Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXI (1987), págs. 73-84

UN PRINCIPIO DE ANTI-MAXIMO PARA ECUACIONES PARABOLICAS PERIODICAS

por

Gerhard SCHLEINKOFER

Resumen. Sea L un operador parabólico periódico y λ_o su valor propio principal. Para $\lambda < \lambda_o$ una solución u del problema periódico **$Lu = \lambda u+f$** en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$, $f \geqslant 0$, $f \not\equiv 0$, $u = 0$ sobre $\partial\Omega\times\mathbb{R}$, satisface $u > 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$ por el principio del máximo. Pero, para $\lambda_o < \lambda < \lambda_o+\delta$, tenemos $u < 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$. Resultados análogos valen también para $Lu = \lambda mu+f$, donde m es una función apropiada, no necesariamente positiva sobre todo $\Omega\times\mathbb{R}$.

Abstract. Let L be a periodic parabolic operator and λ_o its principal eigenvalue. For $\lambda < \lambda_o$ a solution u of the periodic problem $Lu = \lambda u+f$ in $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$, $f \geqslant 0$, $f \not\equiv 0$, $u = 0$ on $\partial\Omega\times\mathbb{R}$, satisfies $u > 0$ in $\Omega\times\mathbb{R}$ by the maximum principle. But for $\lambda_o < \lambda < \lambda_o+\delta$ we have $u < 0$ in $\Omega\times\mathbb{R}$. Similar results also hold for $Lu = \lambda mu+f$, where m is an appropriate function which does not need to be positive in all points of $\Omega\times\mathbb{R}$.

§1. **Notaciones y el resultado principal.** Sea Ω un subconjunto acotado, abierto, conexo de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$. Supongamos adicionalmente que la frontera $\partial\Omega$ es una $C^{2+\alpha}$-variedad de dimensión n-1 (α fijo, $0 < \alpha < 1$) y que Ω está situado localmente en un lado de $\partial\Omega$. Para un intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y para una función $u(\cdot,\cdot):\bar{\Omega}\times[a,b] \to \mathbb{R}$ se define

$$H_\alpha^D(u) := \sup_{\substack{(x,t),(y,s)\in D\\(x,t)\neq(y,s)}} \frac{|u(x,t)-u(y,s)|}{[(x-y)^2+(t-s)]^{\alpha/2}}, \qquad D := \bar{\Omega}\times[a,b].$$

Se designa con $C^{\alpha,\alpha/2}(D)$ a la familia de todas las funciones $u(\cdot,\cdot):D\to\mathbb{R}$ que satisfacen

$$\|u\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(D)} := \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)| + H_\alpha^D(u) < \infty$$

El conjunto $C^{\alpha,\alpha/2}(D)$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(D)}$.

Se escribe $u\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D)$, si $u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_t$ pertenecen a $C^{\alpha,\alpha/2}(D)$ para $1\leq i,j\leq n$ y la norma $\|u\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D)}$ es definida por la suma de las $C^{\alpha,\alpha/2}(D)$-normas de todas estas funciones. Se denota con $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ a la familia de todas las funciones $u(\cdot,\cdot):\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que pertenecen a $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}\times[a,b])$ para cualquier $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Similarmente se define $C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$.

En lo que sigue, L denota al operador diferencial parabólico definido por

$$Lu := u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t)u_{x_j} + a(x,t)u$$

con las siguientes condiciones:

(A_1) Los coeficientes a_{ij}, a_j, a son periódicos con respecto a t, con período $T>0$, $a_{ij}=a_{ji}$, $1\leq i,j\leq n$, $a\geq 0$.

(A_2) a_{ij}, a_j, a son continuos en el sentido de Hölder, es decir, pertenecen a $C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$, $1\leq i,j\leq n$.

(A_3) L es uniformemente parabólico; es decir,

$$\exists\varepsilon>0\ \forall(x,t)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n: \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \varepsilon\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2.$$

Además es conveniente introducir los siguientes espacios vectoriales:

$F := \{f \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R});\ f(x,t+T) = f(x,t)\,\forall(x,t) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}\}$;

$E := \{u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R});\ u(x,t+T) = u(x,t)\,\forall(x,t) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}, u_{|\partial\Omega\times\mathbb{R}} = 0\}$

.

Con las normas inducidas por $\|\cdot\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}\times[0,T])}$ y $\|\cdot\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}\times[0,T])}$, respectivamente, los espacios F y E respectivamente son espacios de Banach. Obviamente, la inmersión $J:E \to F$ es compacta.

Consideramos ahora el siguiente problema periódico de Dirichlet:

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda mu + f \quad \text{en } \bar{\Omega}\times\mathbb{R}, \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega\times\mathbb{R}, \\ u(\cdot,0) &= u(\cdot,T) \quad \text{sobre } \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

donde $m,f \in F$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Observamos que L es una aplicación lilineal de E en F y designamos con M al operador de multiplicación por la función $m \in F$. Por consiguiente, nuestro problema de Dirichlet se escribe de la forma

$$Lu = \lambda Mu + f, \qquad u \in E. \tag{1}$$

Sin pérdida de la generalidad, asumiremos siempre que $|m(x,t)| < 1$, $\forall(x,t) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}$. El operador $M:E \to F$ es una aplicación lineal, compacta. La aplicación $L:E \to F$ es isomorfismo topológico; véase lema 2.2 en [1] o lema 1.1 en [2]. Sea $n = n(x,t)$ el vector normal exterior unitario en el punto $(x,t) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}$.

El principal propósito de nuestro artículo es probar el siguiente resultado.

TEOREMA. (Principio del anti-máximo). *Sea* $m \in F$, $\int_0^T \max_{x\in\bar{\Omega}} m(x,t)dt > 0$, $f \in F$, $f \geqslant 0$, $f \not\equiv 0$. *Entonces existen un número real* $\lambda_0 = \lambda_0(m) > 0$ *y una constante* $\delta = \delta(f) > 0$ *ta-*

les que para cada solución $u \in E$ *de* (1) *tenemos que* $u(x,t) < 0$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}$, $\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) > 0$ *en* $\partial\Omega\times\mathbb{R}$ *si* $\lambda_o < \lambda < \lambda_o + \delta$. ▲

Para aclarar este resultado vamos a completarlo por algunas observaciones que parcialmente necesitaremos para la demostración de nuestro teorema. Bajo las hipótesis del teorema, tenemos las siguientes propiedades:

(2) λ_o es el único valor propio positivo de $Lu = \lambda Mu$ con vector propio positivo $u_o \in E$, es decir, $u_o \geq 0$, $u_o \not\equiv 0$.

(3) $1/\lambda_o$ es valor propio simple de $L^{-1}M$, es decir: $\dim\ker(L^{-1}M-(1/\lambda_o)I)^k = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

(4) Para $\lambda \geq \lambda_o$ no hay solución $u \in E$, $u \geq 0$ de (1).

(5) Para $0 \leq \lambda < \lambda_o$ existe una única solución $u \in E$ de (1) y esta solución satisface $u(x,t) > 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$, $\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) < 0$ en $\partial\Omega\times\mathbb{R}$.

(6) Si asumimos adicionalmente $m \geq 0$, entonces para $-\infty < \lambda < \lambda_o$ existe una única solución $u \in E$ de (1) la que satisface $u(x,t) > 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$, $\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) < 0$ en $\partial\Omega\times\mathbb{R}$. (Principio del máximo).

Las propiedades (2)-(5) se encuentran demostradas en Theorem 1 y Theorem 2 de [1]. Aplazamos la prueba sencilla de (6) hasta la proxima sección.

El actual trabajo es una versión más general de la publicación [7]. Los resultados han sido sugeridos por la correspondiente teoría ya conocida en el caso elíptico [3], [5].

§2. Propiedades auxiliares. El siguiente lema se deduce fácilmente del principio del máximo [6,p.174].

LEMA 1. *Sea* $f \in F$, $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$ *y sea* $u \in E$ *una solución de* $Lu = f$. *Entonces*

(a) $u(x,t) > 0$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}$

(b) $\frac{\partial u}{\partial u}(x,t) < 0$ *sobre* $\partial\Omega\times\mathbb{R}$. ▲

Ahora estamos listos para probar (6). Por (5) podemos restringirnos al caso $-\infty < \lambda < 0$ y todo se reduce a la consideración de $\hat{L}u = f$ con $\hat{L}u = (L-\lambda M)u$. Ya que $a(x,t) - m(x,t) \geqslant 0$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$ sabemos que $\hat{L}:E \to F$ es isomorfismo topológico [1, lema 2.2], y se aplica entonces el lema 1 a $\hat{L}u = f$. ▲

Sea K_F: $\{f \in F;\ f(x,t) \geqslant 0\ \ \forall(x,t) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}\}$ el cono de las funciones no negativas en F y $K := J^{-1}(K_F)$ el cono de las funciones no negativas en E. Obviamente, el interior $\overset{\circ}{K}$ de K no es vacío y por el Lema 1 tenemos

$$(7)\qquad L^{-1}: K_F \setminus \{0\} \to \overset{\circ}{K}.$$

Como consecuencia podemos constatar una propiedad bien conocida de la función propia u_o que aparece en (2):

$$(8)\qquad u_o \in \overset{\circ}{K}.$$

Para verlo, considérese las equivalencias $Lu_o = \lambda_o Mu_o \iff (L+\lambda_o J)u_o = \lambda_o(M+J)u_o \iff 1/\lambda_o\ u_o = (L+\lambda_o J)^{-1}(M+J)u_o$. Luego obsérvese que $(L+\lambda_o J)^{-1}$ satisface (7) también y que $M+J: K\setminus\{0\} \to K_F\setminus\{0\}$ por ser $m(x,t)+1 > 0$ en $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$.

LEMA 2. *Sean* $e \in \overset{\circ}{K}$, $u \in E$. *Entonces:*

(a) *Si* X *es un subconjunto acotado de* E, *entonces existe una constante* $\gamma = \gamma(X) > 0$ *tal que* $v \leqslant \gamma e\ \ \forall v \in X$.

(b) $u \in \overset{\circ}{K} \iff \exists\,\alpha(u) > 0,\ \beta(u) > 0:\ \alpha(u)e \leqslant u \leqslant \beta(u)e$.

(c) $u \in \overset{\circ}{K} \iff u(x,t) > 0$ *en* $\Omega\times\mathbb{R}$, $\frac{\partial u}{\partial u}(x,t) < 0$ *sobre* $\partial\Omega\times\mathbb{R}$.

Prueba. **(a)** Por hipótesis existen constantes $\xi > 0$, $\varepsilon > 0$ tales que $\|v\| \leqslant \xi$, $\forall v \in X$, $\{v \in E;\ \|v-e\| \leqslant \varepsilon\} \in K$. Luego tenemos que $e - (\varepsilon/\xi)v \in K$, $\forall v \in X$, es decir, $(\xi/\varepsilon)e-v \in K$, $\forall v \in X$, lo que implica $v \leqslant \gamma e$, $\forall v \in X$, si ponemos $\gamma = \xi/\varepsilon$.

(b) La parte "$\Rightarrow$" sale inmediatamente de (a). Para la implicación opuesta, tenemos $\alpha(u)e \in \overset{\circ}{K}$ por ser $e \in \overset{\circ}{K}$,

$\alpha(u) > 0$. Por consiguiente, existe $\delta > 0$ tal que $\alpha(u)e+w \in K$ para todo $w \in E$, $\|w\| < \delta$; es decir, $u+w \geq \alpha(u)e+w \geq 0$, para todo $w \in E$, $\|w\| < \delta$. Así hemos demostrado $u+w \in K$ para todo $w \in E$, $\|w\| < \delta$, lo que significa que $u \in \overset{\circ}{K}$.

(c) Consideraciones geométricas simples muestran la parte "$\Leftarrow$" fácilmente. Ya utilizamos este hecho en (7). Para la segunda parte de la equivalencia definimos $e = L^{-1}1$. Por el Lema 1, el elemento e satisface $e(x,t) > 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$, $\frac{\partial e}{\partial n}(x,t) < 0$ sobre $\partial\Omega\times\mathbb{R}$, y ya sabemos que esta propiedad implica que $e \in \overset{\circ}{K}$. Por la afirmación (b), existe una constante positiva $\alpha(u)$ tal que $\alpha(u)e \leq u$. Por eso vale $u(x,t) > 0$ en $\Omega\times\mathbb{R}$. Además, tenemos para $(x,t) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}$ que

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = \lim_{h\to 0-0} \frac{u(x+hn,t)-u(x,t)}{h} = \lim_{h\to 0-0} \frac{u(x+hn,t)}{h}$$

$$\leq \lim_{h\to 0-0} \frac{\alpha(u)e(x+hn,t)}{h} = \alpha(u)\frac{\partial e}{\partial n}(x,t) < 0. \quad \blacktriangle$$

Observamos que los asertos (a) y (b) del Lema 2 valen en cualquier espacio de Banach E con cono positivo K tal que $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. Designamos con $K^* := \{u^* \in E^*;\ \langle u^*,u\rangle \geq 0\ \forall u \in K\}$ al cono dual de K y llamamos un elemento $u^* \in E^*$ *estrictamente positivo* si y solamente si $\langle u^*,u\rangle > 0$ para todo $u \in K\setminus\{0\}$. Ahora mencionamos un teorema famoso que está relacionado con los nombres de Krein y Rutman. Una demostración detallada se encuentra en [4, Theorem 19.3, 19.5].

TEOREMA DE KREIN-RUTMAN. *Sean* E *un espacio de Banach y* K *un cono en* E *con* $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. *Supongamos que el operador* $T:E \to E$ *es lineal, compacto y fuertemente positivo, es decir* $T:K\setminus\{0\} \to \overset{\circ}{K}$. *Entonces tenemos los siguientes asertos:*

(a) *el radio espectral* $r(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k}$ *es positivo.*

(b) $\mu_0 = r(T)$ *es valor propio simple de* T. μ_0 *tiene vector propio* $v_0 \in K\setminus\{0\}$. μ_0 *es el único valor propio de* T *con vector propio en* $K\setminus\{0\}$.

(c) μ_0 *es valor propio simple de* T^* *y a* μ_0 *corresponde un vector propio* v^* *estrictamente positivo.* $\blacktriangle$

En lo que sigue aplicaremos el teorema de Krein-Rutman siempre al operador $T = (L+\lambda_o J)^{-1}(M+J)$. Ya lo vimos en la demostración de (8) que $(L+\lambda_o J)^{-1}(M+J)$ manda $K \setminus \{0\}$ a $\mathring{K}$. Con esta escogencia de T nos resulta inmediatamente:

$$\mu_o = 1/\lambda_o, \quad v_o = c\cdot u_o \in \mathring{K} \text{ para cierto } c > 0. \tag{9}$$

Demostración del principio del anti-máximo.

LEMA 3. $L-\lambda M : E \to F$ *es operador de Fredholm de índice* 0 *y la imagen* $R(L-\lambda M)$ *es cerrada para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prueba. Ya que $L: E \to F$ es un isomorfismo topológico, L es un operador de Fredholm de índice 0. Se sabe que $L-\lambda M$, como perturbación compacta de L, también es un operador de Fredholm del mismo índice. Por un teorema de Kato, la imagen de un operador de Fredholm es cerrada. ▲

LEMA 4. a) $\dim \mathrm{Ker}(L-\lambda_o M) = \mathrm{codim}\, R(L-\lambda_o M) = 1$ *y* b) $F = \mathrm{span}\{Lu_o\} \oplus R(L-\lambda_o M)$.

Demostración. La primera afirmación es obvia por (3) y el Lema 3. Para el segundo aserto basta verificar que $Lu_o \notin R(L-\lambda_o M)$. Si fuera $(L-\lambda_o M)w = Lu_o$ para algún $w \in E$, entonces sería $(\mu_o I - L^{-1}M)w = \mu_o u_o$, lo que implicaría $(\mu_o I - L^{-1}M)^2 w = \mu_o(\mu_o I - L^{-1}M)u_o = 0$; es decir, $w \in \ker(\mu_o I - L^{-1}M)^2 = \ker(\mu_o I - L^{-1}M)$ por (3). Así sería $\mu_o u_o = 0$, lo que es una contradicción. ▲

LEMA 5. $\langle v^*, (L+\lambda_o J)^{-1}Lu_o\rangle \neq 0$ *y cada* $f \in F$ *se descompone unívocamente en* $f = \alpha Lu_o + f_1$, *donde* $f_1 \in R(L-\lambda_o M)$,

$$\alpha = \frac{\langle v^*, (L+\lambda_o J)^{-1} f\rangle}{\langle v^*, (L+\lambda_o J)^{-1} Lu_o\rangle}$$

Además $\alpha \neq 0$ *para* $f \in K_F \setminus \{0\}$

Prueba. La descomposición única sale del lema 4. Para $f_1 \in R(L-\lambda_o M)$ existe $w \in E$ tal que $f_1 = (L-\lambda_o M)w = [(L+\lambda_o J) - \lambda_o(M+J)]w$. Por eso obtenemos $(L+\lambda_o J)^{-1} f_1 = (I-\lambda_o T)w$. Aplicando el vector propio v^* de T^* a esta identidad nos da

$<v^*,(L+\lambda_o J)^{-1}f_1> = <v^*,w-\lambda_o Tw> = <v^*,w>-\lambda_o<v^*,Tw> = <v^*,w>$ $- \lambda_o<T^*v^*,w> = <v^*,w>-\lambda_o<\mu_o v^*,w> = 0$. Ya que $(L+\lambda_o J)^{-1}f =$ $\alpha(L+\lambda_o J)^{-1}Lu_o + (L+\lambda_o J)^{-1}f_1$, recibimos $<v^*,(L+\lambda_o J)^{-1}f> =$ $\alpha<v^*,(L+\lambda_o J)^{-1}Lu_o>$. Esta última relación nos prueba el lema puesto que $(L+\lambda_o J)^{-1}:K_F \setminus\{0\} \to \overset{o}{K}$. ▲

Mencionamos ahora otra consecuencia del Lema 4. A la suma directa topológica $F = \text{span}\{Lu_o\} \oplus R(L-\lambda_o M)$ corresponden dos proyecciones continuas canónicas $P:F \to \text{span}\{Lu_o\}$ y $Q = I-P:F \to R(L-\lambda_o M)$ tales que $I = P \oplus Q$.

LEMA 6. *Supongamos que para* $f \in F$ *y* $|\lambda-\lambda_o| < \delta_o$, $u = u(\lambda) \in E$ *son soluciones de* $Lu-\lambda Mu = f$. *Por el Lema 4 existe para todo* $\lambda \in (\lambda_o-\delta_o, \lambda_o+\delta_o)$ *una única representación*

$$Lu = \beta_\lambda Lu_o + u_1(\lambda) \tag{10}$$

donde

$$\beta_\lambda \in \mathbf{R}, \quad u_1(\lambda) \in R(L-\lambda_o M).$$

Podemos probar que existen constantes $\gamma_o = \gamma_o(f) > 0$ *y* $0 < \delta_1 < \delta_o$ *tales que* $\|L^{-1}u_1(\lambda)\|_E \leq \gamma_o$ *para todo* $|\lambda-\lambda_o| < \delta_1$.

Demostración. Observando que $Mu_o = 1/\lambda_o$ nos sale de (10):

$$Mu = \beta_\lambda Mu_o + ML^{-1}u_1(\lambda) = 1/\lambda_o \beta_\lambda Lu_o + ML^{-1}u_1(\lambda)$$

$$(\lambda_o-\lambda)Mu = \frac{\lambda_o-\lambda}{\lambda_o}\beta_\lambda Lu_o + (\lambda_o-\lambda)ML^{-1}u_1(\lambda).$$

Sustituyendo estos términos en $f = Lu-\lambda Mu = Lu-\lambda_o Mu + (\lambda_o-\lambda)Mu$, y aplicando (10) y el Lema 5, obtenemos

$$\begin{aligned}
\lambda Lu_o + f_1 &= \beta_\lambda Lu_o + u_1(\lambda) - \beta_\lambda Lu_o - \lambda_o ML^{-1}u_1(\lambda) + \frac{\lambda_o-\lambda}{\lambda_o}\beta_\lambda Lu_o \\
&\qquad + (\lambda_o-\lambda)ML^{-1}u_1(\lambda) \\
&= u_1(\lambda) - \lambda_o ML^{-1}u_1(\lambda) + \frac{\lambda_o-\lambda}{\lambda_o}\beta_\lambda Lu_o + (\lambda_o-\lambda)ML^{-1}u_1(\lambda) \\
&= (L-\lambda_o M)L^{-1}u_1(\lambda) + \frac{\lambda_o-\lambda}{\lambda_o}\beta_\lambda Lu_o + (\lambda_o-\lambda)PML^{-1}u_1(\lambda) \\
&\qquad + (\lambda-\lambda_o)QML^{-1}u_1(\lambda).
\end{aligned}$$

Por el Lema 4, esta identidad es equivalente a las dos ecuaciones

$$\frac{\lambda_o-\lambda}{\lambda_o}\beta_\lambda Lu_o + (\lambda_o-\lambda)PML^{-1}u_1(\lambda) = \alpha Lu_o, \tag{11}$$

$$(L-\lambda_o M)L^{-1}u_1(\lambda) + (\lambda_o-\lambda)QML^{-1}u_1(\lambda) = f_1, \tag{12}$$

para $|\lambda-\lambda_o| < \delta_o$.

Para $g_1 \in R(L-\lambda_o M)$ existe $w \in E$ tal que $Lw-\lambda_o Mw = g_1$, y por el Lema 4 tenemos la única descomposición

$$Lw = \beta Lu_o + w_1, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad w_1 \in R(L-\lambda_o M).$$

Poniendo $\lambda = \lambda_o$ en (12) conseguimos $(L-\lambda_o M)L^{-1}w_1 = g_1$. Por eso, $(L-\lambda_o M)L^{-1}:R(L-\lambda_o M) \to R(L-\lambda_o M)$ es sobreyectivo. Si también fuera $(L-\lambda_o M)L^{-1}v_1 = g_1$, podríamos concluir que $(L-\lambda_o M)L^{-1}(v_1-w_1) = 0$ y por (3) $cu_o = L^{-1}(v_1-w_1)$; es decir, $v_1-w_1 = cLu_o \in \text{span}\{Lu_o\} \cap R(L-\lambda_o M) = \{0\}$. Por consiguiente, $(L-\lambda_o M)L^{-1}:R(L-\lambda_o M) \to R(L-\lambda_o M)$ es una biyección continua en el espacio de Banach $R(L-\lambda_o M)$ con la norma $\|\cdot\|_F$. Por las consideraciones previas y el teorema de la aplicación abierta, el operador $(L-\lambda_o M)L^{-1}:R(L-\lambda_o M) \to R(L-\lambda_o M)$ es un isomorfirmo topológico. Un teorema bien conocido del análisis funcional nos garantiza la existencia de un $\delta_1 > 0$ tal que $(L-\lambda_o M)L^{-1} + (\lambda_o-\lambda)QML^{-1}:R(L-\lambda_o M) \to R(L-\lambda_o M)$ es un isomorfismo topológico para todo $|\lambda-\lambda_o| < \delta_1$. Aplicar este aserto a (12), nos da la existancia de una constante $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(f_1) > 0$, tal que $\|u_1(\lambda)\|_F \leqslant \tilde{\gamma}$ para todo $|\lambda-\lambda_o| \leqslant \delta_1$. ▲

Ahora vamos a terminar la demostración de nuestro teorema del anti-máximo. Ya que $\lambda_o PML^{-1}u_1(\lambda) = \eta_\lambda Lu_o$ con numeros reales apropiados $\eta_\lambda \in \mathbb{R}$, podemos concluir, por la continuidad de PM y por el Lema 6, que

$$|\eta_\lambda| = \frac{\|\lambda_o PML^{-1}u_1(\lambda)\|_F}{\|Lu_o\|_F} \leqslant H \quad \text{para todo } |\lambda-\lambda_o| \leqslant \delta_1.$$

Escribiendo (11) en la forma:

$$\beta_\lambda Lu_o = [\alpha\lambda_o/(\lambda_o-\lambda)]Lu_o - \eta_\lambda Lu_o ,$$

podemos deducir

$$\beta_\lambda = (\alpha\lambda_o)/(\lambda_o-\lambda) - \eta_\lambda , \text{ para } 0 < |\lambda-\lambda_o| \leqslant \delta_1. \tag{13}$$

Por ser $u_o \in \overset{\circ}{K}$, y usando los Lemas 2 y 6, obtenemos $\pm L^{-1}u_1(\lambda) \leqslant \gamma_o u_o$, para todo $0 < |\lambda-\lambda_o| \leqslant \delta_1$; es decir,

$$(\beta_\lambda-\gamma_o)u_o \leqslant u(\lambda) = \beta_\lambda u_o + L^{-1}u_1(\lambda) \leqslant (\beta_\lambda+\gamma_o)u_o \tag{14}$$

para $0 < |\lambda-\lambda_o| \leqslant \delta_1$. Si fuera $\alpha < 0$, entonces $\lim_{\lambda\to\lambda_o-0} \beta_\lambda = -\infty$, por (13), y la función $u = u(\lambda)$ sería negativa para $\lambda < \lambda_o$, $\lambda_o - \lambda$ suficientemente pequeño, lo que sería una contradicción con la propiedad (5). Por lo tanto, tenemos $\alpha > 0$ y $\beta_\lambda + \gamma_o < 0$, para $\lambda_o < \lambda < \lambda_o + \delta$, $\delta = \delta(f) > 0$ apropiado. Puesto que $u_o \in \overset{\circ}{K}$, tenemos, por (14) que $-u(\lambda) \in \overset{\circ}{K}$ para $\lambda_o < \lambda < \lambda_o + \delta$. Aplicando el último aserto del Lema 2, se obtiene el resultado deseado.

Notas.

(i) Una modificación obvia de la demostración anterior muestra también que, para $0 < |\lambda-\lambda_o| < \delta_1$, existe una única solución $u = u(\lambda) \in E$ de $(L-\lambda M)u = f$, para cualquier $f \in F$. Pero un tal resultado no sería nada nuevo. En efecto, el espectro del operador compacto $L^{-1}M: E \to E$ es discreto.

(ii) Sea $f \in K_F \setminus \{0\}$, (x,t) un punto fijado en $\Omega\times\mathbb{R}$ y $u = u(\lambda) \in E$ la única solución de $(L-\lambda M)u = f$, para $0 < |\lambda-\lambda_o| < \delta_1$. Acercándose a λ_o, la solución $u(x,t)$ se comporta asintóticamente como $1/(\lambda_o-\lambda)$ en virtud de la identidad en (14).

(iii) En general, la constante $\delta = \delta(f) > 0$ en nuestro principio del anti-máximo depende de f; véase [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] Beltramo, A., Hess, P., *On the principal eigenvalue of a periodic-parabolic operator*. Comm. Part. D. Equ. **9**, (1984) 919-941.

[2] Castro, A., Lazer, A.C., *Results on periodic solutions of parabolic equations suggested by elliptic theory*. Bull. U.M.J. 6, 1-B (1982) 1089-1104.

[3] Clément, Ph., Peletier, L.A., *An anti-maximum principle for esecund order elliptic operators*. J. Diff. Equ. **34**, (1979) 218-229.

[4] Deimling, K., *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag (1985).

[5] Hess, P., *An anti-maximum principle for linear elliptic equations with an indefinite weight function*. J. Diff. Equ. **41**, (1981) 369-374.

[6] Protter, M., Weinberger, H., *Maximum principles in differential equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1967).

[7] Schleinkofer, G., *Principio inverso del máximo para ecuaciones parabólicas periódicas*. Rev. Colombiana de Mat. (1986). Vol. XX (1986), 39-50.

Fachbereich Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität
D-6500 Mainz
República Federal de Alemania.

(Recibido en agosto de 1986).