford University (California).

Pongamos $a_n = 2^{2^n}+1$. Entonces

$$\frac{a_{n+k}-2}{a_n} = \frac{\left(2^{2^n}\right)^{2^k}-1}{2^{2^n}+1} = \left(2^{2^n}\right)^{2^k-1} - \left(2^{2^n}\right)^{2^k-2} - \ldots - 1,$$

es decir $(a_{n+k} - 2) / a_n$ es un número entero, sea b. Si $d > 0$ divide a a_{n+k} y a a_n, entonces por la igualdad

$$\frac{a_{n+k}}{d} - \frac{2}{d} = \frac{a_n}{d} b$$

se ve que $2/d$ es un número entero, es decir que d divide a 2. Como a_n es impar, $d = 1$. Entonces a_n y a_{n+k} son siempre primos entre ellos. q. e. d.

Observación. La proposición muestra inmediatamente que existe un número infinito de números primos, puesto que un número primo no puede dividir a dos términos de la sucesión.

Para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ el valor de $2^{2^n}+1$ es respectivamente 3, 5, 17, 257, 65537, que son números primos. No se sábe actualmente si hay otro número primo de la forma $2^{2^n}+1$; un tal número primo se llama "número primo de FERMAT".

9. Entre ciertos objetos hay dos que tienen color diferente y dos que tienen forma diferente. Demostrar que hay dos que son diferentes de forma y de color.

Solución. Supongamos que A y B tienen color diferente y que α y β tienen forma diferente (los cuatro objetos no son necesariamente distintos). Si A y B tienen también forma diferente, estamos listos. Supongamos entonces que A y B tienen la misma forma. Entonces por lo menos uno de los dos objetos α y β debe tener forma diferente de la forma común de A y de B, sea este por ejemplo α.

Si α tiene el color de A, será (α, B) la pareja que buscamos. Si α tiene el color de B, lo será (α, A). Si el color de α es diferente de el de A y de el de B, cada una de las parejas (α, A) y (α, B) nos satisfará.

Ernesto Gutiérrez Bodmín (Barranquilla).

Otra solución de Joaquín Alvarez Arango.