Revista

de

Matemáticas Elementales

VOLUMEN II. Mayo de 1953 FASCICULO 2

Tarifa Postal Reducida. — Licencia Nº 1993 del Ministerio de Correos y Telégrafos.

NUMEROS PRIMOS III.

Por J. Horváth.

9. Después de haber expuesto con detalle el papel de los números primos en la teoría de la divisibilidad, nos ocuparemos, en el resto de esta serie de artículos, del problema de determinar la frecuencia con que ocurren los números primos en la sucesión de los números enteros positivos. Las consideraciones que han sido fáciles y elementales en los artículos precedentes van a volverse ahora más y más difíciles, pero esperamos que el lector, con lapiz y papel compruebe cada paso del raciocinio y haga el esfuerzo necesario para conocer una de las partes más atractivas de la Teoría de los Números.

El primer teorema que demostraremos se encuentra, junto con la demostración, en el libro IX. de Euclides y dice:

Hay un número infinito de números primos.

En efecto, mostraremos que dados n números primos, donde n es un entero positivo cualquiera, siempre existe otro número primo, diferente de ellos, lo cual implica claramente que debe haber una infinidad de números primos.

Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ n números primos y consideremos el número

$$a = p_1\ p_2\ \ldots\ p_n + 1.$$

a no es divisible por ninguno de los números $p_1, p_2, \ldots, p_n$, porque la división de a por cualquiera de ellos da el residuo 1. Por otro lado a tiene por lo menos un divisor primo p (Vol. I., p. 31), que es diferente de los n números primos dados.

El lector podrá encontrar otra demostración del teorema precedente en la solución del problema 5 (pp. 15-16).

El objeto de este artículo es demostrar el teorema siguiente, que es mucho más preciso:

Cualquiera que sea el número entero positivo n, *entre* n *y* 2n *siempre se encuentra por lo menos un número primo.*

Ejemplos:

si	$n = 2$,	$2n = 4$	y	$p = 3$,
	$n = 3, 4$,	$2n = 6, 8$		$p = 5$,
	$n = 5, 6$,	$2n = 10, 12$		$p = 7$,
	$7 \leqslant n \leqslant 12$,	$14 \leqslant 2n \leqslant 24$		$p = 13$,
	$13 \leqslant n \leqslant 22$,	$26 \leqslant 2n \leqslant 44$		$p = 23$,
	$23 \leqslant n \leqslant 42$,	$46 \leqslant 2n \leqslant 84$		$p = 43$,
	$43 \leqslant n \leqslant 82$,	$86 \leqslant 2n \leqslant 164$		$p = 83$,
	$83 \leqslant n \leqslant 100$,	$166 \leqslant 2n \leqslant 200$		$p = 101$.

BERTRAND conjeturó este teorema en 1845 y fue CHEBISHEFF quien lo demostró por primera vez en 1852. La demostración que explicaremos a continuación se debe a PAUL ERDÖS.

La demostración del teorema es basada largamente sobre consideraciones relativas a *factoriales* y a *coeficientes binomiales,* nociones que tienen gran importancia en la teoría combinatoria. Como esta rama de la aritmética no forma parte del programa del bachillerato, vamos a exponer esos conceptos con más detalles de lo que se necesitaría para los fines del presente artículo.

10. Denotaremos por $n!$ y llamaremos "*n factorial*", al número

$$n! = 1.\,2.\,3 \ldots n,$$

donde n es un número entero positivo. Además pondremos $0! = 1$. Así por ejemplo

$$1! = 1,\ 2! = 1 \times 2 = 2,\ 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6,$$

$$10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3{,}628.000,$$

y se tiene la relación evidente

$$(n+1)! = n!\,(n+1).$$

El significado de $n!$ en la teoría combinatoria es el siguiente. Si tenemos n objetos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, vamos a llamar **permutación** cada orden en que se pueden escribir estos n objetos.

Demostraremos que *n objetos tienen exactamente $n!$ permutaciones.*

Así por ejemplo si $n = 2$, $n! = 2$ y hay las permutaciones siguientes (denotaremos los objetos por 1, 2, 3, ... en vez de $A_1, A_2, A_3, \ldots$):

$$(1, 2) \text{ y } (2, 1).$$

Si $n = 3$, $n! = 6$ y hay las permutaciones:

(1, 2, 3)	(2, 1, 3)	(3, 1, 2)
(1, 3, 2)	(2, 3, 1)	(3, 2, 1).

Si $n = 4$, $n! = 24$ y hay las permutaciones:

(1, 2, 3, 4)	(2, 1, 3, 4)	(3, 1, 2, 4)	(4, 1, 2, 3)
(1, 2, 4, 3)	(2, 1, 4, 3)	(3, 1, 4, 2)	(4, 1, 3, 2)
(1, 3, 2, 4)	(2, 3, 1, 4)	(3, 2, 1, 4)	(4, 2, 1, 3)
(1, 3, 4, 2)	(2, 3, 4, 1)	(3, 2, 4, 1)	(4, 2, 3, 1)
(1, 4, 2, 3)	(2, 4, 1, 3)	(3, 4, 1, 2)	(4, 3, 1, 2)
(1, 4, 3, 2)	(2, 4, 3, 1)	(3, 4, 2, 1)	(4, 3, 2, 1)

La afirmación se demuestra por inducción completa. Para $n = 1$ la afirmación es evidente, puesto que un objeto sólo se puede ordenar de $1! = 1$ maneras. Supongamos que la afirmación sea válida para $n = m$. Si tenemos $m + 1$ objetos: $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{m+1}$, podemos obtener una permutación de ellos de la manera siguiente: Primero ordenamos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ y después intercalamos A_{m+1} entre dos objetos, o lo ponemos antes del primero o detrás del último. Como $A_1, A_2, \ldots, A_m$ tiene $m!$ permutaciones por la hipótesis de inducción, y como A_{m+1} se puede colocar de $m + 1$ maneras diferentes, los $m + 1$ objetos tendrán $m!\,(m+1) = (m+1)!$ permutaciones, lo que demuestra la afirmación.

Puesto que cada número inferior o igual a n divide a $n!$, se puede afirmar con más razón que cada número primo inferior o igual a n será factor primo de $n!$. El problema que nos interesa para este artículo, es determinar que si p es un número primo $1 \leqslant p \leqslant n$, ¿con qué exponente entrará p en la descomposición de $n!$ en números primos? Con otras palabras, si

$$n! = p_1^{\alpha_1} \; p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} ,$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son los números primos inferiores o iguales a n, queremos obtener una fórmula para α_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$.

Para expresar en forma cómoda el resultado, vamos a introducir el concepto de **parte entera** de un número real. Siendo ρ un número real, denotaremos por $[\rho]$ el número entero inmediatamente inferior o igual a ρ; $[\rho]$ se llama la parte entera de ρ. Ejemplos:

$$[5] = 5, \quad \left[\frac{10}{3}\right] = 3, \quad \left[\frac{1}{3}\right] = 0, \qquad [\sqrt{2}\,] = 1,$$

$$[\pi] = 3, \quad \left[-\frac{9}{7}\right] = -2, \quad [-2\pi] = -7.$$

Es claro que si a es un entero, b un entero positivo, y si $a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$ (cf. Vol. I., p. 26), entonces $\left[\dfrac{a}{b}\right] = q$.

Con esta notación podemos enunciar que *si* p *es un número primo,* $1 < \mathrm{p} \leqslant \mathrm{n}$ *y* p^{α} *es la más alta potencia de* p *que divide a* n!, *entonces*

$$(10,\ 1) \qquad \alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

donde la suma va hasta el término en que la potencia de p *ya es superior a* n, *exclusive.* Observemos que si $p^{\beta} > n$, entonces ya $\left[\dfrac{n}{p^{\beta}}\right] = 0$. Este resultado es de Adrien-Marie Legendre (1752 - 1834).

Puesto que $n! = 1.\ 2.\ 3 \ldots n$, los números que contribuyen por lo menos con el factor p a $n!$ son

$$1 \cdot p, 2 \cdot p, \ldots, u \cdot p,$$

donde $up \leqslant n < (u+1)p$, es decir $u = \left[\dfrac{n}{p}\right]$.

Escribamos otra vez la sucesión de los múltiplos de p hasta n con más detalle:

$$1 \cdot p, 2 \cdot p, \ldots, p \cdot p, (p+1) \cdot p, \ldots, 2p \cdot p, \ldots, p^2 \cdot p, \ldots, up.$$

Se ve que entre los múltiplos de p hay unos que contribuyen por lo menos con el factor p^2 a $n!$, estos son

$$1 \cdot p^2, 2 \cdot p^2, \ldots, v \cdot p^2,$$

donde $vp^2 \leqslant n < (v+1)p$, es decir $v = \left[\dfrac{n}{p^2}\right]$.

En general, si β es un entero positivo, los múltiplos de p que contribuyen por lo menos con el factor p^β a $n!$ son los números

$$1 \cdot p^\beta, 2 \cdot p^\beta, \ldots, w \cdot p^\beta, \tag{10, 2}$$

donde $wp^\beta \leqslant n < (w+1)p^\beta$, es decir $w = \left[\dfrac{n}{p^\beta}\right]$.

Si ahora un número k $(1 < k \leqslant n)$ contribuye exactamente con p^γ a $n!$ (es decir si p^γ es la más alta potencia de p que divide a k), entonces k se encuentra en exactamente γ sucesiones de la forma (10, 2). Luego el exponente de p en la descomposición de $n!$ es el número de los términos en todas las sucesiones (10, 2), es decir

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^\beta}\right] + \ldots$$

Q. E. D.

Ejemplo: Sea $n = 1.000$ y $p = 7$. La fórmula da para este caso:

$$\alpha = \left[\frac{1.000}{7}\right] + \left[\frac{1.000}{7^2}\right] + \left[\frac{1.000}{7^3}\right] =$$

$$= \left[\frac{1.000}{7}\right] + \left[\frac{1.000}{49}\right] + \left[\frac{1.000}{343}\right] =$$

$$= 142 + 20 + 2 = 164,$$

entonces 7^{164} es la más alta potencia de 7 que divide a 1.000!

Ejercicio: Descomponer 100! en factores primos (sin calcular su valor).

11. Sea n un número entero no negativo y k un número entero que verifica $0 \leqslant k \leqslant n$. El número

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,k}$$

se llama **coeficiente binomial** de NEWTON. La razón de esta denominación se verá un poco más tarde.

Ejemplos:

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{n} = 1,\ \binom{6}{2} = \frac{6\,.\,5}{1\,.\,2} = 15.$$

De la definición resulta de manera evidente que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Además tenemos la relación

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

En efecto

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!\,(k+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} + \frac{n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!\,(k+1+n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1},$$

puesto que $(n+1) - (k+1) = n - k$.

La última relación y el hecho de que $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ nos permiten escribir los coeficientes binomiales en el esquema siguiente, llamado triángulo de PASCAL:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

En este esquema $\binom{n}{k}$ es el k-ésimo número en la n-ésima línea, empezando la numeración siempre por cero y no por uno. Así por ejemplo $\binom{7}{4} = 35$. De la última relación demostrada se sigue que cada elemento en el triángulo de PASCAL es la suma de los dos números que figuran en la fila precedente inmediatamente por encima de él. En particular vemos que cada coeficiente binomial es un número entero, lo que no es inmediatamente evidente de su definición.

Expliquemos el significado de los coeficientes binomiales en la combinatoria. Si tenemos n objetos, vamos a llamar **combinación**

de orden k de n elementos cada selección de k elementos entre los n. Por ejemplo si tenemos cinco objetos 1, 2, 3, 4, 5, existen las siguientes combinaciones de orden 3 de los 5 elementos:

$$\begin{array}{ll} (1, 2, 3) & (1, 4, 5) \\ (1, 2, 4) & (2, 3, 4) \\ (1, 2, 5) & (2, 3, 5) \\ (1, 3, 4) & (2, 4, 5) \\ (1, 3, 5) & (3, 4, 5). \end{array}$$

En general el número de las combinaciones de orden k de n elementos es igual a $\binom{n}{k}$. En efecto, n objetos tienen $n!$ permutaciones. Cuántas permutaciones tienen los mismos números en los primeros k puestos? Si permutamos entre sí los primeros k números de una permutación (cosa que podemos hacer de $k!$ maneras diferentes) quedan los mismos k números en los primeros k puestos. De la misma manera si permutamos los últimos $n - k$ números entre sí (lo que se puede hacer de $(n - k)!$ maneras diferentes) también quedan los mismos k números en los primeros k puestos. O sea que hay en total

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

permutaciones que llevan los mismos k números en los primeros k puestos y por lo tanto hay $\binom{n}{k}$ combinaciones de orden k de n elementos.

Demostremos ahora el

TEOREMA BINOMIAL DE NEWTON. *Sean ξ y η dos números reales y* n *un número entero positivo. Entonces*

$$(\xi + \eta)^n = \xi^n + \binom{n}{1} \xi^{n-1} \eta + \binom{n}{2} \xi^{n-2} \eta^2 + \\ + \binom{n}{3} \xi^{n-3} \eta^3 + \ldots + \eta^n.$$

Este teorema explica la denominación *coeficiente binomial.* Los $\binom{n}{k}$ son los coeficientes que figuran en las potencias de un binomio (la palabra binomio quiere decir suma de dos términos, como $\xi + \eta$).

Ejemplos:

$$(\xi + \eta)^2 = \xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2,$$

$$(\xi + \eta)^6 = \xi^6 + 6\xi^5\eta + 15\xi^4\eta^2 +$$
$$+ 20\xi^3\eta^3 + 15\xi^2\eta^4 + 6\xi\eta^5 + \eta^6.$$

Demostraremos el teorema por inducción completa. La afirmación es cierta para $n = 1$:

$$(\xi + \eta)^1 = \xi + \eta.$$

Supongamos que para $n = m$ tengamos

$$(\xi + \eta)^m = \xi^m + \binom{m}{1}\xi^{m-1}\eta + \binom{m}{2}\xi^{m-2}\eta^2 + \ldots + \eta^m,$$

entonces tendremos

$$(\xi + \eta)^{m+1} = (\xi + \eta)\,(\xi + \eta)^m =$$

$$= \xi^{m+1} + \binom{m}{1}\xi^m\eta + \binom{m}{2}\xi^{m-1}\eta^2 + \ldots + \xi\eta^m +$$

$$+ \binom{m}{0}\xi^m\eta + \binom{m}{1}\xi^{m-1}\eta^2 + \ldots + \binom{m}{m-1}\xi\eta^m + \eta^{m+1}.$$

El coeficiente de $\xi^{m+1-k}\eta^k$ es igual a

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k},$$

entonces

$$(\xi + \eta)^{m+1} = \xi^{m+1} + \binom{m+1}{1}\xi^m\eta + \binom{m+1}{2}$$
$$\xi^{m-1}\eta^2 + \ldots + \eta^{m+1},$$

lo que demuestra completamente el teorema.

En particular poniendo $\xi = \eta = 1$, vemos que

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + 1 = 2^n.$$

El triángulo de Pascal muestra que los coeficientes binomiales crecen hasta el coeficiente central y que después decrecen. Demostremos esto rigurosamente: *si* $0 \leqslant k < k + 1 \leqslant \frac{n}{2}$, *entonces*

$$\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}.$$

En efecto

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!\,(n-k-1)!}{n!} = \frac{k+1}{n-k}$$

y

$$\frac{k+1}{n-k} < 1 \quad \text{si} \quad k < \frac{n-1}{2}.$$

Consideremos finalmente la suma

$$2 + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \ldots + \binom{2n}{n} + \ldots + \binom{2n}{2n-1} = 2^{2n} = 4^n.$$

Por lo que acabamos de ver y siendo $\binom{2n}{n} \geqslant 2$ si $n \geqslant 1$, entonces el término $\binom{2n}{n}$ en la suma es más grande que cada otro término de la suma. Puesto que hay $2n$ términos en la suma, obtenemos que

$$2n \binom{2n}{n} \geqslant 4^n$$

es decir

(11, 1) $$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n} \quad \text{si } n \geqslant 1.$$

Esta desigualdad tendrá un papel fundamental en lo que viene.

Ejercicio. Demostrar la última desigualdad por inducción completa.

12. Ahora todo está listo para empezar la demostración propiamente dicha del teorema de CHEBISHEFF. Para tal fin vamos a estudiar el coeficiente binomial

$$(12,\ 1) \qquad \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\ n!}\ .$$

La importancia de este coeficiente binomial en la demostración no sorprende, si uno considera que es divisible por cada número primo entre n y $2n$, puesto que $(2n)!$ lo es y $n!$ no lo es. En efecto, a partir de la hipótesis de que no existen números primos entre n y $2n$ vamos a obtener un valor para $\binom{2n}{n}$, que será en contradicción con la desigualdad (11, 1) y esta contradicción demostrará el teorema. Antes de ERDÖS ya el genial matemático hindú RAMANUJAN utilizó la expresión (12, 1) para demostrar el teorema de CHEBISHEFF.

Sea p un número primo, $1 < p < 2n$. ¿Cuál es la más alta potencia de p que divide a $\binom{2n}{n}$? (No se trata del exponente, sino de la potencia misma!) La potencia más alta de p que divide a $(2n)!$ tiene exponente (p. 24)

$$\left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \cdots\ .$$

La potencia más alta de p que divide a $n!$ tiene exponente

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots\ .$$

Entonces la potencia más alta de p que divide a $\binom{2n}{n}$ tiene exponente

$$(*) \qquad \left(\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]\right) + \left(\left[\frac{2n}{p^2}\right] - 2\left[\frac{n}{p^2}\right]\right) + \cdots$$

Observemos ahora que si ρ es un número real, entonces $[2\rho] - 2[\rho]$ es igual a cero o a uno. En efecto

$$[2\rho] - 2[\rho] = 0, \quad \text{si } [\rho] \leqslant \rho < [\rho] + \frac{1}{2},$$

$$[2\rho] - 2[\rho] = 1, \quad \text{si } [\rho] + \frac{1}{2} \leqslant \rho < [\rho] + 1.$$

Luego en la suma (*) cada término es igual a 0 ó a 1. Como el número de los términos de la suma (*) es igual al exponente de la más alta potencia de p que divide a $2n$, nos damos cuenta de que la más alta potencia de p que divide a $\binom{2n}{n}$ es inferior o igual a $2n$. Con otras palabras, si $p^\alpha \mid \binom{2n}{n}$ pero $p^{\alpha+1}$ ya no divide a $\binom{2n}{n}$, entonces $p^\alpha \leqslant 2n$.

De este resultado sigue inmediatamente que si p es un número primo tal que $\sqrt{2n} < p < 2n$, entonces la más alta potencia de p que divide a $\binom{2n}{n}$ es a lo sumo la primera, puesto que p^2 ya es superior a $2n$.

Sea ahora $n \geqslant 5$ y sea p un número primo tal que $\frac{2}{3} n < p \leqslant n$. *Entonces* p *no divide a* $\binom{2n}{n}$. La potencia con que p divide a $\binom{2n}{n}$ tiene exponente

$$\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right],$$

puesto que de $p > \frac{2}{3} n$ y de $n \geqslant 5$ sigue que $p > \sqrt{2n}$. Pero tenemos que

$$1 \leqslant \frac{n}{p} < \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad 2 \leqslant \frac{2n}{p} < 3,$$

es decir

$$\left[\frac{n}{p}\right] = 1 \quad \text{y} \quad \left[\frac{2n}{p}\right] = 2,$$

luego

$$\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] = 0,$$

pues p no divide a $\binom{2n}{n}$.

Supongamos ahora que entre n y $2n$ no hay números primos. Si $n \geqslant 5$ los factores primos de $\binom{2n}{n}$ pertenecerán a dos grupos:

1º Los factores primos p tales que $1 < p \leqslant \sqrt{2n}$. Cada uno de estos entra en la descomposición de $\binom{2n}{n}$ con una potencia inferior a $2n$.

2º Los factores primos p tales que $\sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2}{3}\, n$.

Cada uno de estos entra en la descomposición de $\binom{2n}{n}$ con el exponente 1.

De estas consideraciones sigue que

$$\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{r}.\, P_{n} \quad ,$$

donde

r es igual al número de los números primos inferiores o iguales a $\sqrt{2n}$,

P_{n} es el producto de los números primos entre $\sqrt{2n}$ y $\frac{2}{3}\, n$.

Con más razón tendremos

$$\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{r}\, Q_{n} \quad , \tag{12, 2}$$

donde r tiene el significado precedente y

Q_{n} es el producto de *todos* los números primos inferiores a $\frac{2}{3}\, n$.

Para evaluar r llamemos $\pi(\xi)$ el número de los números primos inferiores o iguales a ξ. Así

$$\begin{array}{llll}
\pi(1) = 0, & \pi(2) = 1, & \pi(3) = 2, & \pi(4) = 2, \\
\pi(5) = 3, & \pi(6) = 3, & \pi(7) = 4, & \pi(8) = 4, \\
\pi\left(\frac{10}{3}\right) = 2, & \pi\left(\sqrt{5}\right) = 1, & \pi\left(\frac{100}{7}\right) = 6, & \pi\left(\frac{305}{3}\right) = 26.
\end{array}$$

Si $\xi \geqslant 14$, *entonces* $\pi(\xi) \leqslant \dfrac{\xi}{2} - 1$. En efecto $\pi(14) = 6$, y $\pi(15) = 6 < 6\dfrac{1}{2}$, puesto que los números primos inferiores a 14 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Sea entonces para un entero $m : \pi(m) \leqslant \dfrac{m}{2} - 1$. Como entre los números $m + 1$ y $m + 2$ hay a lo más un número primo, entonces

$$\pi(m + 2) \leqslant \pi(m) + 1 \leqslant \frac{m}{2} - 1 + 1 = \frac{m + 2}{2} - 1.$$

Luego, puesto que el teorema es válido para 14, será válido para cada número par superior a 14, y puesto que es válido para 15, será válido para cada número impar superior a 15. Finalmente si $\xi \geqslant 14$,

$$\pi(\xi) = \pi([\xi]) \leqslant \frac{[\xi]}{2} - 1 \leqslant \frac{\xi}{2} - 1.$$

Por consiguiente el valor de r en la fórmula (12, 2) es inferior o igual a $\dfrac{\sqrt{2n}}{2} - 1$ si $\sqrt{2n} \geqslant 14$ es decir si $n \geqslant 98$:

$$r \leqslant \frac{\sqrt{2n}}{2} - 1, \qquad \text{si } n \geqslant 98. \tag{12, 3}$$

Antes de calcular Q_n demostraremos que si $n \geqslant 5$, entonces

$$\binom{2n}{n} < 4^{n-1}.$$

Para $n = 5$

$$\binom{10}{5} = 252 < 4^{5-1} = 4^4 = 256.$$

Sea para $n = m$

$$\binom{2m}{m} < 4^{m-1},$$

entonces para $n = m + 1$

$$\binom{2m+2}{m+1} = \frac{(2m+2)!}{(m+1)!\ (m+1)!} =$$

$$= \frac{(2m+1)\ (2m+2)(2m)!}{(m+1)\ (m+1)\ m!\ m!} = 2\ \frac{2m+1}{m+1} \binom{2m}{m} <$$

$$< 2 \times 2 \binom{2m}{m} < 4 \times 4^{m-1} = 4^{(m+1)-1}.$$

Observando ahora que $\binom{2u}{u}$ es divisible por cada número primo p tal que $u < p < 2u$ y por lo tanto por el producto de todos estos números primos, vemos que el producto de los número primos entre u y $2u$ es inferior a 4^{u-1}.

Demostremos entonces que el producto de todos los números primos inferiores o iguales a u es inferior o igual 4^u. Esta afirmación es cierta para $u = 1, 2, 3$. Supongamos que el teorema sea válido para todos los valores $u < 2v + 1$. Entonces el producto de los números primos entre 1 y $v + 1$ es inferior a 4^{v+1}. Por lo que hemos visto anteriormente el producto de todos los números primos entre $v + 1$ y $2v + 1$ (que es el mismo que entre $v + 1$ y $2v + 2$) es inferior a 4^v. Entonces el producto de todos los números primos inferiores a $2v + 1$ es inferior a

$$4^{v+1}.\ 4^v = 4^{2v+1} = 4^u.$$

Finalmente si $u = 2v + 2$, el producto de todos los números primos inferiores a $2v + 2$ es el mismo que el producto de todos los números primos inferiores a $2v + 1$, es decir, inferior a $4^{2v+1} < < 4^{2v+2} = 4^u$.

De este último resultado obtenemos que

$$Q_n \leqslant 4^{\left[\frac{2n}{3}\right]} \leqslant 4^{\frac{2n}{3}}, \tag{12,4}$$

y las fórmulas (12, 2), (12, 3) y (12, 4) dan que **si se supone que entre n y $2n$ no hay números primos y si $n \geqslant 98$, entonces**

$$\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}-1}.\ 4^{\frac{2n}{3}}. \tag{12,5}$$

El lector observará la importancia que tiene para la demostración el hecho de que Q_n no es muy grande. Con otras palabras:

entre n y $2n$ existe número primo porque entre 1 y n no hay demasiados números primos.

13. Vamos a demostrar que la desigualdad (12, 5) es incompatible con la desigualdad (11, 1). En efecto de las dos desigualdades sigue

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}-1} 4^{\frac{2n}{3}},$$

o sea

$$4^{\frac{n}{3}} \leqslant (2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}},$$

que se puede escribir también como

$$4^{\frac{n}{\sqrt{2n}}} \leqslant (2n)^{\frac{3}{2}}$$

y finalmente como

$$(13,1) \qquad 2^{\sqrt{2n}} \leqslant (\sqrt{2n})^3, \; si \quad n \geqslant 98.$$

Demostraremos ahora una serie de desigualdades:

1º *Si* x *es un entero superior a* 4, *entonces* $2^x \geqslant 3\ (x+1)$.

Para $x = 4$, $2^4 = 16 > 3(4+1) = 15$. Supongamos que $2^x \geqslant 3(x+1)$, entonces

$$2^{x+1} = 2^x + 2^x \geqslant 3(x+1) + 3(x+1) >$$
$$> 3(x+1) + 3 = 3[(x+1)+1].$$

2º *Si* ξ *es un número real superior a* 4, *entonces* $2^\xi > 3\xi$.

En efecto

$$2^\xi \geqslant 2^{[\xi]} \geqslant 3\ ([\xi]+1) > 3\xi.$$

3º *Si* ξ *es un número real superior a* 14, *entonces* $2^\xi > \xi^3$.

Poniendo $\xi = 2^\eta$ la relación a demostrar se transforma en

$$2^{2^\eta} > 2^{3\eta}$$

que equivale a

$$2^\eta > 3\eta,$$

lo que es cierto si $\eta \geqslant 4$ es decir $\xi \geqslant 16$. Para $\xi = 14$ y $\xi = 15$ tenemos que $2^\xi > (\xi+1)^3$, puesto que

$$2^{14} = 16.384 \qquad (14+1)^3 = 3.375,$$
$$2^{15} = 32.768 \qquad (15+1)^3 = 4.096.$$

Finalmente si $14 \leqslant \xi \leqslant 16$, tenemos

$$2^{\xi} \geqslant 2^{[\xi]} \geqslant ([\xi]+1)^3 > \xi^3.$$

Apliquemos la última desigualdad para $\xi = \sqrt{2n}$, con $\xi \geqslant 14$ es decir $n \geqslant 98$. Obtenemos:

$$2^{\sqrt{2n}} > (\sqrt{2n})^3,$$

lo que está en contradicción con la desigualdad (13, 1). Entonces si n es un número entero superior a 98, entre n y $2n$ siempre existe un número primo. Como en el Nº 9 ya hemos visto lo mismo para todos los números n entre 1 y 100, el teorema de CHEBISHEFF queda completamente demostrado.

Bibliografía.

PAUL ERDÖS: Beweis eines Satzes von Tschebyschef, Acta Scientiarum Mathematicarum, 5 (1930/32) pp. 194-198.

L. KALMÁR: Gyertek, bizonyítsuk be Csebysev tételét! Középiskolai Matematikai Lapok, 1 (1948) pp. 89-90, 127-128, 2 (1949) pp. 7-10, 90-91, 121-123.