DESIGUALDADES II

POR JEAN ACZÉL.

Solución de los problemas y de los ejercicios de la primera parte.

EJERCICIO 1. La parte recubierta del plano es un cuadrado Q, cuyas diagonales son iguales a la mitad del perímetro k común a todos los rectángulos; estas diagonales son paralelas a los lados de los rectángulos. En efecto, si se escoge por origen el centro común de los rectángulos y por ejes de coordenadas las direcciones comunes de los lados, Q estará determinada por las desigualdades $\pm x \pm y \leqslant k/4$.

EJERCICIO 2. El cuadrado. Pues poniendo, como en la introducción, $ab = A$, $2a + 2b = k$, se tiene, según (1), $\sqrt{A} \leqslant k/4$, en donde esta vez A es fijo. k alcanza su mínimo para $a = b$.

EJERCICIO 3. La parte recubierta del plano es la figura P situada entre dos hipérbolas equiláteras, cuyos semiejes son iguales a $\sqrt{2A}$, siendo A el área común a todos los rectángulos, y cuyas asíntotas son paralelas a los lados de los rectángulos. En efecto, si se escoge por origen el centro común de los rectángulos y por ejes de coordenadas las direcciones comunes de los lados, entonces P estará determinado por las desigualdades $\pm\, xy \leqslant A/4$.

PROBLEMA 1. Para demostrar la desigualdad $K > L$ (o $K < L$) entre dos números K y L, basta demostrar que $K - L > 0$ (o $K - L < 0$).

Si $A > B$, es decir si $A - B > 0$, se tendrá $(A + D) - (B + D) = A - B > 0$. Si $A > 0$, se tendrá $CA - CB = C(A - B)$, que es mayor que cero para $C > 0$, y menor que cero para $C < 0$. Si $A > B$, $A > 0$, $B > 0$, entonces $A^n - B^n = (A - B)\,(A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1}) > 0$ y

$$\frac{1}{A^n} - \frac{1}{B^n} = \frac{B^n - A^n}{A^n\, B^n} < 0.$$

Si $A > C, C > D$, entonces $(A+C)-(B+D) = (A-B) + (C-D) > 0$. Si $A > B, C > D, B > 0, D > 0$, se tendrá

$$AC - BD = (A-B)(C-D) + B(C-B) + \\ + D(A-B) > 0.$$

Problema 2. Pongamos $a = 1/A$, $b = 1/B$. Según (1) se tiene $(A+B)/2 > \sqrt{AB}$; luego

$$2/(A+B) < 1/\sqrt{AB} = \sqrt{(1/A)\,(1/B)}.$$

Escribiendo los valores $A = 1/a$, $B = 1/b$ en esta última desigualdad, se obtiene el resultado anunciado.

Ejercicio 4. Llamemos a y b los dos segmentos en los que la altura h divide a la hipotenusa c. Se tiene $c = a + b$ y $h = \sqrt{ab}$, luego por la desigualdad (1), $c \geqslant 2h$ en donde h es fijo. c alcanza su mínimo cuando $a = b$, que es el caso del triángulo isósceles.

Ejercicio 5. Conservando las notaciones del ejercicio 4, se tiene $c \geqslant 2h$, donde esta vez c es fijo. h alcanza su máximo cuando $a = b$, que es el caso del triángulo isósceles.

Problema 3. La transformación de $f(x)$ en $-f(x)$ es una simetría con relación al eje de las x. Si, pues, la cuerda inscrita a la función $f(x)$ deja al arco que subtiende *debajo* de ella, la cuerda correspondiente por simetría inscrita a la función $-f(x)$ deja el arco que subtiende *encima* de ella.

Problema 4. $y = x^2$ es siempre convexa; $y = x^3$ es convexa para $x > 0$, cóncava para $x < 0$; $y = \sqrt[3]{x^2}$ es siempre cóncava; $y = \sqrt{x^3}$ es convexa para $x > 0$; $y = 1/x$ es convexa para $x > 0$, cóncava para $x < 0$; $y = 1/x^3$ es convexa para $x > 0$, cóncava para $x < 0$; $y = 1/\sqrt{x^3}$ es convexa para $x > 0$; $y = +\sqrt{x}$ es cóncava para $x > 0$; $y = -\sqrt{x}$ es convexa para $x > 0$; $y = 2^x$ es convexa para $x > 0$; $y = 10^x$ es convexa para $x > 0$; $y = \log x$ es cóncava para $x > 0$; $y = \operatorname{sen} x$ es cóncava para $2k\pi < x < 2(k+1)\pi$, convexa para $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$; $y = \operatorname{tg} x$ es convexa para $2k\pi/2 < x < (2k+1)\pi/2$ y cóncava para $(2k-1)\pi/2 < x < 2k\pi/2$.

Problema 5. Las funciones lineales de la forma $y = ax + b$ son las únicas que son a la vez cóncavas y convexas (en el sentido amplio).

2. Desigualdad de Jensen. En el número anterior hemos dado una definición *geométrica* de la convexidad de una función, sirviéndonos de su gráfico. En este número daremos otra definición, equivalente a la anterior, pero que esta vez tendrá un carácter *algebraico*.

Problema 6. Una función $f(x)$ es convexa sí y solamente si para todo par de abscisas x_1, x_2 y para todo par q_1, q_2 de números que cumplan $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, $q_1 + q_2 = 1$, se verifica la desigualdad

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) < q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2). \tag{2}$$

La relación (2) es la famosa *desigualdad ponderada de* Jensen que caracteriza a las funciones convexas.

Problema 7. ¿Por qué relación es necesario reemplazar la desigualdad (2) para definir las funciones convexas en el sentido amplio (las cóncavas, las cóncavas en el sentido amplio?).

Problema 8. El enunciado del problema 6 es equivalente al siguiente: una función $f(x)$ es convexa sí y solamente si para todo par de abscisas x_1, x_2 y para todo par p_1, p_2 de números positivos, se verifica la desigualdad

$$f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2}\right) < \frac{p_1\, f(x_1) + p_2\, f(x_2)}{p_1 + p_2}.$$

(Las cantidades p_1, p_2 se llaman los pesos).

La desigualdad de Jensen nos da la posibilidad de determinar de una manera rigurosa el carácter convexo o cóncavo de una función, reemplazando el método gráfico aproximado de que nos hemos valido en el problema 4.

Problema 9. Demostrar, utilizando la desigualdad (2), que la función lineal $f(x) = ax + b$ (a, b cualesquiera) es a la vez cóncava y convexa en el sentido amplio (véase problema 5).

Problema 10. Determinar, utilizando la desigualdad (2), para qué valores de x las funciones siguientes son convexas (cóncavas) $y = 1/x$, $y = x^2$, $y = +\sqrt{x}$.

Problema. 11. Sean p_1 y p_2 dos números positivos. Se llama *media aritmética ponderada* de dos números positivos x_1 y x_2 la expresión

$$(p_1x_1 + p_2x_2) / (p_1 + p_2),$$

media armónica ponderada de dos números positivos x_1 y x_2 la expresión

$$(p_1 + p_2) \Big/ \left(\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2}\right),$$

y *media cuadrática ponderada* de dos números positivos x_1, x_2 la expresión

$$\sqrt{\frac{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2}{p_1 + p_2}}.$$

(Las cantidades p_1 y p_2 se llaman los *pesos*).

Demostrar las desigualdades siguientes:

$$(p_1 + p_2) \Big/ \left(\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2}\right) \leqslant \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2} \leqslant \sqrt{\frac{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2}{p_1 + p_2}}.$$

El signo de igualdad no existe sino cuando $x_1 = x_2$. (Para $p_1 = p_2$ estas medias se reducen a las medias *simétricas* y así la primera de estas desigualdades generaliza la demostrada en el problema 2).

Ejercicio 6. Consideremos todos los rectángulos que tengan una diagonal d común.

a) ¿Cuál de estos rectángulos tiene el mayor perímetro?
b) ¿Cuál tiene la mayor área?

Ejercicio 7. Consideremos todos los rectángulos que tengan el mismo perímetro k (o los que tengan la misma área A). ¿Cuál de entre ellos tiene la menor diagonal?

Si en la desigualdad (2) se hace $q_1 = q_2 = 1/2$, se obtiene el resultado que toda función convexa verifica la desigualdad

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{3}$$

Recíprocamente si la desigualdad (3) se satisface para una función *continua,* entonces resulta la validez de la desigualdad (2). En otros términos, si una función continua verifica (3) cualesquiera que sean x_1 y x_2, entonces es convexa.

¡Demostremos esta afirmación! La desigualdad (3) significa geométricamente que el punto medio de toda cuerda de la curva $y = f(x)$ está por encima del punto correspondiente del arco que subtiende (fig. 6). De ahí se deduce que toda cuerda está situada totalmente encima del arco que subtiende, lo que es precisamente la definición de función convexa dada en el número 1. En efecto, si este no fuera el caso, existiría un punto del intervalo en el cual la curva estaría situada sobre, o encima de la cuerda.

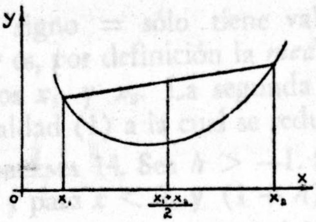

Fig. 6.

Sea $y = l(x)$ la ecuación de la cuerda. Según la propiedad de Darboux (véase Nº 1) aplicada a la función *continua* $f(x) - l(x)$, existirían dos puntos ξ_1 y ξ_2 tales que $f(\xi_1) = l(\xi_1)$,

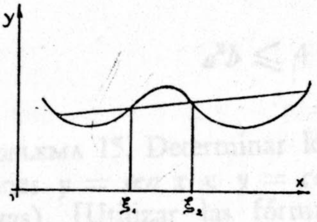

Fig. 7-a.

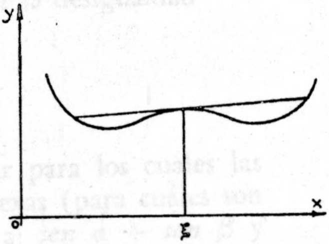

Fig. 7-b.

$f(\xi_2) = l(\xi_2)$, y $f(x) > l(x)$ para $\xi_1 < x < \xi_2$ (fig. 7. a.), o bien un punto ξ tal que $f(\xi) = l(\xi)$ y $f(x) < l(x)$ para $x \neq \xi$ pero suficientemente vecino de ξ (fig. 7. b.). En ninguno de los dos casos la relación (3) quedaría satisfecha para x_1 y x_2 convenientemente escogidos.

Si se reemplaza en (3) el símbolo $<$ por $\leqslant$ (o por $>$, o por $\geqslant$), se obtiene una caracterización de las funciones continuas convexas en el sentido amplio (de las cóncavas, de las cóncavas en el sentido amplio). La desigualdad (3) es la forma *simétrica* de la desigualdad de Jensen.

Problema 12. Determinar si las funciones $y = 10^x$, $y = \log_{10} x$, o más generalmente las funciones $y = a^x$, $y = \log_a x$ $(a > 0)$ son convexas o cóncavas [se sabe que estas funciones son continuas].

Problema 13. Sean $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $q_1 > 0$, $q_2 > 0$ y $q_1 + q_2 = 1$. Demostrar las desigualdades

$$(4) \qquad 1 \Big/ \left(\frac{q_1}{x_1} + \frac{q_2}{x_2}\right) \leqslant x_1^{q_1} x_2^{q_2} \leqslant q_1 x_1 + q_2 x_2.$$

(El signo $=$ sólo tiene validez si $x_1 = x_2$). La expresión $x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ es, por definición la *media geométrica ponderada* de los dos números x_1 y x_2. La segunda desigualdad en (4) generaliza la desigualdad (1) a la cual se reduce si $q_1 = q_2 = 1/2$.

PROBLEMA 14. Sea $h > -1$. Se tiene $(1 + h)^x > 1 + hx$ para $x > 1$ y para $x < 0$, y $(1 + h)^x < 1 + hx$ para $0 < x < 1$.

EJERCICIO 8. Sean $a > 0, b > 0, r > 0, s > 0, 1/r + 1/s = 1$; demostrar la desigualdad

$$ab \leqslant \frac{a^r}{r} + \frac{b^s}{s}.$$

EJERCICIO 9. Sean $a > 0$, $b > 0$; demostrar la desigualdad

$$a^2 b \leqslant 4 \left(\frac{a + b}{3}\right)^3.$$

PROBLEMA 15. Determinar los valores de x para los cuales las funciones $y = sen\ x$ e $y = cos\ x$ son convexas (para cuáles son cóncavas). [Utilizar las fórmulas relativas a $sen\ \alpha + sen\ \beta$ y $cos\ \alpha + cos\ \beta$.

PROBLEMA 16. a.) Sea n un entero natural. Demostrar la desigualdad

$$\frac{(x_1^n + x_2^n)^{n+1}}{(x_1^{n-1} + x_2^{n-1})^n} < \frac{(x_1^{n+1} + x_2^{n+1})^n}{(x_1^n + x_2^n)^{n-1}},$$

siendo $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ y $x_1 \neq x_2$.

b.) Sea n un entero positivo o negativo. La expresión

$$\sqrt[n]{(x_1^n + x_2^n)/2}.$$

se llama *media de las* n *-ésimas potencias* de los dos números x_1 y x_2. Demostremos que para $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ y $x_1 \neq x_2$ se verifica la desigualdad

$$\sqrt[n]{(x_1^n + x_2^n)/2} < \sqrt[n+1]{(x_1^{n+1} + x_2^{n+1})/2}.$$

c.) Sea $q_1 > 0$, $q_2 > 0$ y $q_1 + q_2 = 1$.

Llamemos *media ponderada de las* n *-ésimas potencias* de los dos números x_1 y x_2 a la expresión

$$\sqrt[n]{q_1 x_1^n + q_2 x_2^n}.$$

Demostremos que para $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ y $x_1 \neq x_2$ se verifica la desigualdad

$$\sqrt[n]{q_1 x_1^n + q_2 x_2^n} < \sqrt[n+1]{q_1 x_1^{n+1} + q_2 x_2^{n+1}}.$$

PROBLEMA 17. En el curso de este problema r y r' designarán siempre números *racionales*. Sean $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, $q_1 + q_2 = 1$. Demostrar que la función $y = x^r$ $(x > 0)$ es convexa si $r > 1$ o si $r < 0$ y que es cóncava si $0 < r < 1$. Demostrar que si $r < r'$ se tiene

$$(6) \qquad (q_1 x_1^r + q_2 x_2^r)^{1/r} < (q_1 x_1^{r'} + q_2 x_2^{r'})^{1/r'},$$

y que si $r < 0 < r'$, se tiene

$$(7) \quad (q_1 x_1^r + q_2 x_2^r)^{1/r} < x_1^{q_1} x_2^{q_2} < (q_1 x_1^{r'} + q_2 x_2^{r'})^{1/r'},$$

en la que $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1 \neq x_2$. (La desigualdad (7) generaliza la desigualdad (4), a la que se reduce si se hace $r = -1$, $r' = 1$. Notemos también que los enunciados de este problema quedan exactos si se reemplaza el número racional r por un número real cualquiera. Esto lo veremos más tarde).

Si se consideran los pares de funciones $f(x) = a^x$ y $f(x) = \log_a x$; $f(x) = x^n$ y $f(x) = \sqrt[n]{x}$; $f(x) = 1/x^n$ y $f(x) = 1/\sqrt[n]{x}$, se nota que hay una cierta relación entre los dos miembros de cada uno de esos pares. ¿En qué consiste esa relación? Puede notarse que si se hace $y = a^x$ se tendrá $x = \log_a y$, y que si $y = x^n$, se tendrá $x = \sqrt[n]{y}$. Se dice que las dos funciones $f(x)$ y $\phi(y)$ son inversas la una de la otra, si las relaciones $y = f(x)$ y $x = \phi(y)$ son equivalentes. Una función posee una inversa bien determinada únicamente si es *monótona en el sentido estricto,* es decir si siempre crece o siempre decrece.

PROBLEMA 18. Sean $y = f(x)$ e $y = \phi(x)$ dos funciones, cada una de las cuales es la inversa de la otra. ¿Qué significa geométricamente esta relación? Demostrar que si $y = f(x)$ es *creciente* y convexa, $y = \phi(x)$ es creciente y cóncava; si por el contrario $y = f(x)$ es *decreciente* y convexa, entonces $y = \phi(x)$ es también decreciente y convexa.

Ejercicio 10. Demostrar que la función $y = a^{x^2}$ es convexa $(a > 0)$.

Sean $y = \phi(t)$ y $t = \psi(x)$ dos funciones tales que $\phi(t)$ esté definida para todo valor que $\psi(x)$ pueda tomar. La función $y = \chi(x) = \phi(\psi(x))$ se llama la función *compuesta* de las dos funciones $\phi(t)$ y $\psi(x)$. Por ejemplo la función $y = a^{x^2}$ está compuesta de las dos funciones $y = a^t$ y $t = x^2$.

Problema 19. Demostrar que si $y = \phi(t)$ es una función *creciente* y convexa y que si $t = \psi(x)$ es una función convexa, la función compuesta $y = \chi(x) = \phi(\psi(x))$ es una función convexa.

Las palabras *peso, ponderado* nos recuerdan nociones físicas. Veremos en seguida la razón de esta terminología. Consideremos primeramente un sistema de dos pesos (puntos de masas!) p_1 y p_2 en el plano. Coloquemos el peso p_1 en el punto (x_1, y_1) y el peso p_2 en el punto (x_2, y_2) y determinemos el centro de gravedad de este sistema. Las coordenadas x_0, y_0 del centro de gravedad se calcularán utilizando el hecho de que las componentes del momento del sistema con relación a este punto son iguales a cero, es decir

$$p_1(x_0 - x_1) = p_2(x_2 - x_0), \quad p_1(y_0 - y_1) = p_2(y_2 - y_0),$$

de donde se deduce

$$x_0 = \frac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2}, \qquad y_0 = \frac{p_1y_1 + p_2y_2}{p_1 + p_2}.$$

Ahora tenemos la siguiente interpretación de la desigualdad de Jensen: una función $y = f(x)$ es convexa sí y solamente si colocando dos pesos sobre la curva que la representa, el centro de gravedad de estos dos pesos tiene una ordenada superior a la del punto correspondiente (es decir que tiene la misma abscisa) de la curva. Evidentemente se tienen enunciados análogos para las funciones convexas en el sentido amplio, cóncavas, y cóncavas en el sentido amplio.

Problema 20. Coloquemos los pesos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$ del plano. Calculemos el centro de gravedad calculando primero el centro de gravedad de los dos primeros puntos; después concentremos la masa $p_1 + p_2$ en el punto así obtenido y calculemos el centro de gravedad de este nuevo punto y del tercer punto, y continuemos así. (En el resultado se verá que éste es independiente del orden en el que se tomen los pesos $p_1, p_2, \ldots, p_k$).

Problema 21. Una función $y = f(x)$ es convexa sí y solamente si la desigualdad

$$(8) \qquad f(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_kx_k) < \\ < q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \ldots + q_k f(x_k)$$

se verifica cualesquiera que sean los valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ y las cantidades positivas $q_1, q_2, \ldots, q_k$ estan ligadas por la relación $q_1 + q_2 + \ldots + q_k = 1$. También una función $y = f(x)$ es convexa sí y solamente si la desigualdad

$$(9) \qquad f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k}{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}\right) < \\ < \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \ldots + p_k f(x_k)}{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}$$

se verifica cualesquiera que sean los valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ y las cantidades positivas $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Las desigualdades (8) y (9) se llaman las *desigualdades ponderadas de* Jensen *con* k *términos.*

Problema 22. Si ponemos $q_1 = q_2 = \ldots = q_k$ en la desigualdad (8), o $p_1 = p_2 = \ldots = p_k$ en la desigualdad (9), se obtiene

$$(10) \qquad f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k)}{k}.$$

Demostrar que esta desigualdad es necesaria y suficiente para que la función *continua* $y = f(x)$ sea convexa.

La desigualdad (10) se llama la *desigualdad simétrica de* Jensen *con* k *términos.*

Hemos visto que si la función $y = f(x)$ es *continua,* las desigualdades (8), (9) y (10) se deducen de la desigualdad (3). Examinaremos ahora hasta qué punto esto subsiste si se suprime la condición de que $y = f(x)$ sea continua.

PROBLEMA 23. Demostremos que si una función $y = f(x)$ verifica la desigualdad (3), verifica también la desigualdad (10). [Demostrar primero (10) para valores de k de la forma $k = 2^j$ ($j = 1, 2, 3, \ldots$) por recurrencia (inducción completa) según j. En seguida si $2^{j-1} < k < 2^j$, se hará

$$x_{k+1} = \ldots = x_{2^j} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k},$$

y se tendrá

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}\right) =$$

$$= f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{2^j}}{2^j}\right) <$$

$$< \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k) + f(x_{k+1}) + \ldots + f(x_{2^j})}{2^j}$$

es decir

$$\left(1 - \frac{2^j - k}{2^j}\right) f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}\right) <$$

$$< \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k)}{2^j},$$

que es equivalente a la fórmula que se quiere demostrar. Este método de demostración se debe al gran matemático francés AGUSTIN LOUIS CAUCHY].

PROBLEMA 24. Demostremos que si una función $y = f(x)$ verifica la desigualdad (3), verifica también la desigualdad (8) con pesos $q_1, q_2, \ldots, q_k$, y la (9) con pesos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *racionales*.

PROBLEMA 25. Sean $q_1 > 0, q_2 > 0, \ldots, q_k > 0, q_1 + q_2 + \ldots + q_k = 1$. La expresión

$$q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_kx_k$$

se llama la *media aritmética ponderada* de los números $x_1, x_2, \ldots,$

x_k. De una manera más general, para ρ real, la expresión

$$(11)\qquad M_\rho\,(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (q_1 x_1^\rho + q_2 x_2^\rho + \ldots + q_k x_k^\rho)^{1/\rho}$$

se llama *la media ponderada de las ρ-ésimas potencias* de los números $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_k > 0$. Para $\rho = 1$ esta se reduce a la media aritmética, para $\rho = -1$ a la media armónica. $M_0\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ es por definición la expresión

$$M_0\,(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_1^{q_1}\, x_2^{q_2} \ldots x_k^{q_k}$$

que se llama la *media geométrica ponderada* de los números $x_1 > 0$, $x_2 > 0, \ldots, x_k > 0$. Demostrar que si r y r' son racionales y si $r < r'$, se tendrá $M_r < M_{r'}$, (generalización de (6) y (7)).

Problema 26. Llamemos $Max\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ el mayor de los números $x_1, x_2, \ldots, x_k$, y $min\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ el menor de los mismos números. Demostrar que si $x_j = Max\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ y si $M_\rho\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ $(x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_k > 0)$ se define por la fórmula (11), se tendrá para $\rho > 0$,
$\sqrt[\rho]{q^j}\; Max\;(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leqslant M_\rho\,(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leqslant Max\;(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Deducir de ahí que $M_\rho\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ tiende hacia $Max\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ cuando ρ tiende a $+\infty$. Establecer teoremas análogos para $min\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Ejercicio 11. a) Entre todos los paralelepípedos rectángulos que tienen la misma superficie (los que tienen la misma suma de longitud de aristas, los que tienen la misma diagonal), ¿cuál tiene el mayor volumen? b) Entre todos los paralelepípedos rectángulos que tienen el mismo volumen, ¿cuál tiene la menor superficie (cuál la menor suma de longitudes de aristas, cuál la menor diagonal?) c) Entre todos los paralelepípedos rectángulos que tienen la misma suma de longitudes de aristas, ¿cuál tiene la menor diagonal? d) Entre todos los paralelepípedos rectángulos que tienen la misma diagonal, ¿cuál tiene la mayor suma de longitudes de aristas?

Ejercicio 12. Entre todos los triángulos que tienen el mismo perímetro, ¿cuál tiene la mayor área?

Ejercicio 13. Sean $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_k > 0$. Demostrar las desigualdades

$$[a_2 a_3 \dots a_k (a_2 + a_3 + \dots + a_k) + a_1 a_3 \dots a_k$$
$$(a_1 + a_3 + \dots + a_k) + \dots + a_1 a_2 \dots a_{k-1}$$
$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})] \,/\, k a_1 a_2 \dots a_k \geqslant k - 1$$

y

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)(1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_k) \geqslant k^2.$$

Ejercicio 14. Demostrar que si $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 \leqslant 1$, se tiene $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leqslant \sqrt{k}$.

Ejercicio 15. ¿Cómo hay que escoger los números positivos a, b, c para que, si $S = a + b + c$ es constante, ab^2c^3 sea lo mayor posible? ¿Cómo hay que escoger los números positivos a, b, c para que si ab^2c^3 es constante, $S = a + b + c$ sea la menor posible?

Ejercicio 16. Demostrar que las funciones $\log_a (1 + a^x)$ y $\sqrt{1 + x^2}$ son convexas. Demostrar las desigualdades

$$\sqrt[k]{(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_k)} \geqslant 1 + \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}$$

y

$$\sqrt{k^2 + (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2} \leqslant \sqrt{1 + a_1^2}$$
$$+ \sqrt{1 + a_2^2} + \dots + \sqrt{1 + a_k^2}.$$

Ejercicio 17. Entre todos los polígonos de k vértices, inscritos en el círculo, ¿cuál tiene mayor área? (¿Cuál tiene el mayor perímetro?).