Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. XXI (1987), págs. 95-106

LOS M_3-RETICULADOS

por

Aldo FIGALLO

Resumen: En este trabajo iniciamos el estudio de una clase de reticulados distributivos, estrechamente relacionada con la clase de las álgebras de Lukasiewicz trivalentes, cuya consideración fue sugerida por A. Monteiro [2], [6], [7], [8]. La motivación para su estudio se encuentra en la teoría de ciertos circuitos eléctricos. (véase Valentinuzzi [10]).

§1. Definiciones preliminares y propiedades.

1.1. DEFINICION. Un álgebra $A = (A, \wedge, \vee, \Delta, \sim)$ de tipo $(2,2,1,1)$ se dice un M_3-reticulado, si para todo $x,y,z \in A$ se verifican los siguientes axiomas:

A1) $x \wedge (x \wedge y) = x$

A2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

A3) $x = \sim\sim x$

A4) $x = \Delta x \vee \sim(x \vee \sim x)$

A5) $\Delta x = \Delta x \vee \sim\Delta x$

A6) $\Delta(x \vee \sim x) = x \vee \sim x$

A7) $\Delta(x \wedge \sim x) = \Delta(y \wedge \sim y)$

A8) $\Delta(x \vee y) = \Delta x \vee \Delta y$

A9) $(x \wedge y) \vee \sim(x \wedge y) = (x \vee \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$.

Como es habitual, un M_3-reticulado A será denotado simplemente por el conjunto A.

Si adoptamos la notación:

A') $\nabla x = x \vee \sim x$

entonces los axiomas A4), A6) y A9) pueden escribirse bajo la forma:

A'4) $x = \Delta x \vee \sim \nabla x$

A'6) $\Delta \nabla x = \nabla x$

A'9) $\nabla (x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$

Por A1) y A2), teniendo en cuenta un resultado de M. Sholander [9], podemos afirmar que $(A, \wedge, \vee)$ es un reticulado distributivo. Con $\leqslant$ representamos el orden asociado a dicho reticulado distributivo.

Demostraremos que los axiomas A1)-A9) son independientes, para ello consideremos los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1. Sea $A = \{0,1\}$ y consideremos sobre A las cuatro operaciones siguientes:

1) $x \wedge y = 0$ para todo $x, y \in A$

2) $\sim x = x$, $\Delta x = x$ para todo $x \in A$

3) la operación $\vee$ está definida por medio de la tabla

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Los axiomas A2)-A9) son válidos, en tanto que A1) no se verifica pues: $1 \wedge (1 \vee 1) = 1 \wedge 1 = 0 \neq 1$.

EJEMPLO 2. Sea $A = \{0,1\}$ y $\sim, \Delta, \wedge, \vee$ las operaciones dada por las tablas

x	$\sim x$	Δx
0	1	0
1	0	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
1	0	0
1	1	1

Entonces los axiomas A1), A3)-A9) son válidos en tanto que A2) no lo es pues: $1 \wedge (1 \vee 0) = 1 \wedge 1 = 1$ y $(0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) = 0 \vee 1 = 0$.

EJEMPLO 3. Sea A el reticulado distributivo cuyo diagrama de Hasse es el indicado en la Figura 1, y supongamos: **1)** $\Delta x = x$ para todo $x \in A$, 2) $\sim x = 0$ para todo $x \in A$. Entonces los axiomas A1), A2), A4)-A9), son válidos, pero A3) no se verifica, pues $\sim\sim 1 = \sim 0 \neq 1$.

EJEMPLO 4. Sea A el reticulado distributivo cuyo diagrama de Hasse es el indicado en la Figura 2 y $\sim,\Delta$ las operaciones definidas por las tablas

x	∼x	Δx
0	0	0
a	1	0
b	c	0
c	b	1
1	a	1

Los axiomas A1)-A3), A5)-A9) son válidos, en tanto que A4) no vale, pues $\Delta b \vee \sim(b \vee \sim b) = 0 \vee a = a \neq b$.

EJEMPLO 5. Sea A el reticulado distributivo indicado en el ejemplo 3 y $\sim,\Delta$ las operaciones definidas por las tablas

x	∼x	Δx
0	1	0
1	0	1

Los axiomas A1)-A4), A6)-A9) son válidos, pero A5) no se verifica, visto que $\Delta 0 \vee \sim\Delta 0 = 0 \vee 1 = 1 \neq 0$.

EJEMPLO 6. Sea A el reticulado distributivo indicado en el ejemplo 3 y pongamos: **1)** $\sim x = x$ para todo $x \in A$, 2) $\Delta x = 0$ para todo $x \in A$. Entonces los axiomas A1)-A5), A7)-A9) se verifican pero A6) no es válido, pues $\Delta(1 \vee \sim 1) = 0$ y $1 \vee \sim 1 = 1 \vee 0 = 1$.

EJEMPLO 7. Sea A el reticulado distributivo indicado en el ejemplo 3 y supongamos: **1)** $\sim x = x$ para todo $x \in A$, 2) $\Delta x = x$ para todo $x \in A$. Entonces A1)-A6), A8) y A9) son válidos, pero A7) no lo es pues $\Delta(1 \wedge \sim 1) = 1 \wedge 1 = 1$ y

$\Delta(0 \wedge \sim 0) = 0 \wedge 0 = 0.$

EJEMPLO 8. Sea A el reticulado distributivo indicado en el ejemplo 4 y $\sim, \Delta$ las operaciones definidas por las tablas

x	$\sim x$	Δx
0	0	0
a	c	0
b	1	0
c	a	c
1	b	1

Los axiomas A1)-A7), A9) son válidos en tanto que A8) no se verifica pues: $\Delta(b \vee c) = \Delta 1 = 1$ y $\Delta b \vee \Delta c = 0 \vee c = c$.

EJEMPLO 9. Sea A el reticulado distributivo cuyo diagrama de Hasse es el indicado en la figura 3 y $\sim, \Delta$ las operaciones definidas por las tablas

x	$\sim x$	Δx
0	0	0
a	1	0
b	c	0
c	b	c
1	a	1

Los axiomas A1)-A8) se verifican pero A9) no vale, pues $(a \wedge b) \vee \sim(a \wedge b) = a \vee \sim a = a \vee 1 = 1$ y $(a \vee \sim a) \wedge (b \vee \sim b) = 1 \wedge (b \vee c) = c$.

Figura 1

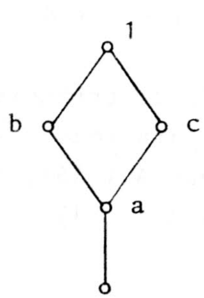


Figura 2

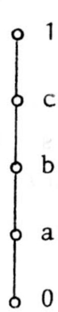


Figura 3

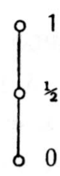
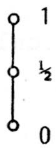


Figura 4

A continuación indicamos el ejemplo más sencillo de

M_3-reticulado que no es un álgebra de Boole, y que juega un papel importante en esta teoría.

EJEMPLO 10. Sea $T = \{0,\frac{1}{2},1\}$ el reticulado distributivo cuyo diagra de Hasse es el indicado en la Figura 4 y $\sim$, Δ las operaciones definidas por las tablas



x	$\sim x$	Δx
0	0	0
½	1	0
1	½	1

Las propiedades siguientes pueden ser derivadas directamente de los axiomas.

1.2. LEMA. *En todo* M_3-*reticulado* A *valen las siguientes propiedades:*

A10) $\Delta x \leqslant x$

A11) $x \leqslant \nabla x$

A12) $\sim x \leqslant \nabla x$

A13) $\sim\nabla x \leqslant x$

A14) $\nabla\nabla x = \nabla x$

A15) $\nabla\sim x = \nabla x$

A16) $\Delta(x \wedge \sim x) = 0$ *es el primer elemento del reticulado* $(A,\wedge,\vee)$

A17) $\Delta\sim\nabla x = 0$

A18) $\Delta\Delta x = \Delta x$

A19) $\nabla x = \Delta x \vee \Delta\sim x$

A20) $\sim 0 = 0$

A21) *Si* $x \leqslant y$ *entonces* $\Delta x \leqslant \Delta y$

A22) *Si* $x \leqslant y$ *entonces* $\nabla x \leqslant \nabla y$

A23) $\nabla\Delta x = \Delta x$

A24) $\Delta\sim\nabla x = 0$.

1.3. DEFINICION. Si A es un M_3-reticulado, entonces: 1) $a \in A$ se dice *invariante* si cumple $\nabla a = a$. 2) Si $X \subseteq A$, con $K(X)$ representamos al conjunto $\{\nabla x : x \in X\}$.

1.4. LEMA. *En todo* M_3-*reticulado* A *se verifica:*

1) $b \in K(A)$ *si y sólo si se verifica* $b = \Delta b$.

2) *Si* $x, y \in K(A)$ *entonces* $x \wedge y \in K(A)$.

3) *Si* $x, y \in K(A)$ *entonces* $x \vee y \in K(A)$.

4) *Si* $x \in K(A)$ *entonces* $\Delta x \in K(A)$.

5) *Si* $x \in K(A)$ *entonces* $\nabla x \in K(A)$.

6) $0 \in K(A)$

Finalmente indicamos otras reglas de cálculo necesarias para lo que sigue:

1.5. LEMA. *En todo* M_3*-reticulado* A *valen las siguientes propiedades:*

A25) $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$

A26) $\Delta(x \wedge y) = \Delta x \wedge \Delta y$

A27) (*Principio de determinación*) *Si* $\Delta x = \Delta y$ *y* $\nabla x = \nabla y$ *entonces* $x = y$.

A28) *Si* $\Delta x \leq \Delta y$, $\nabla x \leq \nabla y$ *entonces* $x \leq y$

A29) $\sim(x \vee y) \leq \sim x \vee \sim y$

Demostración. Probaremos solamente A26), A27) y A29).

A26) Teniendo en cuenta A'4) podemos escribir: (1) $x = \Delta x \vee \sim\nabla x$, (2) $y = \Delta y \vee \sim\nabla y$. De (1) y (2): (3) $x \wedge y = (\Delta x \wedge \Delta y) \vee (\Delta x \wedge \sim\nabla y) \vee (\Delta y \wedge \sim\nabla x) \vee (\sim\nabla x \wedge \sim\nabla y)$. De (3) y A8): (4) $\Delta(x \wedge y) = \Delta(\Delta x \wedge \Delta y) \vee \Delta(\Delta x \wedge \sim\nabla y) \vee \Delta(\Delta y \wedge \sim\nabla x) \vee \Delta(\sim\nabla x \wedge \sim\Delta y)$. Por otra parte como $\Delta x \wedge \sim\nabla y < \sim\nabla y$, teniendo en cuenta A21) y A24) podemos afirmar que vale: (5) $\Delta(\Delta x \wedge \sim\nabla y) = 0$. En forma análoga se prueba que: (6) $\Delta(\Delta y \wedge \sim\nabla x) = 0$, (7) $\Delta(\sim\nabla x \wedge \sim\nabla y) = 0$. Además por A18) y 1.4. 2): (8) $\Delta(\Delta x \wedge \Delta y) = \Delta x \wedge \Delta y$. A26) es consecuencia de (4), (5), (6), (7) y (8).

A27) Aplicando sucesivamente A'4), A8), A25), las hipótesis y A'4), podemos escribir: $x \vee y = \Delta(x \vee y) \vee \sim\nabla(x \vee y) = \Delta x \vee \Delta y \vee \sim(\nabla x \vee \nabla y) = \Delta x \sim\nabla x = x$, luego (i) $y \leq x$, en forma análoga se prueba (ii) $x \leq y$.

A29) De A'4) y A25): $(x \vee y) \vee \sim(x \vee y) = x \vee \sim x \vee y \vee \sim y = (x \vee y) \vee (\sim x \vee \sim y)$, de donde obtenemos, por A1) y A2): (1) $\sim(x \vee y) = ((x \vee y) \vee (\sim x \vee \sim y)) \vee \sim(x \vee y) = ((x \vee y) \vee \sim(x \vee y)) \vee ((\sim x \vee \sim y) \wedge \sim(x \vee y))$. Teniendo en cuenta (1), A8), A26) y

A16): (2) $\Delta\sim(x \vee y) = \Delta((x\vee y) \sim(x \vee y)) \vee (\Delta(\sim x\vee\sim y) \wedge \Delta\sim(x \vee y))$ $= \Delta(\sim x \vee \sim y) \wedge \Delta\sim(x \vee y)$. De (3): (4) $\Delta\sim(x \vee y) \leqslant \Delta(\sim x \vee \sim y)$. Por otra parte de A15) y A25): (5) $\nabla\sim(x \vee y) = \nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$ $= \nabla\sim x\vee\nabla\sim y = \nabla(\sim x \vee \sim y)$. De (4), (5) y A28) resulta A29).

§2. **n-ideales**. En lo que sigue las nociones de homomorfismo, subálgebras, álgebras simples, etc., son las dadas usualmente en el sentido del álgebra universal. Recordemos que si A es un reticulado distributivo con primer elemento 0, un ideal N es un subconjunto de A con las propiedades siguientes: N1) $0 \in N$, N2) Si $x,y \in N$ entonces $x \vee y \in N$, N3) Si $x \in N$, $y \leqslant x$ entonces $y \in N$.

2.1. DEFINICION. Un n-*ideal* de un M_3-reticulado A es un ideal N de A que verifica N4) Si $x \in N$ entonces $\sim x \in N$.

Observemos que la condición N4) de 2.1. es equivalente a la condición: (N'4) Si $x \in N$ entonces $\nabla x \in N$. Diremos que un n-ideal es *primo*, *irreducible* o *completamente irreducible*, si es un ideal primo, irreducible o completamente irreducible respectivamente.

Si A es un M_3-reticulado y $X \subseteq A$ representaremos con I.G.(X) y N.G.(X) al ideal y al n-ideal generados por X respectivamente.

2.2. LEMA. N.G.(X) = I.G.(K(X)).

2.3. LEMA. *Si* N *es un* n-*ideal de* A *y* $X = N \cup \{a\}$ *entonces* $N.G.(X) = \{z \in A$: *existe* $u \in N$ *que verifica* $z \leqslant \nabla(u \vee a)\}$.

2.4. LEMA. *Si* A *es un* M_3-*reticulado y* $N \subseteq A$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) N *es un* n-*ideal primo.*
2) N *es un* n-*ideal irreducible.*

2.5. DEFINICION. Un n-ideal C se dice *ligado al elemento* x si verifica:

1) $x \notin C$

2) Si N es un n-ideal que contiene a C y $N \neq C$ entonces $x \in N$.

2.6. LEMA. *Todo n-ideal ligado a algún elemento es completamente irreducible.*

2.7. LEMA. *Todo n-ideal propio de un M_3-reticulado es intersección de n-ideales primos.*

2.8. TEOREMA. (De la semi-simplicidad). *Sea* A *un* M_3-*reticulado y* $E(A) = \{M \subseteq A : M$ *es* n-*ideal primo*$\}$ *el espectro primo de* A, *entonces* $\bigcap \{M : M \in E(A)\} = \{0\}$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Lema 2.7 y del hecho que $\{0\}$ es un n-ideal. ▲

Finalmente damos una caracterización de los n-ideales primos.

2.9. TEOREMA. *Sea* A *un* M_3-*reticulado y* $M \subseteq A$. M *es un* n-*ideal primo de* A *si y sólo si existe un ideal primo* I *de* A *que verifica:* $M = I \cap \sim I$ *(donde* $\sim I = \{\sim x : x \in I\}$).

Demostración. Si M es un n-ideal primo entonces $M = M \cap \sim M$ con M ideal primo. Recíprocamente, supongamos que I es un ideal primo que verifica $M = I \cap \sim I$ y probemos:

1) Si $x, y \in M$ entonces $x \vee y \in M$. De las hipótesis tenemos: (1) $x \in I$, (2) $\sim x \in I$, (3) $y \in I$, (4) $\sim y \in I$. De (1), (3) y N2): (5) $x \vee y \in I$. De (2), (4) y N2): (6) $\sim x \vee \sim y \in I$. De (6), A29) y N3): (7) $\sim(x \vee y) \in I$. De (7), A3) y (5): $x \vee y \in M$.

2) Si (1) $x \in M$ y (2) $\mu \leqslant x$, entonces $\mu \in M$. De (1): (3) $x \in I$ y (4) $\sim x \in I$. De (3), (4), N2) y A'): (5) $\nabla x \in I$. De (5), (2), A22) y N3): (6) $\nabla \mu \in I$. Por otra parte, de (6) y teniendo en cuenta A12) resulta: (7) $\sim \mu \in I$, y como por (2) (3) y N3): (8) $\mu \in I$, de (7) y (8) tenemos que $\mu \in M$.

3) Si $x \in M$ entonces $\sim x \in M$. Es consecuencia de la hipótesis y A3).

4) Si $a \wedge b \in M$ entonces ó $a \in M$ ó $b \in M$. De la hipótesis, como M es n-ideal y teniendo en cuenta A'9) y N'4): $\nabla a \wedge \nabla b \in M$, luego (2) $\nabla a \wedge \nabla b \in I$. Como I es primo, de (2): (3) $\nabla a \in I$ ó (4) $\nabla b \in I$. Supongamos que vale (3), entonces: (5) $\sim\nabla a \in \sim I$. Por otra parte de (3), N3) y A13): (6) $\sim\nabla a \in I$. De (5) y (6): (7) $\nabla a \in M$. De (7), N3) y A11): $a \in M$.

§3. M_3-reticulados simples y teorema de representación. El M_3-reticulado T indicado en el ejemplo 10 es simple y mostraremos en 3.3 que, salvo isomorfismos, éste es el único M_3-reticulado simple.

3.1. LEMA. *Si A es un M_3-reticulado con más de un elemento y $h:A \to T$ es un homomorfismo no trivial, entonces $N(h) = h^{-1}(0)$ es un n-ideal primo de A. Recíprocamente, si M es un n-ideal primo de A y definimos:*

$$h_M(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in M \\ \frac{1}{2} & si \quad x \in \{x \notin M : \Delta x \in M\} = M_{\frac{1}{2}} \\ 1 & si \quad x \in A-(M \cup M_{\frac{1}{2}}) = M_1 \end{cases}$$

entonces $h_M:A \to T$ es un epimorfismo y $N(h_M) = M$.

La demostración de 3.1 es larga pero computacional y es consecuencia de A26), A10), A8), A18), A3), A19), A11), A16) y A6).

3.2. LEMA. *Si A es un M_3-reticulado simple, el único n-ideal primo de A es $\{0\}$.*

Demostración. Es consecuencia de 3.1.

3.3. TEOREMA. *Si A es un M_3-reticulado simple entonces es isomorfo a T.*

Si E es un conjunto no vacío y A es un M_3-reticulado, entonces A^E denota el M_3-reticulado de todas las funciones de E en A, donde las operaciones están definidas punto por punto.

3.4. TEOREMA. (de representación). *Dado un* M_3-*reticulado* A *no trivial, existe un conjunto no vacío* E *tal que* A *es isomorfo a un* M_3-*subreticulado de* T^E.

Indiquemos la demostración de 3.4 en sus líneas generales: Sea E = E(A) el espectro primo de A y consideremos el M_3-reticulado T^E, entonces la aplicación que a cada $f \in A$ le hace corresponde la función $F \in T^E$ definida por la fórmula $F(M) = h_M(f)$, donde h_M es la función definida en 3.1, es un homomorfismo de A sobre un M_3-reticulado de T^E. La inyectividad de esta función es consecuencia del Teorema 2.8.

BIBLIOGRAFIA

[1] Balbes, R. and Dwinger, P.H., *Distributive Lattices* (1974), University of Missouri Press.

[2] Borkowski, L. (Ed), *Selected Works of Lukasiewicz*, North -Holland, Amsterdam (1970).

[3] Moisil, Gr.C., *Sur les idéaux des algèbres Lukasiewiziennes trivalentes*, Analele Universitatii C.I. Parhom. Seria Acta Logica, 3 (1960) 83-85.

[4] Moisil, Gr.C., *Algebra schemelor cu elemente ventil*, Revista Universitatii "C.I., Parhom" si a politehnicil Bucaresti, 9 (1954), 9-42.

[5] Moisil, Gr.C., *Essais sur les logiques non chrysippiennes*. Ed. Academiei Bucarest, P. 697-698.

[6] Monteiro, A., *Algèbres de Boole Cycliques*, Revue Roumaine de Mathematiques pures el appliquées, XXIII Nº 1, 71-76.

[7] Monteiro, A., *Sur la definition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P. Roum 7 (55) Nº 1-2 (1963).

[8] Monteiro, L., *Axiomes indépendants pour les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P. Roum 7 (55), Nº 3-4 (1963) 199-202.

[9] Sholander, M., *Postulates for distributive lattices*. Canadian Journals of Mathematics, 3 (1951).

[10] Valentinuzzi, M.E., *Three valued propositional Calculus of Lukasiewicz and Three-position double switches*, IEEE Trans. on Electronic Computers, Vol. Ec-16, Nº 1 (1967) 39-44.

Instituto de Matemática
Universidad Nacional de San Juan
Av. Lib. Gral. San Martín 1109 (Oeste)
5400 - San Juan
Argentina.

(Recibido en septiembre de 1986).