UNA GENERALIZACION DEL PROBLEMA 15.

Por Carlos Obregón.

El problema 15 (cf. Vol. I., pp. 79-80) da origen a dos preguntas:

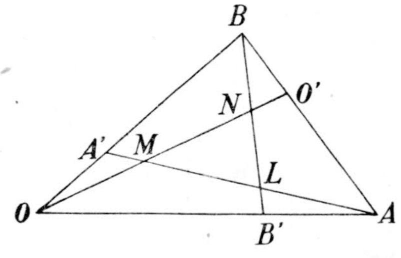
1ª Será dicha proposición válida para *cualquier* triángulo?

2ª Cuál será la razón de las áreas cuando los lados no se dividen en razón 1 : 2 sino en una razón *cualquiera* $n : m$?

Sería sumamente difícil encontrar, por métodos de geometría elemental, la expresión para el área del triángulo pequeño en el caso general de que el triángulo dado sea un triángulo cualquiera, cuyos lados son divididos en una razón $n : m$ arbitraria.

El siguiente teorema nos da una generalización de la proposición del problema 15. En su prueba es claro el poder que pueden tener los métodos vectoriales en problemas de este tipo.

Teorema. *Sea* OAB *un triángulo cualquiera. Sean* O′, A′, B′ *puntos en los lados* AB, OB, OA *respectivamente y tales que*



$$\frac{|O'\,B|}{|O'\,A|} = \frac{|A'\,O|}{|A'\,B|} = \frac{|B'\,A|}{|B'\,O|} = \frac{n}{m} \quad (n, m > 0).$$

Llámese MNL *el triángulo comprendido entre las líneas* OO′, AA′ y BB′, S *el área del triángulo* OAB *y* S′ *el área del triángulo* MNL. *Entonces*

$$S' = \frac{(m-n)^2}{m^2 + mn + n^2}\, S.$$

Prueba. Sean **a** y **b** los vectores de posición de A y B con respecto al origen O. Tendremos

$$\overline{OO'} = \frac{n\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{m+n} \; ; \; \overline{OA'} = \frac{n}{m+n}\,\mathbf{b}; \; \overline{OB'} = \frac{m}{m+n}\,\mathbf{a}.$$

Las ecuaciones vectoriales de las líneas OO', AA', BB' serán

$$OO': \qquad \mathbf{r} = s\left(\frac{n\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{m+n}\right),$$

$$AA': \qquad \mathbf{r} = t\mathbf{a} + (1-t)\left(\frac{n}{m+n}\right)\mathbf{b},$$

$$BB': \qquad \mathbf{r} = q\mathbf{b} + (1-q)\left(\frac{m}{m+n}\right)\mathbf{a},$$

Donde s, t, q son variables escalares independientes. Para la intersección de OO' y AA' tendremos,

$$s\left(\frac{n}{m+n}\right)\mathbf{a} + s\left(\frac{m}{m+n}\right)\mathbf{b} = t\mathbf{a} + (1-t)\left(\frac{n}{m+n}\right)\mathbf{b}.$$

Los vectores **a** y **b** son linealmente independientes (es decir no-paralelos), luego podemos igualar los respectivos coeficientes:

$$OO' \text{ y } AA') \quad s\left(\frac{n}{m+n}\right) = t; \quad s\left(\frac{m}{m+n}\right) = (1-t)\left(\frac{n}{m+n}\right),$$

$$\therefore \qquad s = \frac{n\,(m+n)}{m^2 + mn + n^2}.$$

Similarmente para la intersección de OO' y AA' y de AA' y BB',

$$OO' \text{ y } BB') \qquad s\left(\frac{n}{m+n}\right) = (1-q)\left(\frac{m}{m+n}\right);$$

$$s\left(\frac{m}{m+n}\right) = q,$$

$$\therefore \qquad s = \frac{m\,(m+n)}{m^2 + mn + n^2},$$

AA' y BB') $\quad t = (1 - q)\left(\dfrac{m}{m + n}\right); \quad (1 - t)\left(\dfrac{n}{m + n}\right) = q,$

$$\therefore \qquad t = \frac{m^2}{m^2 + mn + n^2}\,.$$

Estos valores, sustituídos en las ecuaciones, nos darán los vectores de posición de M, N, L:

$$\overline{OM} = \frac{n}{m^2 + mn + n^2}\,(n\mathbf{a} + m\mathbf{b}),$$

$$\overline{ON} = \frac{m}{m^2 + mn + n^2}\,(n\mathbf{a} + m\mathbf{b}),$$

$$\overline{OL} = \frac{1}{m^2 + mn + n^2}\,(m^2\,\mathbf{a} + n^2\,\mathbf{b}).$$

Por lo tanto

$$\overline{LM} = \overline{OM} - \overline{OL} = \frac{m - n}{m^2 + mn + n^2}\,[-(m + n)\mathbf{a} + n\mathbf{b}],$$

$$\overline{LN} = \overline{ON} - \overline{OL} = \frac{m - n}{m^2 + mn + n^2}\,[-m\mathbf{a} + (m + n)\mathbf{b}],$$

$$\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = \frac{m - n}{m^2 + mn + n^2}\,[n\mathbf{a} + m\mathbf{b}].$$

Llamemos **k** un vector unitario perpendicular al plano del triángulo y dirigido hacia afuera;

$$\mathbf{S} = S\mathbf{k},\ \mathbf{S}' = S'\mathbf{k},$$

entonces

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{2}\ \overline{LN} \times \overline{LM}$$

(donde $\times$ indica producto vectorial)

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{2}\left(\frac{m - n}{m^2 + mn + n^2}\right)^2 [-m\mathbf{a} + (m + n)\mathbf{b}] \times$$

$$\times [-(m + n)\mathbf{a} + n\mathbf{b}].$$

Ya que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{b} = 0$, tenemos

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{2}\left(\frac{m - n}{m^2 + mn + n^2}\right)^2 [-mn\, \mathbf{a} \times \mathbf{b} - (m + n)^2\, \mathbf{b} \times \mathbf{a}],$$

y como $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$:

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{2}\left(\frac{m - n}{m^2 + mn + n^2}\right)^2 (m^2 + mn + n^2)\, \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{2}\, \frac{(m - n)^2}{m^2 + mn + n^2}\, \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Pero $\quad \mathbf{S} = S\mathbf{k} = \dfrac{1}{2}\, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, de donde

$$S' = \frac{(m - n)^2}{m^2 + mn + n^2}\, S.$$

Q. E. D.